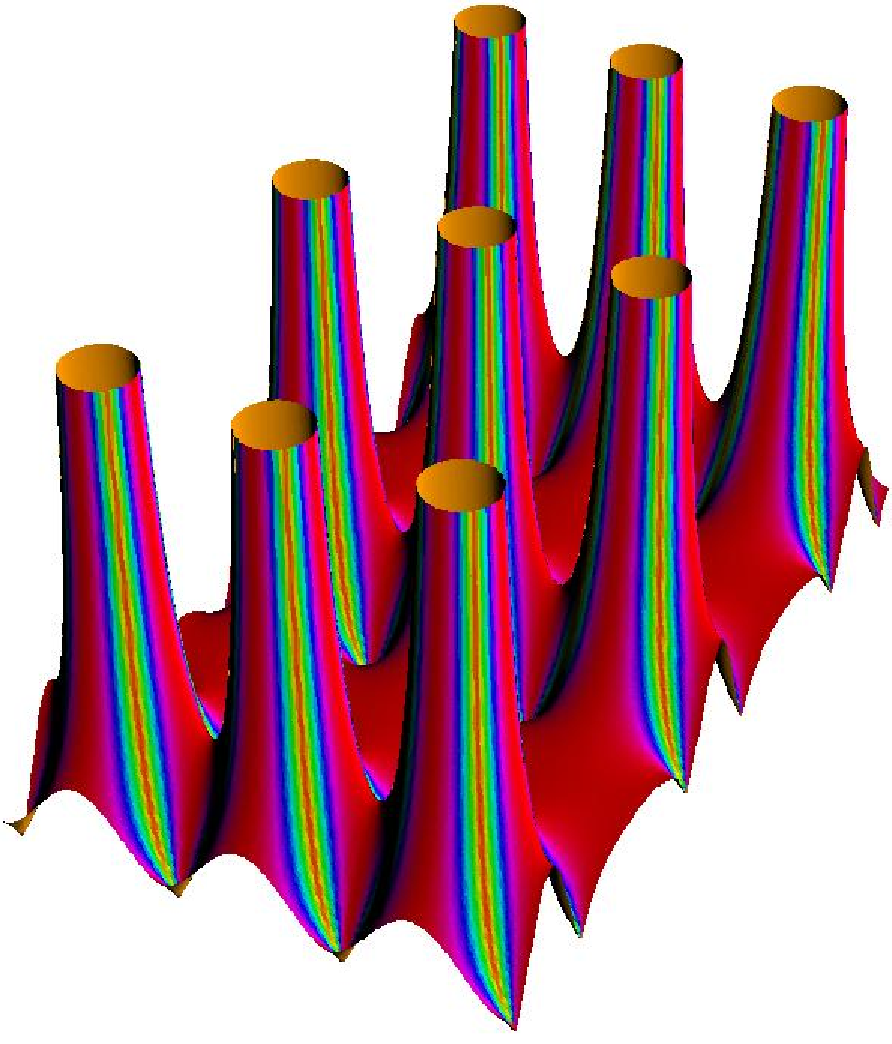
Michèle Audin



ANALYSE COMPLEXE

Michèle Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail : `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr`
Url : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`

Mots clefs. fonction holomorphe, fonction analytique, exponentielle, logarithme, théorème de Cauchy, principe du maximum, théorème de Liouville, indice, singularités, fonctions méromorphes, fonction $\wp$ de Weierstrass, produit infini, théorème des résidus, fonction zêta de Riemann, théorème des nombres premiers.

La figure de couverture représente la fonction $\wp$ de Weierstrass et a été dessinée par Olivier Elchinger.
10 mai 2011

ANALYSE COMPLEXE

Michèle Audin

Résumé. Ces notes de cours sont une introduction à l'analyse complexe, avec cent quatre-vingt-onze exercices et vingt-cinq figures. On y établit, pour les fonctions d'une variable complexe, l'équivalence entre holomorphie et analyticité (Cauchy, Morera). On y discute de la question du logarithme et plus généralement des primitives, des pôles et autres singularités. Pour ce faire, on y intègre les fonctions sur les chemins, ce qui amène le théorème des résidus et ses applications plus ou moins calculatoires. On y construit et étudie aussi des fonctions elliptiques, la fonction zêta de Riemann, et on y démontre le théorème des nombres premiers.

TABLE DES MATIÈRES

Préface ... vii
Prérequis ... vii
Sources, références et remerciements ... vii
Et après ? ... viii

Résumé des propriétés utilisées ... 1
Notions de topologie générale ... 1
Vocabulaire des séries numériques, des séries de fonctions ... 2
Les bases du calcul différentiel ... 3

I. Séries entières et fonctions analytiques ... 5
I.1. Définition des fonctions analytiques ... 5
I.2. Les principes des zéros isolés et du prolongement analytique ... 7
I.3. Dérivabilité et analyticité des séries entières convergentes ... 9
I.4. Exponentielle et surtout logarithme ... 12
Exercices ... 20

II. Fonctions holomorphes ... 29
II.1. Définition des fonctions holomorphes ... 29
II.2. Analyticité des fonctions holomorphes ... 32
II.3. Les grands théorèmes sur les fonctions holomorphes ... 36
Exercices ... 40

III. Intégrales curvilignes, primitives ... 47
III.1. Intégration le long des chemins ... 47
III.2. Homotopie des chemins et intégrales de fonctions holomorphes ... 51
III.3. Problèmes de primitives ... 55
III.4. Indice d'un point par rapport à un lacet ... 59
Exercices ... 60

IV. Points singuliers, fonctions méromorphes ... 67
IV.1. Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent ... 67
IV.2. Points singuliers, fonctions méromorphes ... 70
IV.3. La sphère de Riemann ... 72
IV.4. Singularités essentielles ... 76
Exercices ... 79

V. Le théorème des résidus 83
V.1. Le théorème des résidus 83
V.2. Applications du théorème des résidus au calcul d'intégrales 87
Exercices 91

VI. Exemples de constructions de fonctions 97
VI.1. Exemples de fonctions périodiques 97
VI.2. Exemple de fonction bi-périodiques : la fonction $\wp$ de Weierstrass 100
VI.3. Produits infinis 105
VI.4. Le théorème des nombres premiers 111
Exercices 116

Notices biographiques 123
Niels Henrik Abel, 1802-1829 123
Archimède, 287 av. notre ère-212 av. notre ère 123
Jakob Bernoulli, 1654-1705 124
Friedrich Bessel, 1784-1846 124
Bernard Bolzano, 1781-1848 124
Émile Borel, 1871-1956 125
Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857 125
Felice Casorati, 1835-1890 126
Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783 126
Charles Jean Gustave Nicolas baron de la Vallée Poussin, 1866-1962 126
Leonhard Euler, 1707-1783 126
Leonardo Fibonacci, 1170 env.-env. 1250 127
Joseph Fourier, 1768-1830 127
Carl Friedrich Gauß, 1777-1855 128
Jacques Hadamard, 1865-1963 129
Camille Jordan, 1838-1921 129
Sofia Kowalevskaya, 1850-1891 129
Pierre Simon de Laplace, 1749-1827 129
Pierre Laurent, 1813-1854 130
Henri Lebesgue, 1875-1941 130
Joseph Liouville, 1809-1882 130
Gösta Mittag-Leffler, 1846-1927 131
Giacinto Morera, 1856-1909 131
Émile Picard, 1856-1941 131
Henri Poincaré, 1854-1912 132
Bernhardt Riemann, 1826-1866 132
Eugène Rouché, 1832-1910 133
Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843-1823 133
Karl Weierstraß, 1815-1897 133

Index 135

Bibliographie 139

PRÉFACE

On trouvera ici une version révisée et un peu étoffée de la rédaction d'un cours que j'ai donné dans la licence de mathématiques à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg en 1997, 98 et 99 (version 1,0).

J'ai préparé cette version (version 2,0) pour un cours de magistère première année en 2005-2006, elle est un peu rafraîchie et contient un peu plus de théorèmes (des précisions, notamment sur les singularités essentielles, sur les automorphismes, et une démonstration du théorème des nombres premiers) et davantage d'exercices.

Prérequis

J'utilise un peu de topologie sur **C** et les résultats de base sur les séries (voir le chapitre résumé, page 1). Les lecteurs sont supposés, comme le font les « vrais » étudiants, étudier la topologie générale et le calcul différentiel en parallèle. En cas de besoin, je signale l'existence de deux beaux livres accessibles sur ces sujets, ceux de Skandalis [**Ska01**] et de Rouvière [**Rou03**].

Sources, références et remerciements

J'ai appris les fonctions holomorphes dans le livre de Cartan [**Car61**] qui n'a pas plus vieilli que son auteur et reste la référence « incontournable »... et que j'ai donc copié et plagié sans vergogne, probablement même là où je n'en étais pas consciente. Le paragraphe sur l'exponentielle est copié sur l'époustouflant prologue du livre de Rudin [**Rud75**], les démonstrations des résultats sur les produits infinis viennent du chapitre 15 de ce même livre.

La démonstration « sans homotopie » de l'analyticité des fonctions holomorphes vient de l'article de Verley dans l'*Encyclopædia Universalis* [**Ver19**].

J'ai aussi copié quelques démonstrations dans le cours de Jean-Benoît Bost à l'École Polytechnique [**Bos97**], une ou deux autres dans le livre de Remmert [**Rem91**][(1)], quelques exercices « faciles » dans les livres de Silverman [**Sil72**] et Lang [**Lan93**] et d'autres, en général plus difficiles, dans celui de Tauvel [**Tau99**].

Je me suis permis de copier quelques notices biographiques dans la même *Encyclopædia Universalis*.

Que tous ces auteurs, nommés ou non, soient remerciés pour leur participation involontaire.

L'esprit de ce cours, l'idée d'utiliser la démonstration de [**Ver19**] pour avoir au plus vite les grands théorèmes (Liouville...), beaucoup des exercices et même le style LaTeX utilisé proviennent de multiples conseils de et discussions avec Claude Sabbah.

J'y ai aussi inclus beaucoup d'exercices proposés par Iris Muller et j'ai bénéficié de remarques de Nicole Bopp, d'Henri Carayol et d'Olivier Dodane.

[(1)] Un livre qui contient beaucoup de mathématiques, mais aussi des remarques historiques et culturelles très intéressantes.

