Prédiction d'une valeur manquante dans des champs aléatoires stationnaires

M. Ibazizen[1] et A. Hamaz[2]

1 LMA, Université de Poitiers

2 Université de Tizi-Ouzou, Algérie

Un champ aléatoire à 2 dimensions est un processus aléatoire $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$: pour chaque couple d'indices (s,t), $X(s,t)$ est une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des v.a. de moyenne 0, de carré intégrable, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni du produit scalaire $< X, Y >= E(XY) = Cov(X, Y)$.

La suite $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$, avec $X(s,t) \in L^2(\Omega)$, est stationnaire d'ordre 2 si sa moyenne est constante $E(X(s,t)) = m$ (on supposera dans la suite que $m = 0$) ; sa covariance est invariante par translation : la covariance entre $X(s_1, t_1)$ et $X(s_2, t_2)$ ne dépend que des pas $(s_1 - s_2, t_1 - t_2)$:

$$\mathrm{Cov}\left(X(s_1, t_1), X(s_2, t_2)\right) = \gamma(s_1 - s_2, t_1 - t_2).$$

Problème : Estimer, interpoler ou "prédire" une valeur manquante $X(0,0)$ connaissant le passé du processus sur le 3ème quadrant :

$$Q = \{(i,j); i \leq 0, j \leq 0, (i,j) \neq (0,0)\}$$

et un nbre fini d'observations ajoutées au passé :

$$K = \{(i,j); 0 \leq i \leq h_1, 0 \leq j \leq h_2; (i,j) \neq (0,0)\}$$

Remarque :
Le problème de la prévision de $X(0,0)$ sur la base du passé, noté $\mathcal{Q} = \{X(i,j); (i,j) \in Q\}$ est résolu dans la littérature en généralisant la théorie de Weiner-Kolmogorov pour les séries chronologiques ou les processus stationnaires à une dimension $\{X(t); t \in \mathbb{Z}\}$.

Par exemple, Kohli et Pourahmadi (2014) (Some prediction problems for stationary random fields with quarter-plane past. Journal of Multivariate Analysis, 127, 112-125.) ont défini l'expression du prédicteur $\hat{X}(h_1, h_2)$ au pas $(h_1, h_2) \in Q^c$ de $X(h_1, h_2)$ en fonction du passé $\mathcal{Q}$ ainsi que l'expression de la variance de l'erreur de prédiction $\hat{X}(h_1, h_2) - X(h_1, h_2)$ en fonction des coefficients de la représentation en moyenne mobile (MA) du champ aléatoire $\{X(s, t)\}$.

On suppose que les conditions (notamment sur la fonction de densité spectrale, cf. Kohli et Pourahmadi (2014)) sont réunies de façon à ce que le champ aléatoire $\{X(s,t);(s,t)\in\mathbb{Z}^2\}$ admette une représentation unilatérale MA(∞) sur Q, i.e. il existe un bruit blanc $\{\epsilon(s,t);(s,t)\in\mathbb{Z}^2\}$ de variance σ^2 tel que :

$$X(s,t)=\epsilon(s,t)+\sum_{\substack{k=0\\(k,l)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}b_{k,l}\epsilon(s-k,t-l), \qquad (1)$$

où $\{b_{i,j};(i,j)\in\mathbb{Z}^2\}$ est la suite des paramètres MA, avec $b_{0,0}=1$, $b_{k,l}=0$ pour $k<0$ ou $l<0$ et $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|b_{k,l}|^2<\infty$.

