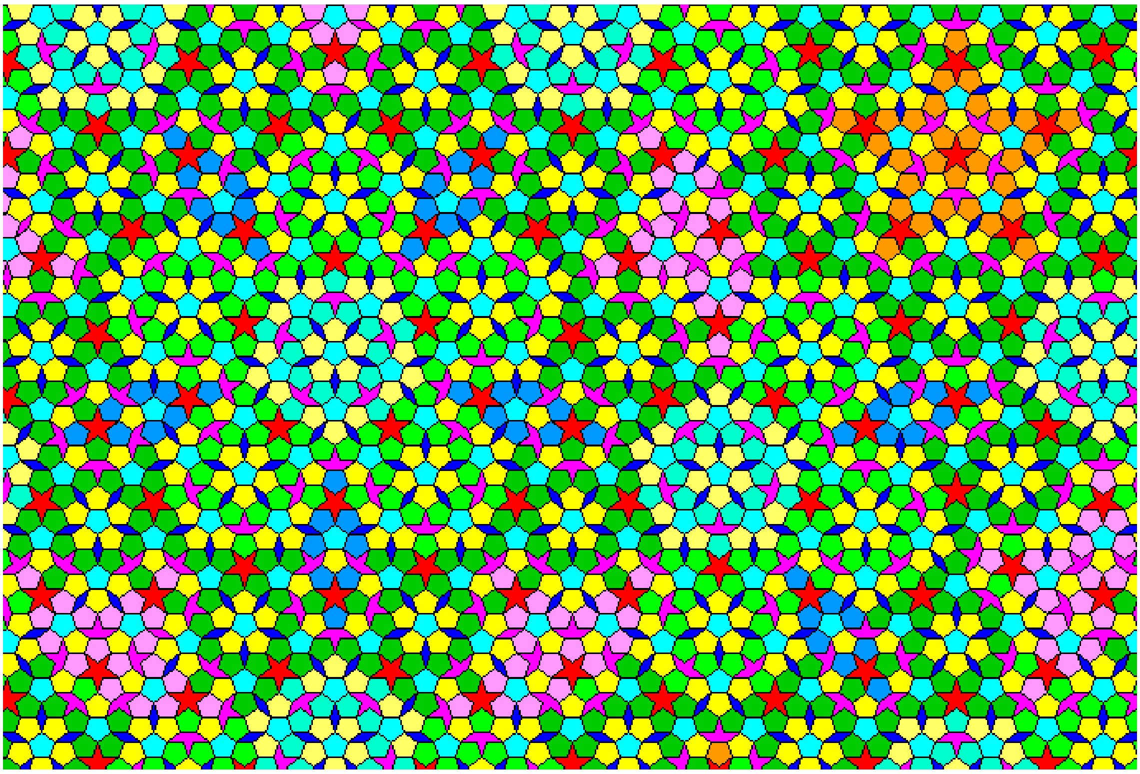
Symmetrien und Pflasterungen



Dies ist die ausformulierte Fassung meines Vortrags *Symmetrien und Pflasterungen* vom 7. Februar 2007 am *Tag der offenen Tür* an der Universität Mainz.