Qu'ils soient remerciés pour leur participation plus ou moins volontaire.

Les étudiant·e·s de magistère première année en 2005-2006 ont essuyé les plâtres (version 1,9) de ce nouveau cours. La version améliorée (version 1,99) leur doit beaucoup : chacun·e a corrigé une formule incorrecte, a protesté parce que je n'étais pas claire, a proposé une nouvelle démonstration (voir par exemple page 39), a dessiné des paysages (voir page 102). Pour fabriquer la présente version (version 2,0), j'ai simplement corrigé deux ou trois erreurs grossières (la plupart signalées par Olivier Dodane) et ajouté les exercices du sujet d'examen de janvier 2007.

Que tous les étudiants soient remerciés pour leur participation captive (mais bienveillante, agréable et surtout indispensable).

Ajouté en mai 2011. Les étudiants lyonnais de Bertrand Rémy et Julien Melleray en 2008–2009, les étudiants strasbourgeois de la licence de mathématiques en 2009–2010 (avec moi) et 2010–2011 (avec Christine Huyghe) ont encore subi ce polycopié et apporté des améliorations à ce texte. Je les remercie, ainsi que Bertrand, Julien et Christine, pour leur aide.

Et après ?

On trouvera dans la bibliographie des références permettant aux lecteurs de se cultiver et/ou d'approfondir et de prolonger ce qu'ils auront appris dans ces notes, je pense notamment à la fonction zêta et à ses utilisations [**Kah96, SB03**] et aux surfaces de Riemann [**Car61, Rey90**].

Ajouté (aussi) en mai 2011. Il devrait y avoir bientôt une suite, sur les fonctions spéciales, séries de Dirichlet, etc.

À Strasbourg, le 10 mai 2011

RÉSUMÉ DES PROPRIÉTÉS UTILISÉES

Notions de topologie générale

Celles que j'utiliserai sont les suivantes.

Ouverts, fermés. L'espace $\mathbf{C}$, corps des nombres complexes[(2)], est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé par $|\cdot|$ (« module » des nombres complexes ou norme[(3)] euclidienne).

C'est un espace complet, ce qui veut dire que toutes les suites de Cauchy y sont convergentes.

Je noterai

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

le disque ouvert de rayon r centré en z_0.

Les ouverts sont des réunions de disques ouverts. Par exemple, le quadrant

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Ré}(z) > 0 \text{ et } \text{Im}(z) > 0\}$$

est un ouvert, ainsi que la couronne

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}.$$

Les fermés sont les complémentaires des ouverts, toute partie A a une adhérence $\overline{A}$ (le plus petit fermé qui la contient), ce qui fait que je noterai aussi

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

l'adhérence du disque ouvert, qui est le disque fermé. Toute partie a aussi et un intérieur $\mathring{A}$ (le plus grand ouvert contenu dans A).

Compacts. Un compact d'un espace topologique est une partie séparée de cet espace telle que, de tout recouvrement de cette partie par des ouverts, on puisse extraire un sous-recouvrement fini.

Les compacts de $\mathbf{C}$ sont les parties à la fois fermées et bornées (contenues dans une boule assez grande) — c'est un théorème (dit de Borel-Lebesgue ou de Heine-Borel), vrai dans $\mathbf{C}$ et dans n'importe quel espace $\mathbf{R}^n$, mais pas dans n'importe quel espace topologique).

---

(2) construit à partir de $\mathbf{R}$ de façon que l'équation $x^2 + 1 = 0$ y ait des solutions, ce qui en donne immédiatement à toutes les équations du second degré à coefficients dans $\mathbf{R}$, et aussi à coefficients dans $\mathbf{C}$ et ce qui, de façon plus étonnante, suffit à en donner à toutes les équations algébriques — un théorème, dit de d'Alembert-Gauss, que nous démontrerons plusieurs fois dans ces notes

(3) Ou de la topologie définie par n'importe quelle norme, puisque, sur $\mathbf{C}$ comme sur tout espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, toutes les normes, étant équivalentes, définissent la même topologie.

Toute suite contenue dans un compact y possède un point d'accumulation ou, ce qui revient au même, une sous-suite convergente, c'est un autre théorème (dit de Bolzano-Weierstrass).

L'image d'un compact par une application continue est un compact. Par exemple, si l'application continue est à valeurs dans $\mathbf{R}$, l'image d'un compact est un fermé borné de $\mathbf{R}$, ce qui implique que la fonction a un maximum, un minimum, et qu'elle les atteint.

Les compacts vérifient la propriété des fermés emboîtés, à savoir que si $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides contenus dans un (le même) compact, alors leur intersection n'est pas vide.

Enfin, une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Connexes. De même l'image d'un connexe par une application continue est un connexe. Une propriété que l'on utilise souvent sous la forme : si U est connexe et X discret et si $f : U \to X$ est une application continue, alors f est constante.

Si E est un espace topologique et $x \in E$, le plus grand connexe de E contenant x est sa *composante connexe*. Tout espace topologique est union disjointe de ses composantes connexes.

Vocabulaire des séries numériques, des séries de fonctions

Séries. Une série n'est autre qu'une suite ou une suite une série, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, mais il y a quand même un vocabulaire et des résultats spécifiques au langage des séries. La série de terme général u_n est convergente si la suite s_n l'est. La limite de s_n s'appelle la somme de u_n. La série converge absolument si la suite $s'_n = \sum_{k=0}^n |u_n|$ est convergente.

Par exemple, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle n'est pas absolument convergente.

Bien sûr, convergence absolue implique convergence, mais aussi implique que l'on peu grouper les termes de la série comme on le souhaite pour calculer la somme. Ce qui n'est pas vrai lorsque la convergence n'est pas absolue, comme le montre le fait que

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \neq -\sum \frac{1}{2n+1} + \sum \frac{1}{2n}$$

puisque les deux séries de droite sont divergentes.

Séries de fonctions. Une série de fonctions $\sum f_n(z)$ peut converger simplement (c'est-à-dire pour chaque z) ou uniformément sur une partie A, c'est-à-dire lorsque

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{z\in A} \left| \sum_{n=0}^{N} f_n(z) - s(z) \right| = 0.$$

On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $A \subset \mathbf{C}$ si tout point de A possède un voisinage U tel que

$$\sum \|f_n\|_U < +\infty \text{ ou } \|f\|_u = \sup_{z\in U} |f(z)|,$$

c'est-à-dire si elle converge « en norme », c'est-à-dire si $\sum |f_n|$ converge uniformément. Dans ce cas, la série $\sum f_n$ converge uniformément.

Ces notions sont importantes, parce que, si les f_n sont continues et si la série converge uniformément, alors la limite est continue, et qu'il est bien facile de vérifier si une série est normalement convergente.

Dans ce cours, on aura surtout des séries entières, c'est-à-dire des séries de terme général $a_n z^n$.

Les bases du calcul différentiel

La notion de différentiabilité en un point (être approchable au voisinage de ce point par une application linéaire), la différentielle d'une application (cette application linéaire) et le théorème d'inversion locale (si la différentielle d'une application en un point est inversible, alors l'application elle-même, au voisinage de ce point, est inversible). Voir [**Rou03**].

CHAPITRE I

SÉRIES ENTIÈRES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

Dans ce premier chapitre, je définis les fonctions analytiques (celles qui se développent en série entière au voisinage de chaque point), j'en étudie les premières propriétés étonnantes (le principe des zéros isolés). Je décris ensuite la fonction exponentielle, un des outils essentiels des mathématiques, et je pose la question du logarithme, à laquelle je réponds, autant que faire se peut.

I.1. Définition des fonctions analytiques

Séries entières. On appelle *série entière* une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad a_n \in \mathbf{C}.$$

Proposition I.1.1. *Soit* $\rho = \sup\{r \in [0,+\infty[\mid \sum |a_n| r^n < +\infty\}$.

(1) *Pour tout* $r < \rho$, *la série* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur le disque* $|z| \leq r$.

(2) *La série* $\sum a_n z^n$ *diverge pour* $|z| > \rho$.

Remarques I.1.2

(1) D'abord, ρ existe (la série converge pour $r = 0$) mais il peut être nul, fini ou infini. On l'appelle le *rayon de convergence* de la série entière. Le disque fermé $|z| \leq \rho$ est le *disque de convergence*.

(2) La proposition ne dit rien sur ce qui se passe sur le *cercle de convergence* $|z| = \rho$, où des phénomènes variés peuvent se produire (voir l'exercice I.2).

(3) La somme de la série est une fonction continue sur l'intérieur du disque de convergence.

Démonstration de la proposition I.1.1. C'est une conséquence du lemme suivant, dû à Abel.

***Lemme I.1.3* (Abel)**. *Soient* r, r_0 *des réels tels que* $0 < r < r_0$. *S'il existe un nombre réel (fini)* $M > 0$ *tel qu'on ait*

$$|a_n| r_0^n \leq M \qquad \text{pour tout } n \geq 0,$$

alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge normalement pour* $|z| \leq r$.

Démonstration du lemme. On majore

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Comme on a $r < r_0$, $M(r/r_0)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente. □

Montrons la première assertion de la proposition : si $r < \rho$, on choisit un nombre r_0 tel que $r < r_0 < \rho$. Par définition de ρ, la série $\sum |a_n| r_0^n$ converge, donc il existe un nombre (fixe) M tel que

$$|a_n| r_0^n \leq M \qquad \text{pour tout } n.$$

On applique le lemme d'Abel et on obtient la convergence normale de $\sum a_n z^n$ pour $|z| \leq r_0$.

Pour la deuxième assertion : si $|z_0| > \rho$, pour tout réel M, on peut trouver un entier n tel que $|a_n z_0^n| > M$ (sinon, le lemme d'Abel impliquerait que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement pour $|z| < |z_0|$, ce qui est contradictoire avec la définition de ρ). □

Remarque I.1.4. Si la suite $|a_{n+1}/a_n|$ a une limite ℓ, alors $\rho = 1/\ell$: on considère la suite $|a_{n+1}z^{n+1}/a_n z^n|$, qui converge vers $\ell\,|z|$ et on conclut par le critère habituel sur les séries numériques (comparaison avec une série géométrique).