La représentation AR correspondante est :

$$X(s,t) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} X(s-k, t-l) + \epsilon(s,t). \tag{2}$$

Dans la suite, on suppose que $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}^2 < \infty$. Cela garantit la convergence de la représentation AR du champ al. stationnaire $\{X(s,t)\}$. Les coeff. des représentations MA et AR du champ al. sont liés par les relations de récurrences suivantes :

$$b_{0,0} = a_{0,0} = 1,$$
$$b_{i,j} = \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{i} \sum_{l=0}^{j} b_{k,l} a_{i-k,j-l}. \tag{3}$$

Théorème (Kohli et Pourahmadi (2014))
Pour tout $(h_1, h_2) \in Q^c$, le prédicteur de $X(h_1, h_2)$ basé sur le passé $\mathcal{Q}$ est :

$$\hat{X}(h_1, h_2) = \sum_{\substack{k=h_1 \\ (k,l)\neq(h_1,h_2)}}^{\infty} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l}\epsilon(h_1 - k, h_2 - l), \tag{4}$$

et l'erreur de prévision :

$$X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2) = b_{h_1,h_2}\epsilon(0, 0) + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l}\epsilon(h_1 - k, h_2 - l)$$

$$+ \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l}\epsilon(h_1 - k, h_2 - l) + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l}\epsilon(h_1 - k, h_2 - l). \tag{5}$$

La variance de l'erreur de prédiction est :

$Var\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right) = \sigma^2 V,$ avec

$$V = |b_{h_1,h_2}|^2 + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} |b_{k,l}|^2 + \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k,l}|^2 + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k,l}|^2. \quad (6)$$

On considère le pb de la prédiction de $X(0,0)$ lorsque un nbre fini d'observations (du premier quadrant) sont ajoutées au passé Q :
$I = Q \cup K$

K est l'ensemble d'indices $\{(i,j); 0 \leq i \leq h_1, 0 \leq j \leq h_2; (i,j) \neq (0,0)\}$.

Le meilleur prédicteur linéaire (au sens des moindres carrés) de $X(0,0)$ est la projection orthogonale de $X(0,0)$ sur le sev $\mathcal{I}$ engendré par les v.a. $X(i,j), \ \ (i,j) \in I$.

Pb : les sev $\mathcal{Q} = \overline{sp}\{X(i,j); (i,j) \in Q\}$ et $\mathcal{K} = \overline{sp}\{X(i,j); (i,j) \in K\}$ ne sont pas orthogonaux et la construction d'une telle projection est difficile même si on sait construire les projections orthogonales respectives de $X(0,0)$ sur ces deux sous-espaces.

Solution : (Pourahmadi (1989). Estimation and interpolation of missing values of a stationary time series. Journal of Time Series Analysis, 10(2))

Exprimer $\mathcal{I}$ comme la somme directe de $\mathcal{Q}$ et d'un sev de dimension finie orthogonal à $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{A} = \overline{sp}\{X(i,j) - \hat{X}(i,j); (i,j) \in K\},$$

où $\hat{X}(i,j)$ est la projection orthogonale de $X(i,j)$ sur $\mathcal{Q}$.

On montre que :
i) $X(0,0) \notin \mathcal{I}$
ii) $\mathcal{I} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{A}$
iii) $\hat{X}_{\mathcal{I}}(0,0) = P_{\mathcal{I}}X(0,0) = P_{\mathcal{Q}}X(0,0) + P_{\mathcal{A}}X(0,0) = \hat{X}(0,0) + P_{\mathcal{A}}X(0,0)$
et

$$P_{\mathcal{A}}X(0,0) = \sum_{(i,j)\in K}\sum \beta_{i,j}\left(X(i,j) - \hat{X}(i,j)\right) = \beta'(X_K - \hat{X}_K), \quad (7)$$

$\beta' = \{\beta_{i,j}; (i,j) \in K\}; X'_K = \{X(i,j); (i,j) \in K\}; \hat{X}'_K = \{\hat{X}(i,j); (i,j) \in K\}$ arrangés dans l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^2$.

Lorsqu'une seule observation additionnelle $X(h_1, h_2)$ est présente, le passé est modifié : $\mathcal{I}_1 = \mathcal{Q} \cup \{(X_{h_1}, X_{h_2})\}$,

avec $h_i \geq 0, i = 1, 2$; $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$.

Le meilleur prédicteur linéaire de $X(0, 0)$ basé sur $\mathcal{I}_1$ est :

$$\hat{X}_{\mathcal{I}_1}(0,0) = \hat{X}(0,0) + \beta_{h_1,h_2}\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right) \qquad (8)$$

$\hat{X}(0, 0)$ est le projecteur orthogonal de $X(0, 0)$ basé sur le passé $\mathcal{Q}$.