Symmetrien

Jeder von Ihnen hat eine intuitive Vorstellung von *Symmetrie*. In der Natur z.B. haben eine Schneeflocke und auch eine Sonnenblume eine gewisse Symmetrie. Drehen wir die Schneeflocke von einem imaginären Mittelpunkt aus um 60 Grad, dann sieht das Bild genauso wie vorher. Das gleiche gilt für die Sonnenblume. Mathematisch bedeutet das, wir haben eine *Transformation* angewendet, die das Objekt in sich selbt abgebildet hat. Beispiele von solchen Transformationen sind: *Drehungen, Translationen* (Verschiebungen) und *Spiegelungen*. Die Gesamtheit aller Transformationen, die die Schneeflocke (oder die Sonnenblume) auf sich selbst abbilden, heißen *Symmetriegruppe* der Schneeflocke (bzw. der Sonnenblume). Hier haben wir also zwei mathematische Begriffe: einmal der Begriff der *Symmetrie* und einmal der Begriff der *Gruppe*. Diese beiden Begriffe gehen zurück auf die Mathematiker Felix Klein und Èvariste Galois. Felix Klein wurde im 1849 in Düsseldorf geboren und nach seinem Studium der mathematik in Bonn wurde er im Alter von 23 Jahren Professor zuerst in Erlangen und anschließend in Göttingen. In seinem bekannten *Erlanger Programm* (anlässlich seiner Antrittsvorlesung in Erlangen) vom Jahr 1872 schlägt er eine neue Betrachtung der Geometrie vor, indem er sie als *die Gesamtheit der Eigenschaften* beschreibt, *welche sich bei den Transformationen einer bestimmten Gruppe nicht ändern*. Um also Geometrie zu betreiben, braucht man nicht nur Objekte sondern auch Transformationen. Insbesondere in dieser Idee von Klein findet man den Begriff der Symmetrie und der Transformation. Diese beiden Begriffen werden zusammengefasst in dem Begriff der Gruppe.
Der Begriff der Gruppe wurde bereits 50 Jahre vor dem Erlanger Programm von dem französischen Mathematiker Èvariste Galois entwickelt, als er die Lösungen von Polynomialgleichungen studierte. Galois lebte in einer unruhigen Zeit und führte ein kurzes, abenteuerliches Leben. 1832 wurde er bei einem Duell lebensgefährlich verletzt und starb im Alter von 21 Jahren. Seine mathematischen Entdeckungen gerieten für lange Zeit im Vergessenhait und ihre weitreichende Bedeutung wurde erst viel später verstanden.
Wir wollen uns nun klar machen, was eine Gruppe ist und insbesondere die Gruppe der Transformationen der Ebene betrachten.

Gruppen

Betrachten wir einen Kreis K. Die Transformationen, die K invariant lassen, sind
1) Drehungen um einen beliebigen Winkel (K hat Drehsymmetrie).
2) Spiegelungen um einen beliebigen Durchmesser (K hat Spiegelsymmetrie).
Dann ist die *Symmetriegruppe* des Kreises die Gesamtheit aller Transformationen, die man durch Kombinieren von 1) und 2) bekommt.
Betrachten wir die Eigenschaften dieser Symmetriegruppe näher (wir werden auch gleich verstehen, warum sie Gruppe heisst): Sei D eine Drehung und S eine Spiegelung des Kreises. Wir schreiben $D(P) = Q$, als Notation, dass nach der Drehung D der Punkt P nach Q gewandert ist. Für eine Spiegelung schreiben wir $S(P) = P'$. Wenn wir jetzt zuerst D dann S anwenden, bekommen wir eine neue Transformation des Kreises und wir schreiben:

$$(S \circ D)(P) = S(D(P)) = S(Q) = Q'$$

Diese Operation heißt *Komposition* und hat viele Eigenschaften:
1) Sie ist *assoziativ*: Sei W eine weitere Transformation, dann $(S \circ D) \circ W = S \circ (D \circ W)$ (d.h es ergibt sich das gleiche Ergebnis, wenn man zuerst W und dann $S \circ D$ ausführt oder zuerst $(D \circ W)$ und dann S).
2) Diese Operation hat ein *neutrales Element*, d.h. ein Element, das nichts verändert, z. B. die Nulldrehung. Man bezeichnet es mit I, dann gilt für jede Transformation D: $D \circ I = I \circ D = D$.
3) Jede Transformation hat eine *Inverse*, wenn man z. B. die Drehung D anwendet, kann man auch dann zurückkommen, wenn man in der anderen Richtung dreht. Diese Transformation heißt D^{-1} und es gilt offensichtlich:

$$D^{-1} \circ D = D \circ D^{-1} = I$$

Diese drei Eigenschaften hat auch $(\mathbb{Z}, +)$ aber nicht $(\mathbb{Z}, \cdot)$; 1) und 2) gelten noch aber nur 1 und -1 haben eine Inverse bezüglich der Multiplikation, also gilt 3) nicht mehr. Wir können jetzt die genaue Definition von Mengen formulieren, die die Eigenschaften 1), 2) und 3) haben.
Eine *Gruppe* ist eine nicht-leere Menge mit einer Operation $*$, mit den folgenden Eigenschaften:

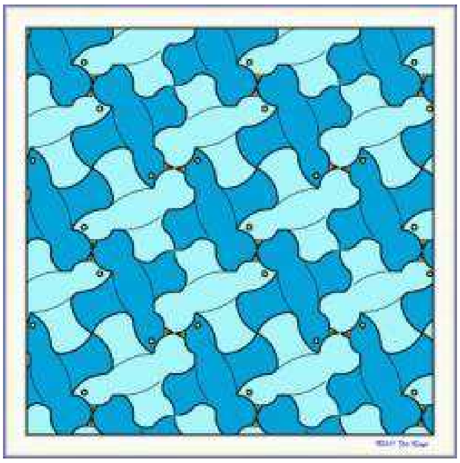
- Für $x, y, z \in G$ gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$ (Assoziativität).
- Es gibt ein Element e in G mit $e * x = x * e = x$ für alle x in G (neutrales Element).
- Zu jedem Element x aus G gibt es ein Element y mit $x * y = y * x = e$ (inverses Element zu x).

Diese Beschreibung ist sehr wichtig, denn wir können Eigenschaften zeigen, die für alle Gruppen wahr sind, und wir brauchen nicht mehr zu unterscheiden, ob wir an die Symmetriegruppe eines Kreises oder ob wir an $(\mathbb{Z}, +)$ denken. Zum Beispiel kann man zeigen, dass das neutrale Element sowie die Inverse eines Elements eindeutig ist.
Betrachten wir jetzt die Transformationen der euklidischen Ebenen. Solche Transformationen lassen Abstände, Winkel, Flächen invariant und sind:
1) Translationen,
2) Drehungen,
3) Spiegelungen,
4) Gleitspiegelungen (das ist eine Spiegelung gefolgt von einer Translation in Richtung der Spiegelachse).
Diese Transformationen bilden eine Gruppe und sind sehr wichtig, z.B. wenn wir die Symmetriegruppe von Pflasterungen untersuchen.

Pflasterungen
Jeder von Ihnen kennt Pflasterungen, z.B. Wege im Garten sind gepflastert, Fußboden in Wohnungen (z.B. im Badezimmer), in der Kunst gibt es Pflasterungen (z.B. in dem schönen Bild von dem holländischen Künstler M.C. Escher (1898-1972)), usw.

Nehmen wir eine einfache Pflasterung, z.B. eine Pflasterung wie man sie oft in Badezimmern oder in Schwimmbäder finden kann, d.h. eine Pflasterung mit regulären Sechsecken, und untersuchen wir ihre Symmetrien, d.h die Transformationen der Ebene, die sie auf sich selbst abbilden. Es gibt Translationen in verschiedene Richtungen, die einen Stein auf einem anderen Stein abbilden, und ihre Komposition ist auch eine Symmetrie der Pflasterung. Nennen wir jetzt die obige Pflasterung τ, dann schreiben wir $S(\tau)$ für die Menge aller Symmetrien. Wenn man die Eigenschaften der Komposition studiert, dann entdeckt man, dass $S(\tau)$ mit der Komposition eine Gruppe bildet (genauer gesagt ist sie eine Untergruppe der Gruppe der Transformationen der euklidischen Ebene).
Wir haben gerade eine Pflasterung mit regulären Sechsecken gesehen. Die Ebene kann man auch mit regulären Dreiecken und Vierecken pflastern (allerdings nicht mit Fünfecken und mit anderen regulären Polygonen). Es gibt einige natürliche Fragen die vorkommen:
1) Wieviele Möglichkeiten gibt es, um eine Ebene zu pflastern?
2) Mit welchen Steinen?
2) Welche sind die Symmetriegruppen, die dabei auftreten können?
Die Antwort zu 1) ist natürlich unendlich, aber wir wollen die Frage genauer formulieren. Was wir oft in unserer Umgebung sehen, sind reguläre Pflasterungen wie τ, die Pflasterung mit den Sechsecken.
So definieren wir: Eine *Pflasterung* oder *Parkettierung* ist eine Überdeckung der euklidischen Ebene mit *Parkettsteinen* (oder einfach *Steine*), die sich nicht überlappen (z.B. τ ist eine Pflasterung). Eine *Symmetrie* der Parkettierung (ich werde ab jetzt beide Wörter benutzen) ist eine Transformation der euklidischen Ebene, die das Parkett auf sich selbst abbildet.
Ein Parkett heißt *regulär*, falls die Steine alle gleich sind, und es für jedes Paar von

