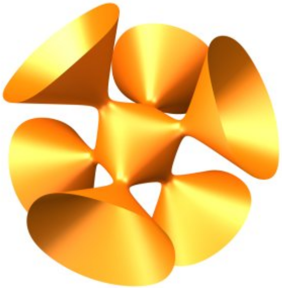
Les surfaces K3 et leurs groupes de symétries

Alessandra Sarti

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Poitiers

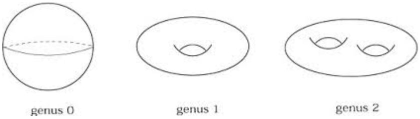


La place des surfaces K3 dans la classification des surfaces projectives

- Problème important en géométrie algébrique : classifier
- Ici : classification des surfaces projectives complexes, en particulier nous allons étudier les surfaces K3.

Courbes

Les courbes projectives complexes sont classifiées par leur genre :



- $g = 0$: courbes rationnelles
- $g = 1$: courbes elliptiques
- $g \geq 2$: courbes de type général

Courbes elliptiques

Ces sont les quotients $E = \mathbb{C}/\Lambda$, où Λ est un réseau (=$\mathbb{Z}$-module libre) de rang 2 :

Elles sont toutes projectives : $E \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec équation (dans une carte affine) :

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

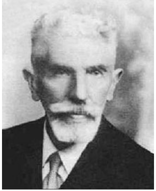
Formes différentielles

- Ω^1_E : fibré vectoriel des 1-formes holomorphes sur E.
- $\Gamma(E, \Omega^1_E) = \mathbb{C}\, dz$, z coordonnée sur $\mathbb{C}$. Il y a seulement une 1-forme holomorphe globale sans zéros.
- Nous verrons : les surfaces K3 sont une généralisation en dimension 2 des courbes elliptiques.

Surfaces projectives complexes

- Variétés complexes de dimension 2 : $S \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.
- Classification d'Enriques–Castelnuovo–Kodaira (début 20ème siècle).

F. Enriques



G. Castelnuovo

K. Kodaira

- On utilise la dimension de Kodaira.

Dimension de Kodaira : le cas des courbes

Le genre d'une courbe est la dimension de l'espaces de 1-formes holomorphes
$$g = \dim \Gamma(C, \Omega^1_C).$$

Exemple : Si $C = \mathbb{P}^1$ alors $\dim \Gamma(C, \Omega^1_C) = 0$.

Si on prend une base de $\Gamma(C, \Omega^1_C)$ on peut associer une application (rationnelle) :
$$C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C}).$$

La dimension de l'image est la dimension de Kodaira$=\kappa(C)$ de la courbe, clairement $\kappa(C) \leq 1$:

- $g(C) = 0$, on pose $\kappa = -\infty$;
- $g(C) = 1$, alors $\kappa = 0$.
- $g(C) \geq 2$, alors $\kappa = 1$.

Dimension de Kodaira : le cas des surfaces

Les plurigenres sont les dimensions de l'espace des sections globales du n-ième produit tensoriel du fibré des 2-formes holomorphes

$$p_n := \dim \Gamma(S, (\Omega_S^2)^{\otimes n}).$$

De la même façon que pour les courbes on peut associer une application (rationnelle)

$$\varphi_n : S \longrightarrow \mathbb{P}^{p_n - 1}(\mathbb{C})$$

$$\text{dimension de Kodaira} = \max_n \{\dim(\varphi_n(S))\} = \kappa(S).$$

Clairement $\kappa(S) \leq 2$.

Les 4 familles de surfaces

- $\kappa(S) = -\infty$: Surfaces réglées ($C \times \mathbb{P}^1$) et surfaces rationnelles ($\mathbb{P}^2$, une surface quadrique de $\mathbb{P}^3$ et une cubique de $\mathbb{P}^3$,...)

- $\kappa(S) = 0$: Surfaces abéliennes ($\mathbb{C}^2/\Lambda$), surfaces K3, surfaces d'Enriques (quotients des K3 par des involutions) et surfaces bielliptiques (certains quotients finis de produits de deux courbes elliptiques).

- $\kappa(S) = 1$: Surfaces elliptiques (certaines fibrations elliptiques)

- $\kappa(S) = 2$: Surfaces de type général. Par exemple

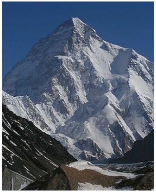
$$\{f_d(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C}),$$

  f_d polynôme homogène de degré $d \geq 5$.