Exemple I.1.5. Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ est 1. Voir d'autres exemples dans l'exercice I.2.

On dit parfois qu'une série entière est *convergente* quand son rayon de convergence est strictement positif (c'est-à-dire quand elle converge effectivement quelque part).

Somme et produit de séries entières convergentes. Considérons maintenant deux séries entières

$$f(z) = \sum a_n z^n, \qquad g(z) = \sum b_n z^n$$

de rayons de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2 ainsi que les séries somme et produit

$$\sum c_n z^n \text{ avec } c_n = a_n + b_n, \qquad \sum d_n z^n \text{ avec } d_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0.$$

Appelons enfin R le plus petit des deux nombres ρ_1 et ρ_2.

Proposition I.1.6. *Les séries entières $s(z) = \sum c_n z^n$ et $p(z) = \sum d_n z^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à R. Pour $|z| < R$, leurs sommes sont respectivement $f(z) + g(z)$ et $f(z)g(z)$.*

Démonstration. On écrit

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|, \quad \delta_n = \sum_{p=0}^{n} |a_p| \cdot |b_{n-p}|,$$

de sorte que $|c_n| \leq \gamma_n$ et $|d_n| \leq \delta_n$. Pour $r < R$, les séries $\sum |a_n| r^n$ et $\sum |b_n| r^n$ convergent. On a donc

$$\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} |b_n| r^n\right) < +\infty$$

et

$$\sum_{n\geq 0} \delta_n r^n = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} |b_n| r^n\right) < +\infty$$

les séries $s(z)$ et $p(z)$ sont donc convergentes pour $|z| < R$.

Il reste à vérifier que leurs sommes sont bien la somme et le produit des séries $f(z)$ et $g(z)$. Pour la somme, c'est clair. Pour le produit, ça résulte de la propriété rappelée dans l'exercice I.6. □

Définition des fonctions analytiques.

Définition I.1.7. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une application. Soit $z_0 \in U$. On dit que f est *analytique* en z_0 s'il existe

- un nombre $r > 0$ tel que le disque $|z - z_0| < r$ soit contenu dans U
- et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n w^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$

tels que, pour $|z - z_0| < r$, on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point[(1)] de U.

Exemple I.1.8. Un polynôme est une fonction analytique en tout point de $\mathbf{C}$: en effet, on peut développer le polynôme en tout point grâce à la formule de Taylor :

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

où n est le degré de P. Bien entendu, il existe des fonctions analytiques qui ne sont pas des polynômes, ce que nous montrerons le plus rapidement possible.

On remarquera que la somme et le produit de deux fonctions analytiques sur U sont des fonctions analytiques sur U (en application de la proposition I.1.6). L'ensemble des fonctions analytiques sur U est ainsi un anneau. C'est bien évidemment un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. En plus, les structures d'anneau et d'espace vectoriel sont compatibles ($\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g)$) ce qu'on résume en disant :

Proposition I.1.9. *L'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert U est une algèbre sur $\mathbf{C}$.*

Il est traditionnel de noter cette algèbre $\mathcal{O}(U)$.

I.2. Les principes des zéros isolés et du prolongement analytique

***Proposition I.2.1* (Principe des zéros isolés, version séries entières)**. *Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe un r dans $]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z|$ dans l'intervalle $]0, r[$.*

Démonstration. Soit p le plus petit entier tel que le coefficient a_p ne soit pas nul. Ainsi

$$f(z) = \sum_{n\geq p} a_n z^n = z^p g(z)$$

avec $g(z) = a_p + a_{p+1} z + \cdots$ et $g(0) = a_p \neq 0$. Comme g est la somme d'une série entière, elle est continue à l'intérieur de son disque de convergence, donc il existe tout un voisinage de 0 sur lequel elle ne s'annule pas. □

Remarque I.2.2. Dans les notations de la démonstration, si $p = 0$, $f = g$ et f ne s'annule pas au voisinage de 0. Si $p \geq 1$, f a un zéro isolé en 0.

Corollaire I.2.3. *Toute fonction analytique sur U admet un* unique *développement en série entière au voisinage de chaque point de U.*

[(1)] De sorte que l'analyticité est une propriété *locale*, c'est-à-dire qui se vérifie en chaque point.

Démonstration. En effet, si, pour tout z dans un voisinage de z_0, on a

$$\sum a_n(z-z_0)^n = \sum b_n(z-z_0)^n,$$

on a $\sum(a_n-b_n)(z-z_0)^n = 0$ et donc

$$\sum(a_n-b_n)w^n = 0 \text{ pour tout } w \text{ dans un voisinage de } 0.$$

Donc, en appliquant la proposition I.2.1, on voit que $a_n = b_n$ pour tout n. □

***Théorème I.2.4* (Principe du prolongement analytique).** *Soit U un ouvert* connexe *de* $\mathbf{C}$ *et soient f, g deux fonctions analytiques sur U. Si f et g coïncident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U, alors elles coïncident sur U.*

***Remarque*.** Dire que a est un point d'accumulation de Σ est équivalent à dire que a est adhérent à $\Sigma - \{a\}$, ce qui est encore équivalent à dire que tout voisinage de a rencontre $\Sigma - \{a\}$ et, puisque nous sommes dans un espace métrique, à dire que a est limite d'une suite de points de Σ.

Démonstration. Soit a un point d'accumulation de Σ dans U et soit V un voisinage de a sur lequel f et g sont développables en série entière. Considérons la fonction $h = f - g$. Elle est analytique sur U puisque f et g le sont. Elle est développable en série entière sur V et ses zéros ont un point d'accumulation dans V donc, en vertu de la proposition I.2.1, $h|_V = 0$. Soit

$$A = \{b \in U \mid h = 0 \text{ au voisinage de } b\}.$$

C'est un ouvert de U par définition. Il contient l'ouvert non vide V et n'est donc pas vide. Montrons maintenant qu'il est aussi *fermé*.

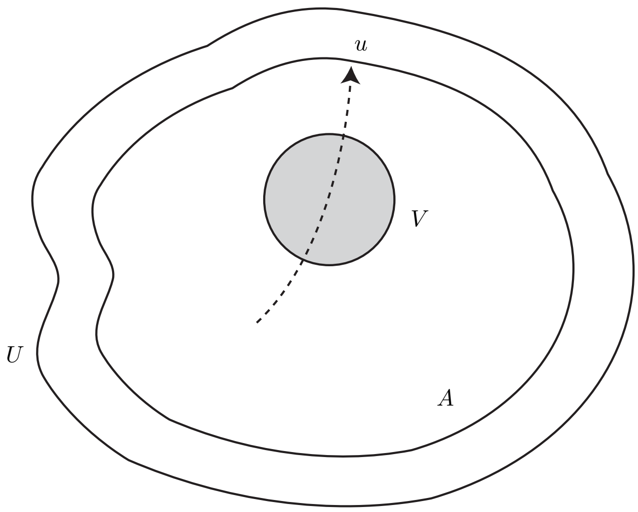


FIGURE 1.

Soit u un élément de l'adhérence $\overline{A}$ de A dans U. Il existe une suite u_n d'éléments de A tels que $u = \lim u_n$. Comme u_n est dans A, $h(u_n) = 0$ pour tout n. Mais $u \in U$ et h est analytique dans U, donc elle se développe en série entière au voisinage de u :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-u)^n$$

sur la boule $B = \{z \in U \mid |z-u| < r\}$. Si n est assez grand, u_n est dans B et h a une infinité de zéros dans B, ce qui serait contraire au principe des zéros isolés si l'un des a_n n'était pas nul. Donc tous les a_n sont nuls et $h = 0$ sur un voisinage de u. Ainsi u est dans A, ce qui fait que A est fermé.

En conclusion, A est ouvert, fermé et non vide. Comme U est connexe, on a $A = U$. □

Remarque I.2.5. En particulier, si une fonction analytique est nulle sur un tout petit ouvert contenu dans U, elle est nulle sur U tout entier. Il est clair que ce résultat est faux pour des fonctions seulement supposées $\mathcal{C}^\infty$ (voir l'exercice I.13).

Si U et V sont deux ouverts non vides avec $V \subset U$ et U connexe et si f est une fonction analytique sur V, on appelle *prolongement analytique* de f à U toute fonction analytique sur U qui coïncide avec f sur V. Il se pourrait très bien qu'il n'existe pas de tel prolongement, mais, s'il en existe un, il est unique.

Remarque I.2.6. On applique souvent le théorème I.2.4 au cas où Σ est un ouvert de U mais aussi dans le cas où Σ est une courbe dessinée dans U. On l'applique par exemple lorsque Σ est l'intersection de U avec l'axe réel.

***Proposition I.2.7* (Principe des zéros isolés)**. *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés.*

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite infinie u_n de zéros de f qui convergerait vers un point $u \in U$. D'après la démonstration précédente, f serait nulle au voisinage de u et donc serait identiquement nulle sur U. □

I.3. Dérivabilité et analyticité des séries entières convergentes

Proposition I.3.1. *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ et soit $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$. Son rayon de convergence est ρ et, pour tout z tel que $|z| < \rho$, on a*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Il semble naturel d'appeler f' la *dérivée* de f. On discutera des relations entre cette dérivée et les dérivées partielles ou la différentielle de f au chapitre suivant.

Corollaire I.3.2. *Une fonction analytique sur U y admet des dérivées de tous ordres.* □

Démonstration de la proposition. Appelons[(2)] ρ' le rayon de convergence de f'. En posant $\alpha_n = |a_n|$, on sait donc que, pour $r < \rho'$, la série $\sum n\alpha_n r^{n-1}$ converge et donc que

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n r^n \leq r \left(\sum_{n\geq 1} n\alpha_n r^{n-1} \right) < +\infty$$

donc $r \leq \rho$ (on a montré $r < \rho' \Rightarrow r \leq \rho$).

Inversement, soit $r < \rho$ et soit r' tel que $r < r' < \rho$. Alors

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{n}{r'} \alpha_n r'^n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

[(2)]On peut aussi utiliser la formule d'Hadamard, c'est-à-dire l'exercice I.1.

À cause de l'inégalité $r' < \rho$, la suite $\alpha_n r'^n$ est majorée, disons par M, de sorte que

$$n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{n}{r'} M \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} = \frac{M}{r'} n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

La série de terme général $n(r/r')^{n-1}$ est convergente, donc $n\alpha_n r^{n-1}$ est le terme général d'une série convergente et donc $r \leq \rho'$ (on a montré $r < \rho \Rightarrow r \leq \rho'$).