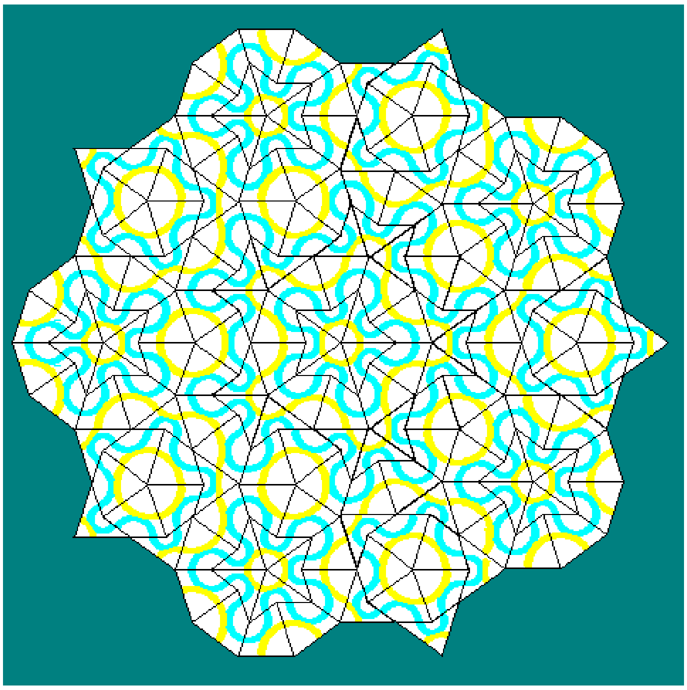
Parkettsteinen eine Transformation gibt, die einen Stein auf den anderen abbildet. Bei einer genauen Untersuchung stellt sich heraus, dass die Symmetriegruppe einer solchen Parkettierung immer Translationen in zwei Richtungen enthält. Wenn man alle solche Gruppen studiert, dann findet man, dass die möglichen Symmetriegruppen nur 17 sind. In diesem Sinn gibt es nur 17 verschiedene mögliche reguläre Parkettierungen der Ebene.
Man kann statt Parkettierungen *Tapetenmuster* betrachten, d.h. wir nehmen ein Muster aus einem Bereich (z.B aus einem Stein einer regulären Parkettierung) und wiederholen das Muster um die ganze Ebene auszufüllen. Die möglichen Symmetriegruppen sind wieder die gleichen 17 wie vorher und zu jeder dieser Gruppe gibt es ein Muster. Man kann 13 von diesen Mustern in der muslimischen Alhambra-Zitadelle (13-14 Jahrhundert) in Granada in Spanien sehen. Da in der muslimischen Kunst keine lebenden Wesen dargestellt werden können, würde die Zitadelle mit sehr komplizierten und schönen Mustern verziert, und man findet darunter die 13 erwähnten Muster.
Ähnliche Muster findet man auch in der Kunst z.B. bei dem holländischen Künstler M.C. Escher:



wieder gibt es ein Muster, das sich wiederholt. Die Idee hier ist, Steine zu betrachten, die die Ebene regulär parkettieren. Indem man die Form der Steine verändert entstehen diese faszinierenden Bilder.
Kehren wir aber zurück zu Parkettierungen. Wir haben Parkettierungen nur mit einem Stein gesehen, aber natürlich kann man Parkettierungen mit mehreren Steine betrachten. Wenn ein bestimmtes Muster sich wiederholt, sprechen wir von *periodischen Parkettierungen*. In diesem Fall enthält die Symmetriegruppe Translationen in zwei verschiedene Richtungen und die Parkettierung ist translationsinvariant, d.h. es gibt eine Translation, die einen Bereich zu einem anderen Bereich führt. Wieder gibt es nur 17 mögliche Symmetriegruppen (die gleichen wie vorher). Wenn es in der Symmetriegruppe keine Translationen gibt, dann haben wir eine *aperiodische Parkettierung*.

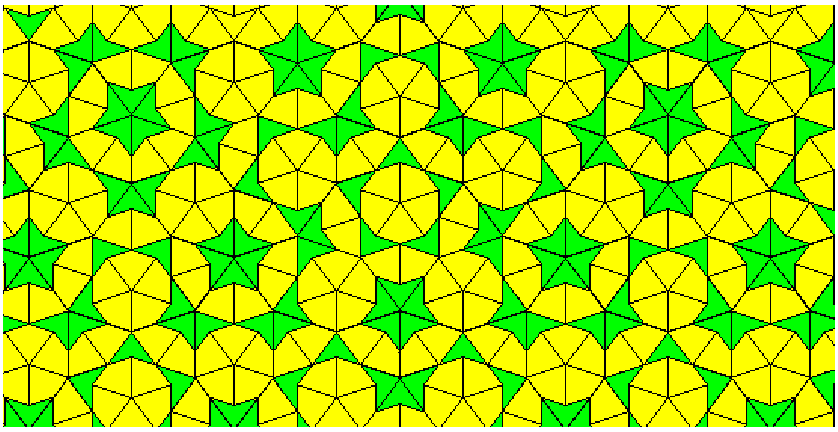
Aperiodische Parkettierungen

Das Problem der aperiodischen Parkettierungen ist relativ jung. Die Mathematiker haben für lange Zeit gedacht, dass keine Steine existieren, die die Ebene nur aperiodisch parkettieren können. In den 60-er Jahren stellte sich heraus, dass diese Idee falsch war. Die ersten aperiodischen Parkettierungen enthielten sehr viele Steine (etwa 20.000!), dann wurde diese Anzahl reduziert. Im Jahr 1973 fand der englische Mathematiker und Physiker Roger Penrose (er ist bekannt für seine Ergebnisse in der Relativitätstheorie und der Quantummechanik) eine Menge von sechs Steine, die er später zu vier Steinen reduzierte (das Bild auf der Titelseite ist eine Penrose-Pflasterung mit vier Steinen). Später im Jahr 1974 entdeckte er zwei Steine, mit denen man die Ebene aperiodisch parkettieren kann, die sogenannten *Kite (=Drache)* und *Dart (=Pfeil)*. Man bekommt sie, in dem man die lange Diagonale einer Raute im Verhältnis $\phi : 1$ zerlegt, mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (der *goldene Schnitt*). Verbindet man den Punkt, der dadurch entsteht, mit dem stumpfen Winkel der Raute (wie im Bild) so bekommt man die Steine von Penrose: Drache und Pfeil. Um eine aperiodische Pflasterung zu bekommen, darf man Drache und Pfeil nicht so nebeneinander legen, dass sie die Raute wiedergeben (sie pflastert die Ebene natürlich periodisch) aber es gibt andere Regeln. Malt man Kreisbögen von verschiedenen Farben auf dem Drachen und auf dem Pfeil, die die Seiten im Verhältnis $\phi : 1$ zerlegen, (wie im Bild), dann darf man die Steine so nebeneinander legen, dass die Bögen gleicher Farbe fortgesetzt werden, so bekommt man ein Muster von Penrose und hier sehen wir ein Beispiel der Stern-Pflasterung.