La projection orthogonale de $X(0, 0)$ sur le sous-espace $\mathcal{A}$ à une dimension engendré par $X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)$ est :

$P_{\mathcal{A}}X(0,0) = \beta_{h_1,h_2}\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right)$, avec

$$\beta_{h_1,h_2} = \frac{< X(0,0), X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2) >}{||X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)||^2}$$

$$\beta_{h_1,h_2} = \{Var\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right)\}^{-1} Cov\left(X(0,0), X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2\right.$$

$$= (\sigma^2 V)^{-1}(\sigma^2 b_{h_1,h_2}) = V^{-1} b_{h_1,h_2} \qquad (8)$$

L'erreur de la prédiction est :

$$X(0,0) - \hat{X}_{\mathcal{I}_1}(0,0) = X(0,0) - \hat{X}(0,0) - \beta_{h_1,h_2}\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}\epsilon(-k,-l) - \sum_{\substack{k=0\\(k,l)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l}\epsilon(-k,-l) - \beta_{h_1,h_2}\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h\right.$$

$$= \epsilon(0,0) - \beta_{h_1,h_2}\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right)$$

et la variance de l'erreur :

$$\sigma^2(\mathcal{I}_1) = Var\left(\epsilon(0,0)\right) + |\beta_{h_1,h_2}|^2 Var\left(X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right)$$

$$-2\beta_{h_1,h_2} Cov\left(\epsilon(0,0), X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2)\right) = \sigma^2\left(1 - V^{-1}|b_{h_1,h_2}|^2\right) \qquad (9)$$

On considère le pb de la prédiction de $X(0,0)$ lorsque un nbre fini d'observations (du premier quadrant) sont ajoutées au passé Q :
$I_2 = Q \cup K$ avec $K = \{(i,j); 0 \leq i \leq h_1, 0 \leq j \leq h_2; (i,j) \neq (0,0)\}$.

Le passé est modifié : $\mathcal{I}_2 = \mathcal{Q} \cup \{(X_{i,j}; (i,j) \in K\}$

En généralisant ce qui a précédé (Kohli et Pourahmadi (2014)), on obtient le meilleur prédicteur linéaire de $X(0,0)$ basé sur $\mathcal{I}_2$:

$$\hat{X}_{\mathcal{I}_2}(0,0) = \hat{X}(0,0) + \beta' \left(X_K - \hat{X}_K \right), \tag{10}$$

où
$X_K - \hat{X}_K$ est le vecteur des erreurs de prédiction des observations futures $X(i,j) - \hat{X}(i,j); (i,j) \in K$

$\beta = \{\beta_{i,j}; (i,j) \in K\}$

On pose :

$$X_K - \hat{X}_K = \begin{pmatrix} X(h_1,h_2) - \hat{X}(h_1,h_2) \\ X(h_1-1,h_2) - \hat{X}(h_1-1,h_2) \\ X(h_1-2,h_2) - \hat{X}(h_1-2,h_2) \\ \vdots \\ X(1,1) - \hat{X}(1,1) \\ X(1,0) - \hat{X}(1,0) \\ X(0,1) - \hat{X}(0,1) \end{pmatrix}$$

Soit T_{i-1} le vecteur des paramètres MA apparaissant dans l'erreur de prédiction de la ième "future" observation ($i = 1, \cdots, n$) avec $n = (h_1+1)(h_2+1) - 1$ (voir formule (5)) :

$T'_{n-1} = \{b_{0,0}, b_{1,0}, b_{2,0}, \cdots, b_{0,1}, b_{0,2}, \cdots\}$

$\vdots$

$T'_0 = \{b_{h_1-1,h_2-1}, b_{h_1,h_2-1}, b_{h_1+1,h_2-1}, \cdots, b_{h_1-1,h_2}, b_{h_1-1,h_2+2}, \cdots\}$