Donc $\rho = \rho'$. Il reste à vérifier que f' est bien la dérivée, au sens exprimé dans la proposition, de f. On fixe z et on choisit r de façon que $|z| < r < \rho$.

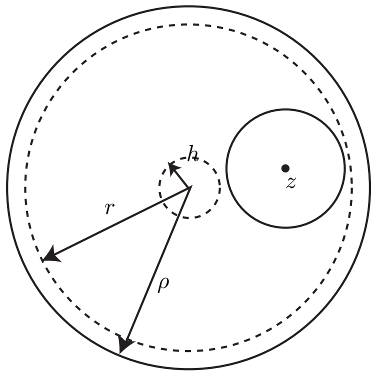


Figure 2.

On suppose que h est un nombre complexe non nul tel que $|h| \leq r - |z|$ de sorte que

$$|z + h| \leq |z| + |h| \leq r$$

et que f est définie en $z + h$. On a alors

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \frac{\sum a_n[(z+h)^n - z^n]}{h} - \sum n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 1} u_n(z,h)$$

avec

$$u_n(z,h) = a_n \left((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1} - nz^{n-1}\right)$$

et donc, en majorant brutalement $|z|$ et $|z+h|$ par r,

$$|u_n(z,h)| \leq \alpha_n \left(r^{n-1} + r(r)^{n-2} + \cdots + r^{n-1} + nr^{n-1}\right) = 2n\alpha_n r^{n-1}.$$

À cause de l'inégalité $r < \rho$, la série $\sum n\alpha_n r^{n-1}$ converge et on a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \sum_{n>N} 2n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La somme finie $\sum_{n\leq N} u_n(z,h)$ est un polynôme en h, nul pour $h = 0$. Il existe donc un réel positif η tel qu'on ait, pour tout h tel que $|h| < \eta$,

$$\left|\sum_{n\leq N} u_n(z,h)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, si $|h| < \inf(r - |z|, \eta)$,

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)\right| \leq \left|\sum_{n\leq N} u_n(z,h)\right| + \sum_{n>N} 2n\alpha_n r^{n-1} \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Cette proposition permet de démontrer (enfin !) qu'il existe des fonctions analytiques (autres que les polynômes).

***Théorème I.3.3* (Analyticité des séries entières).** *La somme d'une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence.*

Contrairement à ce qu'on pourrait croire naïvement, ce résultat n'a rien d'évident. Il s'agit de montrer que la fonction en question est analytique en *chaque* point de l'intérieur de son disque de convergence. On va montrer un résultat beaucoup plus précis : une série entière est somme de sa série de Taylor en tout point de l'intérieur de son disque de convergence.

***Proposition I.3.4*.** *Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence ρ n'est pas nul. Soit z_0 un point de l'intérieur du disque de convergence. Alors la série entière*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) w^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à $\rho - |z_0|$ et on a

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

pour tout z tel que $|z - z_0| < \rho - |z_0|$.

Démonstration. Posons $r_0 = |z_0|$, $\alpha_n = |a_n|$. Calculons la dérivée p-ième de f

$$f^{(p)}(z_0) = \sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q,$$

de sorte que

$$\left|f^{(p)}(z_0)\right| \leq \sum \frac{(p+q)!}{q!} \alpha_{p+q} r_0^q.$$

Pour $r_0 \leq r < \rho$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} \left|f^{(p)}(z_0)\right| (r-r_0)^p &\leq \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{p+q} r_0^q (r-r_0)^p \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n \underbrace{\left(\sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!} (r-r_0)^p r_0^{n-p} \right)}_{(r-r_0+r_0)^n} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n r^n < +\infty.\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que la série était à termes positifs pour regrouper les termes. Donc le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) z^n$ est plus grand que ou égal à $r - r_0$, mais on pouvait choisir r arbitrairement proche de ρ, donc le rayon de convergence est supérieur ou égal à $\rho - |z_0|$.

Calculons maintenant $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n/n!$. L'inégalité ci-dessus montre que la série double

$$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q (z-z_0)^p$$

converge absolument. On peut donc calculer sa somme en regroupant les termes de façon arbitraire. Il y a deux façons intéressantes de le faire :

– ce qu'on a déjà fait (regrouper selon $p+q=n$) :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \left(\sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(z-z_0)^p z_0^{n-p}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = f(z),$$

– mais aussi

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(z-z_0)^p}{p!} \underbrace{\left(\sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q\right)}_{f^{(p)}(z_0)}.$$

□

I.4. Exponentielle et surtout logarithme

Exponentielle complexe. Elle est définie par la série entière

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il est clair que le rayon de convergence de cette série est infini (exercice I.2 si nécessaire). La convergence absolue implique que l'on peut calculer

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

ce qui fait que la fonction exponentielle vérifie la formule d'addition (ou « équation fonctionnelle »)

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbf{C}.$$

Cette relation implique que $e^0 = 1$ et que $e^z \cdot e^{-z} = 1$. Les coefficients de la série sont des nombres réels ce qui fait que e^x est réel pour x réel. On appelle e le nombre (réel) $e = e^1$ (ce qui justifie la notation !).

Le théorème suivant résume les propriétés les plus importantes de la fonction exponentielle.

Théorème I.4.1

(1) *L'application* exp *est une surjection* $\mathbf{C} \to \mathbf{C} - \{0\}$.

(2) *Elle est égale à sa dérivée, c'est-à-dire on a* $\exp' = \exp$.

(3) *La restriction de* exp *à* $\mathbf{R}$ *est une fonction réelle strictement croissante et positive qui vérifie*

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

(4) *Il existe un nombre réel positif, noté* π, *tel que* $\exp(i\pi/2) = i$ *et tel que* $e^z = 1$ *si et seulement si* $z/(2i\pi) \in \mathbf{Z}$.

(5) *La fonction* exp *est périodique de période* $2i\pi$.

(6) *L'application* $t \mapsto e^{it}$ *envoie l'axe réel sur le cercle unité.*

Démonstration. D'abord, l'équation fonctionnelle donne $e^z \cdot e^{-z} = 1$, donc $e^z \neq 0$, et exp est à valeurs dans $\mathbf{C} - \{0\}$ (mais il reste à prouver que tous les nombres complexes non nuls sont atteints).

Ensuite la série dérivée de celle définissant exp est évidemment la même et donc $\exp' = \exp$.

On a déjà dit que exp se restreignait à l'axe réel en une fonction réelle. En contemplant le développement en série, on voit immédiatement que exp est strictement croissante sur les réels positifs et aussi que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Pour les réels négatifs et la limite en $-\infty$, on utilise $e^{-x} = 1/e^x$.

Le développement en série montre aussi que, si t est réel, on a $e^{-it} = \overline{e^{it}}$. Ainsi
$$\left|e^{it}\right|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1$$
donc l'axe réel est bien envoyé dans le cercle unité (il restera à vérifier que tous les points en sont atteints).

Définissons[(3)] les deux fonctions réelles de variable réelle
$$\cos t = \text{Ré}(e^{it}), \qquad \sin t = \text{Im}(e^{it})$$
et dérivons la relation $e^{it} = \cos t + i \sin t$:
$$\cos' t + i \sin' t = ie^{it} = -\sin t + i \cos t$$
de sorte que
$$\cos' = -\sin, \qquad \sin' = \cos .$$
Comme partie réelle de e^{it}, la fonction cos a un développement en série
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$
convergeant pour tout t réel. Considérons la valeur de la fonction cos en 2. Les termes de la série vont décroître en valeur absolue, avec des signes alternés, de sorte que $\cos 2$ est majoré par la somme des trois premiers termes (avec $t = 2$). Tous calculs faits, on trouve $\cos 2 < -1/3$. Comme $\cos 0 = 1$ et que cos est continue sur $\mathbf{R}$, elle doit s'annuler entre 0 et 2. Soit t_0 le plus petit nombre réel positif tel que $\cos t_0 = 0$. On définit[(4)]
$$\pi = 2t_0.$$
Comme $\cos t + i \sin t$ est de module 1, $\sin t_0 = \pm 1$, comme $\sin' t = \cos t > 0$ sur $]0, t_0[$, la fonction sin est croissante sur $]0, t_0[$ et comme $\sin 0 = 0$, on a $\sin t_0 > 0$, bref, $\sin t_0 = 1$. D'où l'on déduit que
$$e^{i\pi/2} = i.$$
On en déduit aussi que $e^{i\pi} = i^2 = -1$, que $e^{2i\pi} = (-1)^2 = 1$, que $e^{2in\pi} = 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et que
$$e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z$$
... et donc que la fonction exponentielle est périodique de période $2i\pi$.

Supposons maintenant que z soit tel que $e^z = 1$ et montrons que z est un multiple entier de $2i\pi$. Si $z = x + iy$ (avec x et y réels), on a $e^z = e^x e^{iy}$, donc $|e^z| = e^x$. Comme $e^z = 1$, on a forcément $e^x = 1$ et donc $x = 0$ (exp est strictement croissante et en particulier injective sur $\mathbf{R}$). Reste à montrer que $y/2\pi$ est un entier, et pour ça, il suffit de montrer que $e^{iy} \neq 1$ pour $y \in]0, 2\pi[$.

Soit donc $y \in]0, 2\pi[$. Écrivons les parties réelle et imaginaire de $\exp iy/4$:
$$e^{iy/4} = u + iv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$
Comme $y/4 \in]0, \pi/2[$, les réels u et v sont strictement positifs. D'autre part, on a
$$e^{iy} = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2).$$
Le membre de droite ne peut être réel que si $u^2 - v^2 = 0$. Comme $u^2 + v^2 = 1$, ce n'est possible qu'avec $u^2 = v^2 = 1/2$. Mais alors la partie réelle est -1 et pas 1.

Il ne reste plus à montrer que les deux assertions de surjectivité que nous avons laissées de côté.

---

(3) Voir aussi la discussion page 15 pour des remarques sur cette *définition*.

(4) Cette façon de définir π remonte, au moins, aux cours d'Edmund Landau à Göttingen (et faisait partie, d'après l'idéologie nazie, d'une façon « juive » de faire des mathématiques).