André Weil

Le nom de surfaces K3 est dû à André Weil (1958, report sur les contrat AF 18(603)-57) : *Dans la seconde partie de mon rapport, il s'agit des variétés kählériennes dites K3, ainsi nommées en l'honneur de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire.*

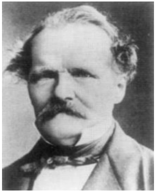
André Weil (1906-1998)



montagne K2, 8611m
1ère ascension en 1954

Kummer, Kähler, Kodaira

Le nom $K3$ est en l'honneur de trois mathématiciens célèbres :



E. Kummer

E. Kähler

K. Kodaira

Le Broad Peak au Cachemire

- Il existe une montagne K3 au Cachemire ainsi nommée en 1856. Elle est appelée aussi Broad Peak, la 12ème plus haute montagne au monde, 8047m.

- La première ascension fut seulement en 1957 (en même temps que le rapport scientifique de André Weil)

La montagne K3

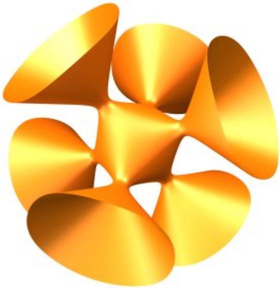
Surfaces K3 projectives : les quartiques

$$S = \{f_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C}), \qquad \deg f_4(\underline{x}) = 4, \text{ homogène.}$$

S est supposée lisse : les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_4(\underline{x})}{\partial x_i}, \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

n'ont pas de zéro commun.



$$1 + x^4 + y^4 + z^4 + a(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0, \quad a = -0.49$$

Autres surfaces K3 projectives

Pour chaque $N \geq 3$ il existe une surface K3 de degré $2N-2$:

$$S_{2N-2} \subset \mathbb{P}^N.$$

Un hyperplan de $\mathbb{P}^N$ intersecte la surface S_{2N-2} en une courbe de degré $2N-2$.

- $N = 3$: les quartiques.
- $N = 4$: l'intersection d'une hyperquadrique Q_2 et d'une hypercubique C_3 est une surface K3 :

$$S_6 = Q_2 \cap C_3 \subset \mathbb{P}^4.$$

- $N = 5$: l'intersection de trois hyperquadriques Q_2^i, $i = 1, 2, 3$ est une surface K3 :

$$S_8 = Q_2^1 \cap Q_2^2 \cap Q_2^3 \subset \mathbb{P}^5.$$

Les surfaces de Kummer : lien entre les surfaces abéliennes et les surfaces K3

- $A = \mathbb{C}^2/\Lambda$, surface abélienne, Λ réseau de rang 4
- $\iota : A \longrightarrow A$, involution : $(x, y) \mapsto (-x, -y)$
- Les points fixes sont les points $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, tels que $2(x, y) \in \Lambda$
- Leur nombre est 16 : on le voit facilement dans le cas

$$A = E \times E, \quad E = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{C},\ \mathrm{im}(\tau) > 0.$$

  - Les points d'ordre 2 sur E sont :

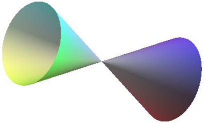
$$p_0 = 0,\ p_1 = \tau/2,\ p_2 = 1/2,\ p_3 = 1/2 + \tau/2.$$

  - Sur A les 16 points (p_i, p_j) sont d'ordre 2.

Le quotient

- Le quotient $A/\langle\iota\rangle$ a 16 singularités de type A_1.
- Localement l'équation d'une telle singularité est

$$\{z_0 z_1 - z_2^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$



Une singularité A_1

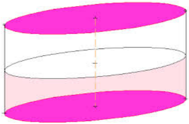
La résolution minimale

A travers le procédé de résolution minimale on remplace sur la surface $Y = A/\langle \iota \rangle$ les singularités A_1 par 16 courbes isomorphes à $\mathbb{P}^1$:

16 courbes rationnelles.

La surface S qu'on obtient est une surface de Kummer, $S = \mathrm{Km}(A)$, qui est une surface K3.