A partir de (5), on peut reécrire les différentes erreurs de prédiction sous la forme :

$$X_K - \hat{X}_K = \begin{pmatrix} b_{h_1,h_2} & T'_{n-1} & T'_{n-2} & \cdots & T'_0 \\ b_{h_1-1,h_2} & T'_{n-2} & T'_{n-3} & \cdots & 0' \\ b_{h_1-2,h_2} & T'_{n-3} & T'_{n-4} & \cdots & T'_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{1,1} & T'_0 & 0' & \cdots & 0' \\ b_{1,0} & b_{1,0} & 0' & \cdots & 0' \\ b_{0,1} & 0' & b_{0,1} & \cdots & 0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon(0,0) \\ \epsilon_K \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_K & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon(0,0) \\ \epsilon_K \end{pmatrix} = b_K \epsilon(0,0) + T'\epsilon_K \qquad (11)$$

On déduit l'expression du vecteur β dans (10) déterminant le prédicteur de $X(0,0)$ sur le sev engendré par les observations additionnelles $\{X_{i,j}; (i,j) \in K\}$:

$$\beta = G^{-1} b_K \left(1 + b'_K G^{-1} b_K\right)^{-1}, \tag{12}$$

où $G = T'\overline{T}$.

L'erreur de prédiction est :
$X(0,0) - \hat{X}_{\mathcal{I}_2}(0,0) = X(0,0) - \hat{X}(0,0) - \beta'\left(X_K - \hat{X}_K\right),$
$= X(0,0) - \hat{X}(0,0) - \beta'\left(b_K \epsilon(0,0) + T'\epsilon_K\right)$

et la variance de la prédiction en fonction des paramètres MA et AR est :

$$\sigma^2(\mathcal{I}_2) = \sigma^2(1 + b'_K G^{-1} b_K)^{-1}, \tag{13}$$

$$\sigma^2(\mathcal{I}_2) = \sigma^2(1 + a'_K P a_K)^{-1}, \tag{14}$$

avec $P = \overline{T}(T'\overline{T})^{-1} T$.

Idée : Introduire un nouveau prédicteur de $X(0,0)$ combinaison linéaire appropriée du prédicteur backward $\hat{X}(0,0) = P_{\mathcal{Q}}X(0,0)$ et du prédicteur forward $\hat{X}_{h_1 h_2}(0,0) = P_{\mathcal{K}}X(0,0)$ projection orthogonale de $X(0,0)$ sur $\mathcal{K} = \{X(i,j); (i,j) \in K\}$:

$$\tilde{X}_{h_1,h_2}(0,0) = \alpha_{h_1 h_2}\hat{X}(0,0) + \beta_{h_1 h_2}\hat{X}_{h_1 h_2}(0,0) \tag{15}$$

avec $\alpha_{h_1 h_2}$ et $\beta_{h_1 h_2}$ choisis tq $Var(X(0,0) - \tilde{X}_{h_1 h_2}(0,0))$ minimum.

Solution : $\alpha_{h_1 h_2}$ and $\beta_{h_1 h_2}$ sont solutions des équations normales :

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{X}(0,0)) & Cov(\hat{X}(0,0), \hat{X}_{h_1 h_2}(0,0)) \\ Cov(\hat{X}(0,0), \hat{X}_{h_1 h_2}(0,0)) & Var(\hat{X}_{h_1 h_2}(0,0)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{h_1 h_2} \\ \beta_{h_1 h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cov(X(0,0), \hat{X}(0,0)) \\ Cov(X(0,0), \hat{X}_{h_1 h_2}(0,0)) \end{bmatrix} \tag{16}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
Cov(X(0,0), \hat{X}(0,0)) &= Var(\hat{X}(0,0)) &&= \gamma(0,0) - \sigma^2 \\
Cov(X(0,0), \hat{X}_{h_1 h_2}(0,0)) &= Var(\hat{X}_{h_1 h_2}(0,0)) &&= \gamma(0,0) - \sigma^2_{h_1 h_2}
\end{aligned}
$$

Soit $\rho_{h_1 h_2} = Cor(\hat{X}(0,0), \hat{X}_{h_1 h_2}(0,0))$, la corrélation entre les prédicteurs backward and forward de et $r_{h_1 h_2} = \sqrt{Var(\hat{X}_{h_1 h_2}(0,0))/Var(\hat{X}(0,0))}$.