Commençons par le cercle. Fixons un nombre complexe w de module 1 et montrons qu'il s'écrit $w = e^{it}$ pour un certain $t \in \mathbf{R}$. Supposons d'abord que ses parties réelle u et imaginaire v sont toutes deux positives. Comme $u \leq 1$, le théorème des valeurs intermédiaires (encore) affirme qu'il existe un $t \in [0, \pi/2]$ tel que $u = \cos t$. Comme $\sin^2 t = 1 - u^2 = v^2$, et comme $v \geq 0$ et $t \in [0, \pi/2]$, on a $v = \sin t$ et donc $w = e^{it}$.

Si $u < 0$ et $v \geq 0$, on peut appliquer ce qui précède à $-iw$, on trouve $-iw = e^{it}$ et donc $w = e^{i(t+\pi/2)}$. Enfin, si $v < 0$, on sait que $-w = e^{it}$ et donc $w = e^{i(t+\pi)}$.

Pour finir, fixons un $w \neq 0$ et écrivons $w = \alpha\,|w|$ avec α de module 1. On vient de voir qu'alors, $\alpha = e^{iy}$ pour un certain $y \in \mathbf{R}$. Toujours en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x tel que $|w| = e^x$. Alors $w = e^{x+iy}$. On a bien démontré que exp est surjective de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C} - \{0\}$. $\square$

La figure 3 montre quelques droites parallèles aux axes réel et imaginaire et leurs images par l'exponentielle. Voir aussi l'exercice I.25.

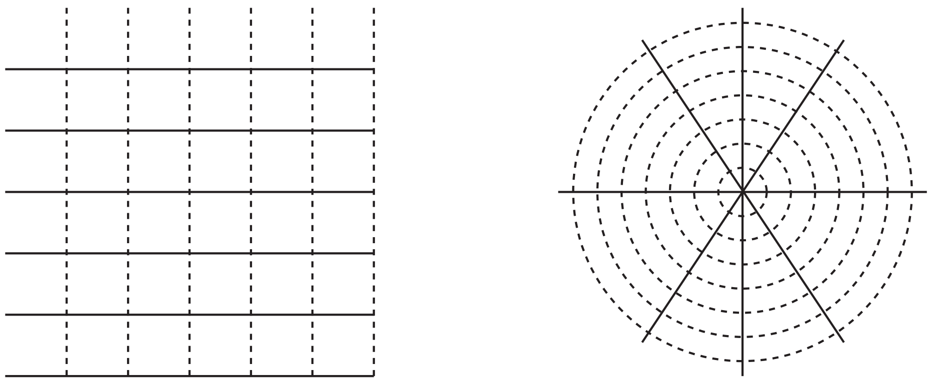


Figure 3.

La figure 4, elle, illustre la convergence de la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{it^n}{n!} = e^{it}.$$
Je l'ai trouvée dans [Rou03] (page 54) et elle m'a semblé si éclairante que je n'ai pu m'empêcher de la copier. La convergence « en spirale » s'explique par le fait que les parties réelle et imaginaire sont des séries alternées (ce que nous avons utilisé dans la démonstration précédente, en définissant π).

Logarithme népérien. La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Elle admet une fonction réciproque continue et strictement croissante $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, appelée « logarithme népérien » et notée log. On remarquera que $\log(1) = 0$ et que, comme $\exp' = \exp$, $\log'(x) = 1/x$... c'est bien le même logarithme népérien que l'on a découvert dans les classes de lycée.

Mesure des angles et arguments d'un nombre complexe. Appelons S^1 le cercle unité :
$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$
On a vu que l'application $y \mapsto e^{iy}$ est une application continue et un homomorphisme surjectif de groupes $\mathbf{R} \to S^1$. On a aussi déterminé son noyau, le groupe des multiples entiers de 2π. Ainsi l'exponentielle définit un *isomorphisme* de groupes
$$\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow S^1.$$

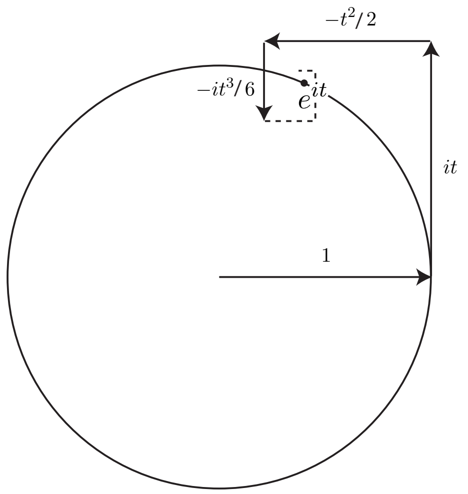


FIGURE 4.

Si on munit $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ de la topologie quotient, φ devient un homéomorphisme (exercice I.27). L'application réciproque associe, à tout nombre complexe de module 1, une classe modulo $2\pi\mathbf{Z}$ de réels, ses arguments. De même, si $z \neq 0$, on définit $\arg(z) = \arg(z/|z|)$, à l'addition d'un multiple entier de 2π près.

Immortel Archimède... Dans les classes du secondaire, on a défini sinus et cosinus d'un angle (géométrique)

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$

(côté opposé sur hypoténuse, côté adjacent sur hypoténuse). On a aussi parlé des fonctions sinus et cosinus que l'on vient de définir ici — sans les définir rigoureusement. Ici il s'agit de sinus et cosinus d'un *nombre* réel. Le passage de l'un (angle) à l'autre (nombre) se fait *via* la *mesure* des angles : si une mesure de l'angle en A est t, on a bien

$$\cos A = \cos t, \qquad \sin A = \sin t.$$

De même, le nombre π défini ici comme le double du premier zéro positif de la fonction cosinus est bien le nombre π qui permet de calculer la longueur d'une circonférence depuis l'école élémentaire (ou depuis Archimède, selon la notion qu'on a du temps historique) : on calcule la longueur du cercle unité en le paramétrant par $(\cos t, \sin t)$ ou e^{it}, $t \in [0, 2\pi]$. La longueur est l'intégrale de la norme du vecteur dérivé $(-\sin t, \cos t)$ ou ie^{it} :

$$\ell = \int_0^{2\pi} \left| ie^{it} \right| dt = 2\pi.$$

La longueur de la circonférence est bien 2π. On peut *définir* π par cette égalité... à condition d'avoir défini la longueur des courbes avant.

Logarithme complexe. Il s'agit d'inverser la fonction exponentielle... dont nous savons fort bien qu'elle n'est *pas* inversible, n'étant pas injective. On peut donc s'attendre à des problèmes. Nous savons cependant pourquoi elle n'est pas injective (en d'autres termes nous connaissons le noyau de l'homomorphisme de groupes exp).

Donnons-nous un nombre complexe t et cherchons tous les nombres complexes z tels que $e^z = t$. Il est nécessaire que t ne soit pas nul. Écrivons, après avoir choisi un argument de t,

$$t = |t| \exp(i \arg t)$$

et cherchons z sous la forme $z = x + iy$, c'est-à-dire résolvons

$$e^x e^{iy} = |t| \exp(i \arg t).$$

On trouve

$$x = \log |t|, \qquad y = \arg t$$

cette deuxième relation étant à manier avec des pincettes. Donc on aimerait écrire

$$z = \log |t| + i \arg t$$

relation dans laquelle on voit bien, comme il fallait s'y attendre, que le logarithme complexe n'est pas bien défini, ou qu'il est défini à l'addition d'un multiple entier de $2i\pi$ près.

Définition I.4.2. On dit qu'une fonction *continue* f de la variable complexe t, définie sur un ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}$ ne contenant pas 0, est *une détermination du logarithme* sur U si

$$\forall\, t \in U, \quad \exp(f(t)) = t.$$

Remarque I.4.3. Une telle détermination n'existe pas forcément. C'est le cas par exemple pour $U = \mathbf{C} - \{0\}$, comme on va le voir dans la proposition I.4.5. Par contre, s'il en existe une, il y en a beaucoup d'autres, comme le précise la proposition suivante.

Proposition I.4.4. *Soit U un ouvert connexe ne contenant pas* 0*. Si f est une détermination du logarithme sur U, toute autre détermination du logarithme sur U est de la forme $f + 2ik\pi$ pour un certain entier k. Réciproquement, toute $f + 2ik\pi$ est une détermination du logarithme sur U.*

Démonstration. Supposons que f et g soient deux déterminations du logarithme sur U. Par définition, elles sont continues sur U. Donc la fonction

$$h(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2i\pi}$$

est continue sur l'ouvert *connexe* U. Elle ne prend que des valeurs entières et donc est constante. La réciproque est claire. □

Proposition I.4.5. *Il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur* $\mathbf{C} - \{0\}$.

Démonstration. Supposons qu'une telle détermination existe, appelons-la f. Posons $u(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Alors u serait une détermination continue de l'argument sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Restreignons-nous au cercle S^1 et posons $v(\theta) = u(e^{i\theta})$, définissant ainsi une fonction $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et périodique de période 2π. Pour tout θ, θ et $v(\theta)$ sont des arguments de $e^{i\theta}$, donc il existe un entier $n(\theta)$ tel que

$$v(\theta) - \theta = 2n(\theta)\pi.$$

Comme v est continue, n est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Z}$, donc elle est constante. Il existe donc un entier n tel que

$$v(\theta) = \theta + 2n\pi.$$

La contradiction vient maintenant du fait que v doit aussi être périodique :

$$\theta + 2n\pi = v(\theta) = v(\theta + 2\pi) = (\theta + 2\pi) + 2n\pi.$$ □

Remarque I.4.6. Compte-tenu de tout ce a été dit dans ce paragraphe, la plus grande prudence est de rigueur quand on utilise des déterminations du logarithme. Je préciserai : « soit f la détermination du logarithme sur l'ouvert U telle que *etc.* ». Je conseille une prudence analogue aux lecteurs.

Développement en série du logarithme

Proposition I.4.7. *La série entière*

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

converge pour $|z|<1$. *La somme de la série*

$$f(t)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(t-1)^n}{n}$$

est une détermination du logarithme sur le disque ouvert de centre 1 *et de rayon* 1.