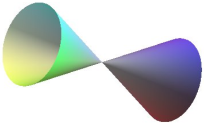
S



$\downarrow \qquad \downarrow$

La résolution
d'une singularité A_1

Y



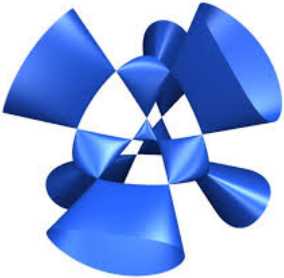
Lien avec les quartiques

Toute surface de Kummer (singulière) est isomorphe à une quartique :

$$A(x^4+y^4+z^4+w^4)+2B(x^2w^2+y^2z^2)+2C(x^2z^2+y^2w^2)$$
$$+2D(x^2y^2+z^2w^2)+4Exyzw=0, \qquad A,B,C,D,E\in\mathbb{C}$$

où

$$A(A^2+E^2-B^2-C^2-D^2)+2BCD=0$$



Une surface de Kummer

La définition

- Une surface K3 projective S est une varieté compacte, complexe, lisse de dimension deux dans un espace projectif, telle que :
  - elle est simplement connexe
  - il y a seulement une 2-forme holomorphe globale sans zéros, $\Gamma(S, \Omega_S^2) \cong \mathbb{C}\omega_S$
  - on appelle ω_S la période de S.
- Localement : $\omega_S = f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$, avec z_1, z_2 coordonnées locales de la variété complexe S, f holomorphe.

Propriétés

- En tant que variétés différentielles (réelles) les surfaces K3 sont toutes difféomorphes.
- Ce qui change sur les surfaces K3 c'est la structure complexe.

Les courbes elliptiques

Elles sont toutes difféomorphes :

Les structures complexes sont paramétrées par un espace de dimension 1 :

$$E = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{C}, \ \ \mathrm{im}(\tau) > 0.$$

La structure complexe

- On considère le fibré tangent réel à la variété : $T_{S,\mathbb{R}}$
- La structure complexe induit une anti-involution

$$I : T_{S,\mathbb{R}} \longrightarrow T_{S,\mathbb{R}}$$

telle que $I^2 = -id$ (c'est la multiplication complexe).

- Modifier la structure complexe de S revient à changer l'anti-involution I.
- Les structures complexes sont paramétrées par un espace de dimension 20, qui est la dimension de l'espace des modules des surfaces K3.

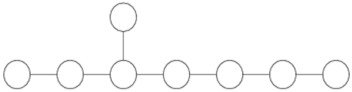
Le réseau K3

Le groupe de cohomologie $H^2(S, \mathbb{Z})$ a la structure d'un réseau de rang 22 et signature $(3, 19)$.
Il est isométrique a

$$U \oplus U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8 := \Lambda_{K3}, \quad \text{“le réseau K3”}$$

$$U = \left(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

E_8 est l'unique réseau pair, unimodulaire de rang 8 associé au système de racines E_8 :



Le diagramme de Dynkin de E_8

La surjectivité de l'application des périodes

- S une surface K3, $\Gamma(S, \Omega^2_S) = \mathbb{C}\omega_S$. Alors

$$[\omega_S] \in \{[q] \in \mathbb{P}(\Lambda_{K3} \otimes \mathbb{C}) \mid \langle q, q \rangle = 0, \quad \langle q, \bar{q} \rangle > 0\} = \mathcal{D}$$

  où $\langle -, - \rangle$ est l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de la forme bilinéaire sur Λ_{K3}.
- Inversement : à une classe $[q] \in \mathcal{D}$ on peut associer une surface $K3$ (surjectivité de l'application des périodes).
- $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble ouvert (pour la topologie usuelle) de la quadrique de $\mathbb{P}^{21}(\mathbb{C})$:

$$\langle q, q \rangle = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - \ldots - q_{21}^2 = 0$$

- $\dim \mathcal{D} = 20$ et il paramètre l'espace des modules des surfaces K3.

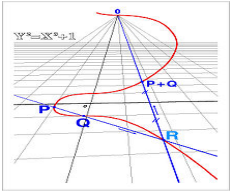
Le théorème de Torelli

- Deux surfaces K3, S_1 et S_2 sont biholomorphes si et seulement s'il existe une isométrie
$$f : H^2(S_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S_2, \mathbb{Z})$$
qui est une isométrie de Hodge effective.
- Une fois fixée f alors l'isomorphisme entre S_1 et S_2 est unique.
- Application du Thèoreme de Torelli : étude du groupe d'automorphismes d'une surface K3

Ruggiero Torelli (1884-1915), troisième depuis la gauche

Les automorphismes des courbes elliptiques

- Nous avons une loi de groupe sur les courbes elliptiques



- La translation par les points d'ordre fini détermine des automorphismes d'ordre fini des courbes elliptiques.
  Exemple : si $p \in E$ est d'ordre 2 alors on a l'involution :
$$E \longrightarrow E,\ z \mapsto z + p$$
- La 1-forme dz est invariante par translation.