La solution de (16) s'écrit :

$$
\alpha_{h_1 h_2} = \frac{1 - r_{h_1 h_2}\rho_{h_1 h_2}}{1 - \rho^2_{h_1 h_2}}, \qquad \beta_{h_1 h_2} = \frac{1 - r^{-1}_{h_1 h_2}\rho_{h_1 h_2}}{1 - \rho^2_{h_1 h_2}} \tag{17}
$$

et la variance de l'erreur de prévision :

$$Var\left(X(0,0) - \tilde{X}_{h_1 h_2}(0,0)\right) = \gamma(0,0) - \frac{1}{1-\rho^2_{h_1 h_2}}\left[f(h_1, h_2, \sigma)\right] \tag{18}$$

avec $f(h_1, h_2, \sigma) = 2\gamma(0,0) - \sigma^2 - \sigma^2_{h_1 h_2} - 2Cov\left(\hat{X}(0,0), \hat{X}_{h_1 h_2}(0,0)\right)$

Remarque :
Les formules (17) et (18) prennent des formes plus simples lorsqu'on a un grand nombre d'observations futures : $(h_1, h_2) \to (\infty, \infty)$.

Dans ce cas, $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(\infty,\infty)} r_{h_1 h_2} = 1$

$$\rho = \lim_{(h_1,h_2)\to(\infty,\infty)} \rho_{h_1 h_2} = 1 - \left(\frac{\gamma(0,0)}{\sigma^2}\right)^{-1} \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\neq(0,0)}}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} b_{i,j}. \tag{19}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(\infty,\infty)} \alpha_{h_1 h_2} = \lim_{(h_1,h_2)\to(\infty,\infty)} \beta_{h_1 h_2} = (1+\rho)^{-1},$$

$$Var\left(X(0,0) - \tilde{X}_\infty(0,0)\right) = \gamma(0,0) - \frac{2\sigma^2}{1-\rho^2}\left(\frac{\gamma(0,0)}{\sigma^2} - 1 - \rho\right). \quad (20)$$

En égalant cette variance (20) à celle donnée en (14) lorsque $(h_1, h_2) \to (\infty, \infty)$,

$$\gamma(0,0) - \frac{2\sigma^2}{1-\rho^2}\left(\frac{\gamma(0,0)}{\sigma^2} - 1 - \rho\right) = \sigma^2 \left(\sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\neq(0,0)}}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}^2\right)^{-1}, \quad (21)$$

on arrive à obtenir des conditions en termes des coefficients $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, ρ nécessaires pour que le prédicteur $\tilde{X}_{\infty,\infty}(0,0) = \lim_{(h_1,h_2)\to(\infty,\infty)} \tilde{X}_{h_1,h_2}(0,0)$ soit optimal.

Théorème (Hamaz, Ibazizen, 2019)
Soit $\{X(i,j); (i,j) \in \mathbb{Z}^2\}$ un champ al. stationnaire au second ordre avec les paramètres MA et AR $\{b_{i,j}; (i,j) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\{a_{i,j}; (i,j) \in \mathbb{Z}^2\}$ et la variance du bruit blanc σ^2. Alors l'interpolateur $\tilde{X}_\infty(0,0)$ est optimal si et ssi

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j}^2 = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\left[\frac{2}{1-\rho} - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}^2\right)^{-1}\right]. \tag{22}$$

Considérons le modèle MSAR(1) (stationary first order multiplicative spatial autoregressive model) défini par

$$X(s,t) = aX(s-1,t) + bX(s,t-1) - a.bX(s-1,t-1) + \epsilon(s,t) \quad (23)$$

où $\{\epsilon(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ sont des v.a. indépendantes avec $E(\epsilon(s,t)) = 0$, $Var(\epsilon(s,t)) = \sigma^2$, $|a| < 1$, $b| < 1$.