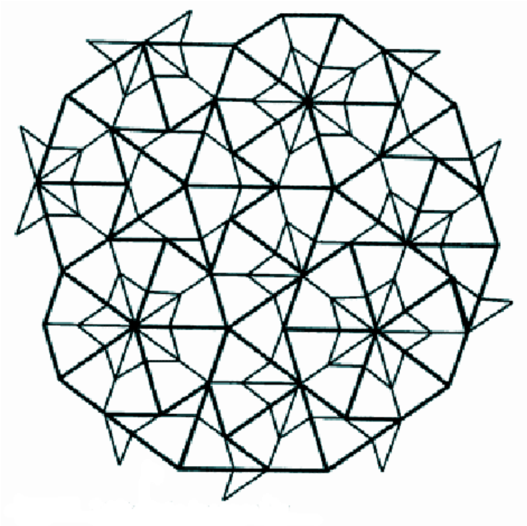


Die Penrose Pflasterungen sind unendlich viele (unabzählbar viele, also sind sie genauso viele wie die reellen Zahlen) und haben viele interessante und erstaunliche Eigenschaften:

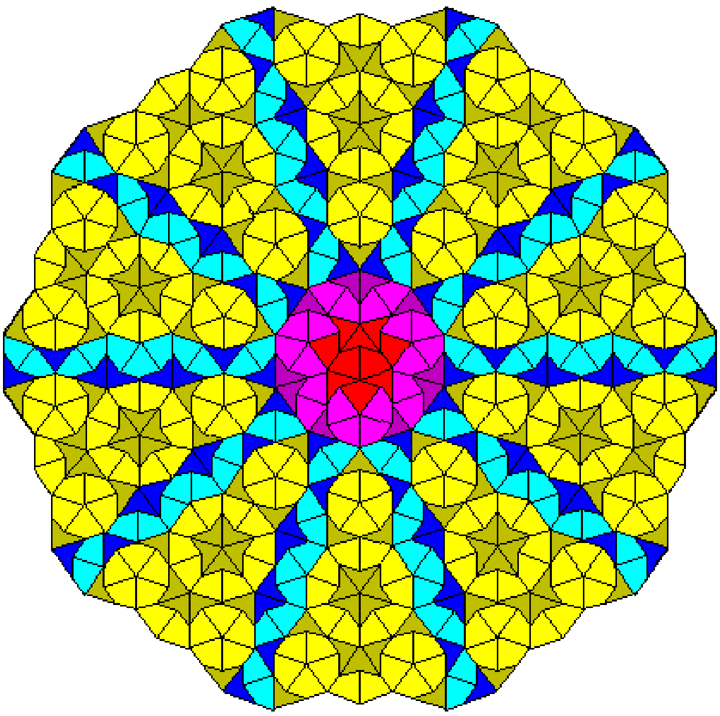
1) Jeder Bereich einer Pflasterung ist in jeder anderen Pflasterung unendlich viele Male enthalten.
2) Keine besondere Kombination von Steinen erzwingt, dass es sich um eine bestimmte Pflasterung handelt.
3) Einen kreisformigen Bereich vom Durchmesser d kann man spätestens nach einem Abstand $2d$ wiederfinden.
Im Bild können Sie sich von der letzten Eigenschaft überzeugen.