Démonstration. Il est clair que le rayon de convergence de la série entière est 1 et donc que la série définissant $f(t)$ converge pour $|t-1|<1$. La fonction f vérifie $f(1)=0$ et

$$f'(t)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n(t-1)^n=\frac{1}{1+(t-1)}=\frac{1}{t}$$

donc sa restriction aux t réels (dans $]0,2[$) est $\log(t)$. La fonction $\exp\circ f$ est analytique comme composée de deux fonctions analytiques[(5)], coïncide avec t pour t réel, donc, en vertu du théorème du prolongement analytique (ici le théorème I.2.4), elle coïncide avec t partout. □

On a ainsi montré l'existence de déterminations *analytiques* du logarithme sur le disque de centre 1 et de rayon 1. Il en existe sur tous les disques contenus dans $\mathbf{C}-\{0\}$, comme l'affirme la proposition suivante et comme le montre la figure 5.

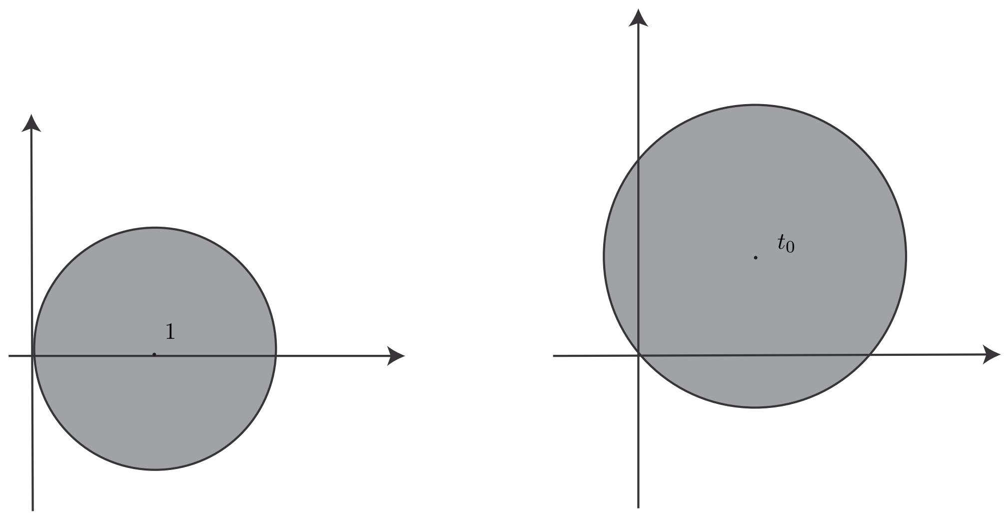


FIGURE 5.

[(5)] Il n'est pas très facile de démontrer directement que la composée de deux fonctions analytiques est analytique. On pourra le faire en exercice (exercice I.5) ou attendre les théorèmes du chapitre suivant qui le donneront sans fatigue.

Corollaire I.4.8. *Soit t_0 un nombre complexe non nul et soit θ_0 un argument de t_0. Sur le disque $|t-t_0| < |t_0|$, la série*

$$g(t) = \log|t_0| + i\theta_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n$$

définit une détermination analytique du logarithme.

Démonstration. On applique la proposition I.4.7 qui dit que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n$$

converge, sur le disque défini par $\left|\frac{t}{t_0} - 1\right| < 1$, vers $f(t/t_0)$. Ainsi

$$\exp g(t) = |t_0| \, e^{i\theta_0} \exp f\left(\frac{t}{t_0}\right) = t_0 \frac{t}{t_0} = t. \qquad \square$$

La détermination « principale » du logarithme. Traditionnellement, il y a une détermination du logarithme considérée (ce n'est pas mon avis) comme meilleure que les autres. Commençons par définir une fonction réelle de variable réelle, la fonction arcsin (prononcer « arcsinus »).

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle admet donc une fonction réciproque strictement croissante

$$\arcsin :]-1,1[\longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[.$$

Proposition I.4.9. *Soit U_π le complémentaire dans $\mathbf{C}$ de l'ensemble des réels négatifs ou nuls. Les formules*

$$f(t) = \log|t| + i \begin{cases} \arcsin(y/|t|) & \text{si } x \geq 0 \\ \pi - \arcsin(y/|t|) & \text{si } x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ -\pi - \arcsin(y/|t|) & \text{si } x \leq 0 \text{ et } y \leq 0 \end{cases}$$

(avec $x = \operatorname{Ré} t$, $y = \operatorname{Im} t$) définissent une fonction f sur U_π qui est une détermination analytique du logarithme.

Démonstration. Montrons d'abord que ces formules définissent bien une fonction f continue sur U_π. Elle est continue sur le demi-plan $x \geq 0$ et sur chacun des deux quadrants du demi-plan $x < 0$. Il suffit de vérifier que les différentes formules donnent la même chose sur l'axe des y (privé de 0).

Si $x = 0$ et $y > 0$, la première formule donne $\log|t| + i\pi/2$ et la deuxième $\log|t| + i(\pi - \pi/2)$. De même, si $x = 0$ et $y < 0$, les première et troisième formule donnent respectivement $\log|t| - i\pi/2$ et $\log|t| - i(\pi - \pi/2)$. Donc f est bien continue sur U_π. De plus, il est clair que les formules en arcsin définissent un argument et donc que f est une détermination du logarithme sur U_π.

Il reste à vérifier qu'elle est analytique. Montrons donc qu'elle a un développement en série entière au voisinage de chaque point de U_π. Soit donc $t_0 \in U_\pi$ et soit D un disque ouvert de centre t_0 contenu dans U_π (figure 6). Le disque D est contenu dans le disque $|t - t_0| < |t_0|$ et donc, sur D, nous connaissons deux déterminations du logarithme, celle donnée par le corollaire I.4.8 et celle que nous sommes en train de considérer. En vertu de la proposition I.4.4, elles diffèrent d'un multiple de $2i\pi$. Comme l'une est analytique, l'autre l'est aussi. $\square$

Remarque I.4.10. Les formules données dans l'énoncé servent à convaincre les lecteurs que la fonction f est continue. Il est assez rare qu'on ait effectivement besoin de calculer un arcsinus pour évaluer un argument.

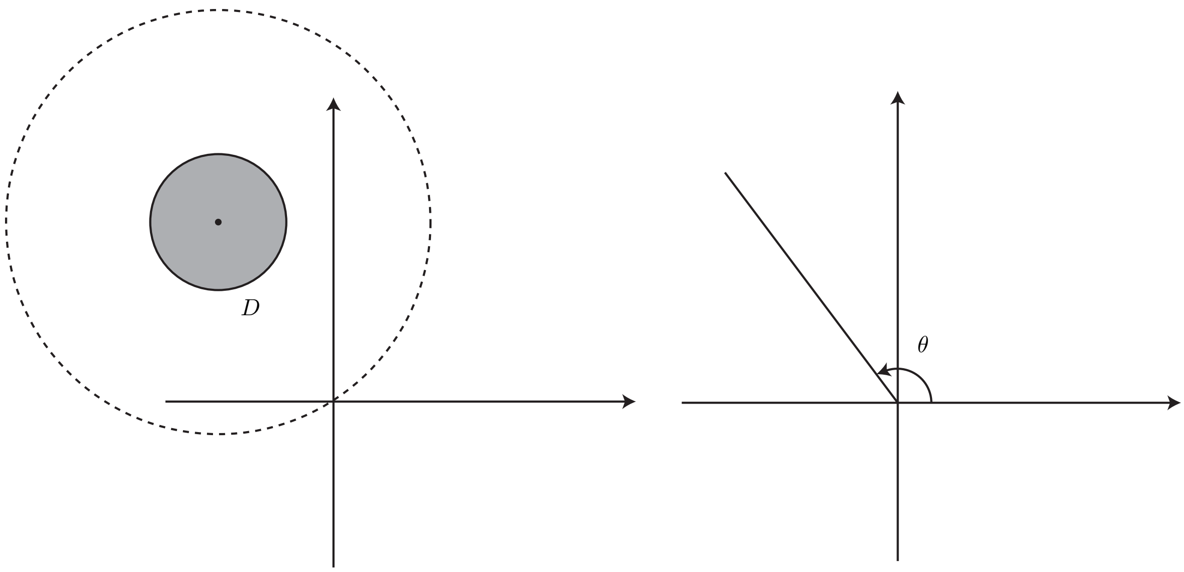


FIGURE 6.

C'est cette détermination qu'on appelle la détermination « principale » du logarithme. Mis à part le fait qu'elle coïncide avec le logarithme népérien sur les réels positifs, elle n'a vraiment rien de particulier.

Corollaire I.4.11. *Si $\theta \in \mathbf{R}$, soit U_θ l'ensemble des nombres complexes dont θ n'est pas un argument. Il existe dans U_θ des déterminations analytiques du logarithme.*

Démonstration. On ramène simplement U_θ sur U_π par une rotation. Soit $\varphi = \theta - \pi$, de sorte que la rotation

$$z \longmapsto e^{-i\varphi} z$$

envoie la demi-droite d'argument θ sur celle d'argument π ($y = 0$, $x < 0$) et U_θ sur U_π. Posons

$$g(t) = f\left(e^{-i\varphi} t\right) + i\varphi$$

où f est la fonction définie par la proposition I.4.9. Alors g est analytique sur U_θ et

$$\exp g(t) = \exp\left(f\left(e^{-i\varphi} t\right)\right) e^{i\varphi} = e^{-i\varphi} t e^{i\varphi} = t. \qquad \square$$

Racine m-ème. L'imitation de la formule

$$x^{1/m} = \exp\left(\frac{1}{m} \ln x\right)$$

montre que, s'il existe une détermination du logarithme sur un ouvert(6), il existe aussi, sur ce même ouvert, une détermination (continue ou analytique, c'est équivalent) de la racine m-ème. Voir l'exercice I.34.

(6) Grâce à la théorie des revêtements, on peut montrer la réciproque de cette assertion : les ouverts sur lesquels existe une détermination de la racine m-ème sont exactement ceux sur lesquels existe une détermination du logarithme. Voir par exemple [Aud04].

Exercices

Exercice I.1 **(Rayon de convergence, formule d'Hadamard)**. On rappelle que la limite supérieure d'une suite de nombres réels a_n est

$$\limsup a_n = \lim_{p\to\infty}\left(\sup_{n\geq p} a_n\right).$$

Vérifier qu'une telle limite supérieure (finie ou infinie) existe toujours et que si la suite est convergente, sa limite supérieure coïncide avec sa limite.