Ici on a : $a_{1,0} = a$, $a_{0,1} = b$, $a_{1,1} = -a.b$ et $a_{ij} = 0$ si $(i,j) \notin \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$

D'après les relations (3), les paramètres MA du modèle MSAR(1) sont

$$b_{k,l} = \begin{cases} a^k b^l, & \text{si} \quad k \geq 0, \ l \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad k < 0 \text{ ou } l < 0. \end{cases} \quad (24)$$

Le meilleur prédicteur linéaire de $X(0,0)$ basé sur le passé est une combinaison linéaire de ses observations les plus proches :

$$\hat{X}(0,0) = aX(-1,0) + bX(0,-1) - a.bX(-1,-1). \tag{25}$$

Dans le même sens, le meilleur prédicteur linéaire de $X(0,0)$ basé sur de futures observations est :

$$\hat{X}_{h_1,h_2}(0,0) = \frac{1}{a.b}\left(aX(0,1) + bX(1,0) - X(1,1)\right). \tag{26}$$

Le nouveau prédicteur optimal est :

$$\tilde{X}(0,0) = \alpha\hat{X}(0,0) + \beta\hat{X}_{h_1,h_2}(0,0). \tag{27}$$

Les valeurs α et β qui assurent l'optimalité du prédicteur $\tilde{X}(0,0)$ sont :

$$\alpha = \beta = (1+\rho)^{-1}$$

avec, d'après (19),

$$\begin{aligned}
\rho &= 1 - \left(\tfrac{\gamma(0,0)}{\sigma^2}\right)^{-1} \sum_{\substack{i=0\\(i,j)\neq(0,0)}}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} b_{i,j} \\
&= 1 - \left(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j}^2\right)^{-1} \sum_{\substack{i=0\\(i,j)\neq(0,0)}}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} b_{i,j} \\
&= 1 - \left(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (a^2)^i (b^2)^j\right)^{-1} (a^2+b^2-a^2b^2) \\
&= 1 - \left[(1-a^2)(1-b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)\right].
\end{aligned}$$

La condition (22) de la proposition sur les paramètres a et b conduit à la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{(1-a^2)(1-b^2)} = \frac{1-\left[1-(1-a^2)(1-b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)\right]^2}{1+\left[1-(1-a^2)(1-b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)\right]^2} \times \left\{\frac{2}{(1-a^2)(1-b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)} - \frac{1}{a^2+b^2+a^2b^2}\right\} \tag{28}$$

Les valeurs de a et b solutions de (28) sont obtenues par approximation numérique en utilisant la librairie **rootSolve** de R.

Références

Basu, S., & Reinsel, G. C. (1993). Properties of the spatial unilateral first-order ARMA model. *Advances in applied Probability*, 25(3), 631-648.

Bondon, P. (2002). Prediction with incomplete past of a stationary process. Stochastic processes and their applications, 98(1), 67-76.

Cheng, R., & Pourahmadi, M. (1997). Prediction with incomplete past and interpolation of missing values. Statistics & probability letters, 33(4), 341-346.

Cheng, R. (2015). Prediction of stationary Gaussian random fields with incomplete quarterplane past. Journal of Multivariate Analysis, 139, 245-258.

Hamaz, A. (2018). Prediction of random fields with incomplete quarter-plane past. Communications in Statistics-Theory and Methods, 48(11), 2707-2716.

- Hamaz, A., & Ibazizen, M. (2019). An optimal prediction in stationary random fields based on a new interpolation approach. Communications in Statistics-Simulation and Computation. doi : 10.1080/03610918.2019.1682157.
- Kohli, P., & Pourahmadi, M. (2014). Some prediction problems for stationary random fields with quarter-plane past. Journal of Multivariate Analysis, 127, 112-125.
- Pourahmadi, M. (1989). Estimation and interpolation of missing values of a stationary time series. Journal of Time Series Analysis, 10(2), 149-169.
- Pourahmadi, M. (1992). Alternating projections and interpolation of stationary processes. Journal of applied probability, 29(4), 921-931.