La multiplication complexe

- Toute courbe elliptique E admet une involution ι (qui n'est pas une translation) :

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B, \qquad \iota : y \mapsto -y, \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

- Certaines courbes elliptiques admettent un groupe d'automorphismes d'ordre 4 ou 6 : elles admettent une multiplication complexe.
  Exemple : $E_{\mathrm{i}} : y^2 = x^3 + x, \qquad \sigma_{\mathrm{i}} : (x, y) \mapsto (-x, \mathrm{i}y)$.
  La 1-forme n'est pas invariante par un tel automorphisme :

$$\sigma_{\mathrm{i}}^* \left(\frac{dy}{-3x^2 - 1} \right) = \mathrm{i} \frac{dy}{-3x^2 - 1}$$

- $E_{\mathrm{i}} = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathrm{i}\mathbb{Z}$, la multiplication par i préserve le réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Revenons aux surfaces K3 projectives ...

- Au contraire d'une courbe elliptique une surface K3 générique n'a pas d'automorphismes non-triviaux.

- Un automorphisme d'une surface K3 $f : S \longrightarrow S$ est dit
  - symplectique si $f^*(\omega_S) = \omega_S$
  - non-symplectique si $f^*(\omega_S) = \lambda\omega_S$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$

- Les premiers travaux sur le groupe d'automorphismes d'une surface K3 sont dus à V.V. Nikulin dans les années 80.
- D'après un travail de S. Kondo (1999) si $\mathrm{Aut}(S)$ est fini alors

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leq 3840.$$

- Le maximum est atteint si $S = \mathrm{Km}(E_\mathrm{i} \times E_\mathrm{i})$ où $E_\mathrm{i} = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathrm{i}\mathbb{Z}$ est la courbe elliptique qui admet un automorphisme d'ordre 4 (le multiplication par i).

V.V. Nikulin

S. Kondo

Exemple : une involution symplectique

- Considérons l'involution :

$$\iota : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3, \qquad (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (-x_0 : -x_1 : x_2 : x_3)$$

- La surface K3 de Fermat :

$$S : x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$$

  est ι-invariante

- La 2-forme dans la carte $x_3 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ est

$$\frac{dx_0 \wedge dx_1}{4x_2^3}$$

  qui est ι^*-invariante.

- $\iota : S \longrightarrow S$ est une involution symplectique.

Une involution non-symplectique

- Considérons l'involution :

$$j : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3, \qquad (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (-x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$$

- La surface K3 de Fermat :

$$S : x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$$

  est j-invariante
- La 2-forme dans la carte $x_3 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ est

$$\frac{dx_0 \wedge dx_1}{4x_2^3}$$

  qui est multipliée par -1.
- $j : S \longrightarrow S$ est une involution non-symplectique.

Le sous-réseau invariant

- Si $\iota : S \longrightarrow S$ est une involution symplectique nous avons :
  - $H^2(S,\mathbb{Z})^{\iota^*} = U \oplus U \oplus U \oplus E_8(2)$, le sous-réseau invariant
  - $(H^2(S,\mathbb{Z})^{\iota^*})^{\perp} = E_8(2)$, le sous-réseau anti-invariant

  $E_8(2)$ est le réseau E_8 avec forme bilinéaire multipliée par 2.

- V.V. Nikulin (1980) : ces deux réseaux ne dépendent pas de l'involution symplectique ι ni de la surface K3

Théorème (van Geemen–Sarti 2007)

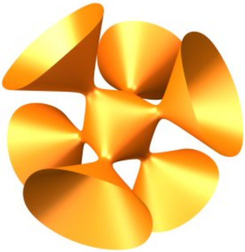
Soit

$$\Gamma =< 2d > \oplus E_8(2).$$

un sous-réseau de rang 9 de Λ_{K3}, $d \geq 1$. Pour tout

$$[\omega] \in \{[q] \in \mathbb{P}(\Gamma^\perp \otimes \mathbb{C}) \mid \langle q, q \rangle = 0, \quad \langle q, \bar{q} \rangle > 0\}$$

il existe une surface K3 projective de période ω et elle admet une involution symplectique.



$$1 + x^4 + y^4 + z^4 + a(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0, \quad a = -0.49$$