Montrer que le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie

$$\frac{1}{\rho} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Exercice I.2. Trouver les rayons de convergence des séries entières

$$\sum n!z^n,\quad \sum \frac{z^n}{n!},\quad \sum 2^{-n}z^n,\quad \sum q^{n^2}z^n,\quad \sum z^n,\quad \sum \frac{1}{n}z^n,\quad \sum \frac{1}{n^2}z^n$$

et comparer ce qui se passe pour les trois dernières quand $|z| = 1$.

Exercice I.3. Trouver les rayons de convergence des séries entières

$$\sum (\log n)^2 z^n,\quad \sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}z^n,\quad \sum n^2 z^n,\quad \sum \frac{n!}{n^n}z^n.$$

Exercice I.4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. Montrer que les séries suivantes ont le même rayon de convergence

$$\sum n a_n z^n,\quad \sum n^2 a_n z^n,\quad \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

Exercice I.5. Soient $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $T(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ deux séries entières (on remarquera que $T(0) = 0$).

(1) Montrer que l'expression $U(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (T(z))^n$ définit une série entière, que l'on note $U = S\circ T$.
(2) On suppose que les rayons de convergence $\rho(S)$ et $\rho(T)$ sont strictement positifs. Montrer qu'il en est alors de même de celui de U et que, à l'intérieur du disque de convergence de U, $U(z) = S(T(z))$.
(3) Que peut-on dire de la composée de deux fonctions analytiques ?

Exercice I.6. Soient (u_n) et (v_n) deux séries absolument convergentes. Soit

$$w_n = \sum_{0\leq p\leq n} u_p v_{n-p}.$$

Montrer que la série (w_n) est absolument convergente et que sa somme est égale au produit

$$\left(\sum_{p\geq 0} u_p\right)\left(\sum_{q\geq 0} v_q\right).$$

Exercice I.7. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{z} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n \text{ pour } |z-1| < 1,$$

$$\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n\geq 1}(n+1)(z+1)^n \text{ pour } |z+1| < 1.$$

Exercice I.8. Soit

$$f(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}[z(1-z)]^{4^n}$$

où p_n est le plus grand des coefficients apparaissant dans le développement de $[z(1+z)]^{4^n}$. On développe les termes apparaissant dans la définition de f, obtenant ainsi une série entière. Calculer son rayon de convergence. Montrer que f converge pour $|z| < 1$ et pour $|z-1| < 1$.

Exercice I.9. Montrer que la formule

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{z^n-1}{z^n+1}$$

définit une fonction sur le complémentaire du cercle unité dans $\mathbf{C}$. Existe-t-il un prolongement continu de cette fonction à $\mathbf{C}$ tout entier ?

Exercice I.10. Soit f une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Montrer que si f n'est pas constante au voisinage de $z_0 \in U$, il existe un voisinage V de z_0 sur lequel on a

$$z \in V \text{ et } f(z) = f(z_0) \Rightarrow z = z_0.$$

Exercice I.11. Avec les mêmes hypothèses, soit $u \in \mathbf{C}$. Montrer que

$$U_u = \{z \in U \mid f \text{ est constante égale à } u \text{ au voisinage de } z\}$$

est ouvert et fermé dans U.

Exercice I.12. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière dont on suppose que le rayon de convergence vaut 1 et qui vérifie

$$0 < \sum_{n\geq 2} n\,|a_n| \leq |a_1|\,.$$

Montrer que f est injective et que la série converge pour $|z| = 1$.

Exercice I.13. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. En déduire que le principe du prolongement analytique ne s'applique pas aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. En utilisant f, construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}$ qui ne satisfait pas le principe du prolongement analytique.

***Exercice I.14* (Anneau des séries formelles)**. Une *série formelle* sur le corps $\mathbf{K}$ est une expression $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$. On définit la somme et le produit de deux séries formelles par les formules

$$\sum a_n X^n + \sum b_n X^n = \sum c_n X^n \text{ avec } c_n = a_n + b_n,$$

$$\left(\sum a_n X^n\right)\cdot\left(\sum b_n X^n\right) = \sum d_n X^n \text{ avec } d_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0.$$

Montrer que l'ensemble $\mathbf{K}[[X]]$ des séries formelles est un anneau commutatif unitaire, et même une $\mathbf{K}$-algèbre, dont l'anneau des polynômes est un sous-anneau (et même une sous-algèbre).

Montrer que l'anneau des séries formelles est un anneau intègre. Quelles sont ses unités ?

Exercice I.15. Montrer que l'anneau des fonctions analytiques sur un ouvert U est un anneau intègre si et seulement si l'ouvert U est *connexe*.

Exercice I.16. Les fonctions continues sur un ouvert U forment une algèbre $\mathcal{C}(U)$. Montrer que $\mathcal{C}(U)$ n'est pas intègre. Qui sont les diviseurs de 0 ?

Exercice I.17. Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$.

(1) On suppose que f' est identiquement nulle sur U. Que peut-on dire de f ?
(2) On suppose qu'en tout point z de U, on a $f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice I.18. Démontrer l'égalité

$$e^z = e + e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

Exercice I.19. Lorsque x est réel, on sait que

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

On pose aussi, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Vérifier que cos et sin sont des fonctions analytiques sur $\mathbf{C}$, qu'elles satisfont à

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \text{ pour tout } z \in \mathbf{C},$$

que $\cos' = \sin$ et $\sin' = -\cos$ et que

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \text{ pour tout } z \in \mathbf{C},$$

enfin résoudre les équations

$$\cos z = 0, \qquad \sin z = 0.$$

Exercice I.20. On pose, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \text{ et } \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

Montrer que $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$ et que

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \text{ pour tout } z \in \mathbf{C},$$

et donner les développements en série entière de ces deux fonctions.

***Exercice I.21* (Le plus court chemin entre deux énoncés réels passe par le complexe[8])**

Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\sin z/2 \neq 0$ (et en particulier, pour tout z réel vérifiant la même propriété), on a

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cdots + \cos nz = \frac{\sin\left(n+\frac{z}{2}\right)}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

[8] Comme aurait dit (dit-on) Hadamard.

Exercice I.22. Soit $f(z) = \sin \dfrac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice I.23. Montrer que si f est une fonction analytique sur un ouvert connexe U et s'il existe un point z_0 dans U où f et toutes les dérivées de f s'annulent, f est identiquement nulle sur U.

Exercice I.24. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 et telle que

(1) Pour tout n tel que $1/n \in U$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{n}$.
(2) Pour tout n tel que $1/n \in U$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice I.25. Dessiner les images par l'exponentielle des droites issues de l'origine.

Exercice I.26. Quels sont les nombres complexes z qui vérifient $e^z = 1$? Ceux qui vérifient $e^z = w$ (pour un $w \in \mathbf{C}$ donné) ?

Exercice I.27. Montrer que $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, muni de la topologie quotient, est un espace topologique compact. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to S^1$ définie par l'exponentielle (au § I.4) est un homéomorphisme.

***Exercice I.28* (L'équation fonctionnelle de l'exponentielle)**. On suppose que f est une fonction analytique non nulle sur un ouvert connexe U contenant 0 de $\mathbf{C}$ et qu'elle vérifie, pour tous z, z' de U tels que $z + z' \in U$,

$$f(z+z') = f(z)f(z')$$

Montrer qu'il existe un nombre complexe b tel que $f(z) = e^{bz}$.

Exercice I.29. Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp z$$

(on pourra développer $(1 + z/n)^n$ par la formule du binôme).

***Exercice I.30* (La fonction zêta de Riemann)**. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $z \mapsto n^z$ est une fonction analytique sur $\mathbf{C}$ et que $|n^z| = n^{\text{Ré}(z)}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-z}$ converge uniformément sur les demi-plans

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Ré}(z) \geq 1+\varepsilon\}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et converge normalement sur

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Ré}(z) > 1\}\,.$$

La somme

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

(la *fonction zêta de Riemann*) est donc continue sur ce demi-plan.

Exercice I.31. On utilise la notation U_θ du corollaire I.4.11. On appelle log la détermination principale du logarithme (sur U_π) et f_θ celle que la démonstration de ce corollaire permet d'en déduire sur U_θ. Déterminer la différence $\log - f_\theta$ sur chacune des composantes connexes de $U_\pi \cap U_\theta$.

Exercice I.32. On considère les deux séries

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{et} \qquad f_2(z) = i\pi + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}.$$

Démontrer qu'il existe un ouvert connexe U contenant les deux disques ouverts

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} \ \text{ et } \ \{z \in \mathbf{C} \mid |z-2| < 1\}$$

et une fonction g analytique sur U telle que

$$g(z) = f_1(z) \text{ si } \ |z| < 1 \text{ et } g(z) = f_2(z) \text{ si } \ |z-2| < 1.$$

Exercice I.33. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ ne contenant pas 0. On suppose que f est une fonction analytique sur U et qu'elle vérifie

$$f'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } \exists\, t_0 \text{ tel que } \exp f(t_0) = t_0.$$

Montrer que f est une détermination du logarithme.

Exercice I.34. Soient f une fonction analytique sur un ouvert U et z_0 un point de U tel que $f(z_0) \neq 0$. Montrer que pour tout entier $m \geq 1$ il existe un voisinage ouvert V de z_0 et une fonction analytique g sur V tels qu'on ait sur V, $f(z) = g(z)^m$. Combien existe-t-il de telles fonctions ?

Exercice I.35. Déterminer une fonction continue (analytique) définie sur

$$U = \mathbf{C} - \{(x, 0) \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$$

et telle que

$$f(0) = i \text{ et } (f(z))^2 = z^2 - 1 \quad \forall\, z \in U.$$

Exercice I.36. Montrer qu'il existe une détermination f du logarithme dans

$$\mathbf{C} - \{z \mid \text{Ré}(z) = 0 \text{ et } \text{Im}(z) \leq 0\}$$

telle que $f(1) = 0$. Calculer $f(i)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(2-3i)$.