Wenn man Penrose-Pflasterungen näher studiert, entdeckt man, wenn man der Regel folgt und man die möglichen Winkeln untersucht, dass es nur sieben Möglichkeiten gibt, um um einer Ecke Drache und Pfeil zu kombinieren. Da die Drachenschwänzen 72 Grad haben und die Pfeilspitzen auch 72 Grad betragen, passen fünf Drachen oder fünf Pfeile um eine Ecke (die Regeln sind auch erfüllt) und so bekommen wir die Sonne (fünf Drachen) und den Stern (fünf Pfeile). Dann gibt es andere mögliche Kombinationen der Winkel (unter der Bedingung, dass die Regeln von Penrose erfüllt werden): man bekommt das Ass (zwei Drachen und ein Pfeil), den Teufel (zwei Pfeile und zwei Drachen), den Bube (drei Drachen und zwei Pfeile), die Königin (vier Drachen und ein Pfeil), den König (zwei Drachen und drei Pfeile). Durch Kombinationen dieser Figuren kann man die Ebene aperiodisch (und nur aperiodisch, wenn man die Regeln folgt) parkettieren.
Man hat untersucht, welche Parkettierungen möglich sind, wenn man mit einer diesen Figuren anfängt. Keine von Ihnen erzwingt eine besondere Parkettierung, aber wenn man pentagonale Symmetrie erreichen will (d.h. die Parkettierung ist invariant für Drehungen um 72 Grad) dann gibt es für die Sonne und den Stern jeweils nur eine Möglichkeit, die sogenannten Sonne- und Stern-Pflasterung. Diese zwei Pflasterungen haben eine weitere schöne Eigenschaft: man kann von einer zur anderen durch die Methode der *Inflation* und *Deflation* gehen. Diese Methode besteht daraus, aus kleineren Drachen und Pfeilen grössere zu basteln (Inflation) und umgekehrt (Deflation). Im Bild sehen wir es für die Sonne- und Stern-Pflasterung.



Dieses Verfahren erlaubt auch, aus einer Pflasterung weitere Pflasterungen zu erhalten, und da man es unendlich oft anwenden kann, zeigt sich wieder die Eigenschaft, dass die Penrose Pflasterungen unendlich viele sind und unabzählbar.
Eine andere besonders schöne Penrose-Pflasterung ist *das Rad*:



In der Mitte haben wir (rotmarkiert) ein 10-Eck, das eine Figur enthält: die Fledermaus (fünf Drachen und fünf Pfeile). Ausserhalb des roten Bereichs und der Speichen, hat die Pflasterung eine perfekte 10-fache Symmetrie.

Hoffentlich habe ich Sie überzeugen können, dass die Penrose-Pflasterungen und allgemein aperiodische Pflasterungen ein sehr spannendes Thema der Mathematik sind. Es gibt noch heute viele offene Fragen darüber, z.B.:
1) Kann man nur mit einem Stein die Ebene aperiodisch parkettieren?
2) Gibt es Steine, mit denen man die Ebene parkettieren kann und die mit anderen irrationalen Zahlen zu tun haben?
Die erste Frage ist noch ohne Antwort. Bei der zweiten Frage hat der Mathematiker Ammann im Jahr 1977 Pflasterungen mit Steinen gefunden, die mit der Zahl $\sqrt{2}$ zu tun haben, aber es ist nicht klar, welche anderen irrationalen Zahlen möglich sind.
Ich werde hier mit einer lustigen Pflasterung von Penrose schließen. Wir haben schon die schönen Bilder von Escher gesehen, die er durch Deformation von Steinen von periodischen Pflasterungen bekommt. Leider ist Escher im Jahr 1972 gestorben, bevor Penrose seine Steine entdeckte, sonst hätte er bestimmt schöne Bilder mit diesen Steinen produziert. Penrose ist der Idee von Escher gefolgt und durch Deformationen hat er besonders schöne Pflasterungen bekommen z.B. seine *aperiodischen Hühner* sind deformierte Pfeilen und Drachen!

Literatur

[BW] H.-G. Bigalke, H. Wippermann, *Reguläre Parkettierungen*, Wissenschaftsverlag 1994.

[D] K. Devlin, *Muster der Mathematik*, Spektrum Akademischer Verlag 1994.

[G] M. Gardner, *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Mathematical Games, Scientific American Vol. 236, Januar 1977, pp. 110–121.

[GS] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, W.H. Freemann and Company New York 1987.

[MSW] D. Mumford, C. Series, D. Wright, *Indra's Pearls, the vision of Felix Klein*, Cambridge University Press 2002.

[S] M. Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press 1995.