La suite d'égalités suivantes est une « démonstration » du fait que, si log est une détermination du logarithme, on a $\log(-z) = \log(z)$:

$$\begin{aligned} \log(-z)^2 &= \log(z^2) \\ \log(-z) + \log(-z) &= \log(z) + \log(z) \\ 2\log(-z) &= 2\log(z) \\ \log(-z) &= \log(z). \end{aligned}$$

Qu'en pensez-vous ?

Exercice I.37. On définit les bandes B_n (pour $n \in \mathbf{Z}$) par

$$B_n = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid (2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi\}.$$

Dans cet exercice, log désigne une détermination du logarithme sur l'ouvert U_π (par exemple la détermination « principale »). Montrer que la fonction $\log \circ \exp$ est définie (et analytique) sur $B = \cup_{n\in\mathbf{Z}} B_n$ et déterminer cette fonction.

Exercice I.38. Si log désigne la détermination principale du logarithme sur l'ouvert U_π, quelles sont les valeurs de

$$\log i, \quad \log(-i), \quad \log(-1+i), \quad i^i, \quad (-i)^i, \quad \log(-1-i)?$$

Même question, mais cette fois, log désigne la détermination du logarithme définie sur l'ouvert U_0 par

$$\log re^{i\theta} = \ln r + i\theta \text{ pour } \theta \in]0, 2\pi[.$$

Exercice I.39. Considérer les deux ouverts connexes U_1 et U_2 de la figure 7 et étudier s'il existe des déterminations continues sur U_1 et U_2 des fonctions

$$\log(z^2-1), \quad \sqrt{z^2-1}, \quad \sqrt[3]{z^2-1}, \quad \sqrt{z(z^2-1)}, \quad \sqrt[3]{z(z^2-1)}.$$

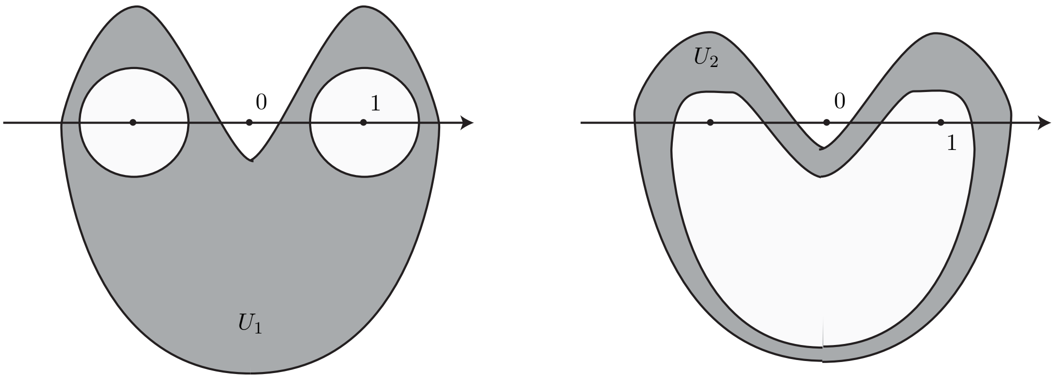


Figure 7.

Exercice I.40. On donne des nombres complexes a_0, a_1, u_1 et u_2 et on définit a_n pour $n \geq 2$ par la relation de récurrence

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2}.$$

On suppose que les deux racines α et β de l'équation

$$X^2 - u_1 X - u_2 = 0$$

sont distinctes. Montrer que l'on a

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

pour des nombres A et B que l'on déterminera. Montrer que la série entière

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge vers une fraction rationnelle. Quelle est sa décomposition en éléments simples ? Quel est le rayon de convergence de la série F ?

Exercice I.41. Quel est le rayon de convergence de la série

$$f(z) = \sum \frac{z^{2n}}{(n!)^2}?$$

Montrer que cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$zy'' + y' - 4zy = 0.$$

***Exercice I.42* (Fonctions de Bessel).** Pour tout entier $k \geq 0$, on considère la série entière

$$J_k(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k}.$$

Quel est son rayon de convergence ? Montrer que J_k est solution de l'équation différentielle

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - k^2)y = 0.$$

***Exercice I.43* (Fonctions hypergéométriques).** Soient a, b, $c \in \mathbf{C}$ (avec $-c \notin \mathbf{N}$). On pose

$$F(a,b,c,z) = 1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2+\cdots+\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n+\cdots$$

Dans le cas où $-a$, $-b \notin \mathbf{N}$ (et donc où F n'est pas un polynôme), montrer que le rayon de convergence de la série est 1.

Montrer que $F(a,b,c,z)$ est une solution de l'équation différentielle (équation hypergéométrique)

$$z(1-z)y'' + [c-(1+a+b)z]y' - aby = 0.$$

***Exercice I.44* (Nombres de Bernoulli).** Montrer que l'égalité

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

définit bien une série formelle. Les *nombres de Bernoulli* B_n sont alors définis par cette égalité. Montrer que la suite des nombres de Bernoulli n'est pas bornée.

Montrer qu'ils satisfont à la relation

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

et que ce sont des nombres rationnels. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. Montrer que $B_n = 0$ si n est impair ≥ 3.

Montrer l'égalité

$$\frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

et en déduire

$$\pi z \operatorname{cotan} \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$$

Exprimer les développements en série entière de $\tan z$ (on pourra démontrer et utiliser le fait que $\tan z = \operatorname{cotan} z - 2 \operatorname{cotan} 2z$), $z/\sin z$ (et celui que $\operatorname{cotan} z + \tan z/2 = 1/\sin z$) en termes des nombres de Bernoulli[9].

***Exercice I.45* (Une topologie sur l'anneau des séries formelles).** Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et soit $\mathbf{K}[[X]]$ l'anneau des séries formelles sur $\mathbf{K}$. Si

$$S \in \mathbf{K}[[X]], \quad S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n,$$

[9] Les nombres de Bernoulli interviennent dans la valeur de $\zeta(2k) = \sum n^{-2k}$, voir l'exercice VI.2.

on appelle $\omega(S)$ le plus petit des entiers n tels que $a_n \neq 0$. Pour S, T dans l'anneau $\mathbf{K}[[X]]$, on pose

$$d(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = T, \\ e^{-k} & \text{si } \omega(S-T) = k. \end{cases}$$

(1) Montrer que d définit une distance sur $\mathbf{K}[[X]]$ et que les applications

$$(S,T) \longmapsto S+T \text{ et } (S,T) \longmapsto ST$$

de $\mathbf{K}[[X]] \times \mathbf{K}[[X]]$ dans $\mathbf{K}[[X]]$, sont continues pour la topologie définie par d.

(2) L'application $S \mapsto S'$ est-elle continue ?

(3) Montrer que l'anneau des polynômes $\mathbf{K}[X]$ est dense dans $\mathbf{K}[[X]]$.

(4) Soit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbf{K}[[X]]$. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, et pour n assez grand, les m premiers termes de la série formelle S_n ne dépendent pas de n.

(5) Montrer que $\mathbf{K}[[X]]$ est un espace (métrique) complet.

CHAPITRE II

FONCTIONS HOLOMORPHES

Dans ce chapitre, on définit les fonctions *holomorphes*, qui sont les fonctions dérivables au sens complexe (la définition précise est II.1.1). Nous avons déjà rencontré cette notion dans la proposition I.3.1, que nous allons exprimer ici en disant que les fonctions analytiques sont holomorphes.

Le but principal de ce chapitre est de démontrer la réciproque de cette propriété : pour qu'une fonction soit analytique, c'est-à-dire somme de sa série de Taylor en tout point, il *suffit* qu'elle soit holomorphe (dérivable une fois) !

Ce résultat remarquable (et sans analogue en analyse réelle) a de nombreuses applications, nous étudierons les plus classiques : le principe du module maximum, le théorème de d'Alembert-Gauss, le théorème de Liouville.

II.1. Définition des fonctions holomorphes

Applications linéaires de C dans lui-même. Une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même peut être décrite, par exemple, par sa matrice dans la base canonique. C'est une matrice carrée d'ordre 2. Elle contient donc quatre coefficients réels.

Une application linéaire (sur $\mathbf{C}$) de $\mathbf{C}$ dans lui-même est, elle, de la forme $z \mapsto az$, elle est donc définie par un nombre complexe unique, ou, si l'on préfère, par deux nombres réels.

Identifions $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$ en envoyant les vecteurs de la base canonique sur 1 et i. Il faut faire un peu attention en parlant d'applications linéaires : il y a des applications linéaires sur $\mathbf{R}$ (un espace vectoriel réel de dimension 4) et des applications linéaires sur $\mathbf{C}$ (un espace vectoriel complexe de dimension 1).

Les applications $\mathbf{C}$-linéaires sont, en particulier, des applications $\mathbf{R}$-linéaires. Si $a = u + iv$, l'application $z \mapsto az$ s'écrit, en termes réels

$$(x, y) \longmapsto (\mathrm{Ré}(a(x+iy)), \mathrm{Im}(a(x+iy))) = (ux - vy, vx + uy).$$

La matrice de cette application linéaire est donc $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. Inversement, on peut caractériser les matrices des applications $\mathbf{C}$-linéaires parmi celles des applications $\mathbf{R}$-linéaires comme les matrices de cette forme.

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Définition II.1.1. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est *dérivable au sens complexe* en $z \in U$ si la limite

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe. Si cette limite existe pour tout point z de U et si la fonction $f' : U \to \mathbf{C}$ qu'elle définit est *continue* sur U, on dit que f est *holomorphe* sur U.

La condition d'existence de la limite s'écrit aussi :

$$f(z+h) - f(z) = f'(z) \cdot h + \alpha(h)\,|h| \text{ où } \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0.$$

On remarquera que c'est exactement la définition d'une fonction différentiable : un terme linéaire plus des termes qui tendent vers 0 assez vite... à cela près que le terme linéaire est un terme $\mathbf{C}$-linéaire.

Remarque II.1.2. C'est une excellente raison de demander, comme nous l'avons fait, dans la définition d'une fonction holomorphe, que la dérivée soit continue. Cette demande n'est pas universelle, on ne la trouvera pas dans tous les livres. Elle a aussi l'avantage de permettre une démonstration très simple de l'analyticité des fonctions holomorphes (le théorème II.2.1 ci-dessous) et donc d'amener très vite aux grands et beaux théorèmes sur les fonctions holomorphes (ici au § II.3). Nous démontrerons plus loin (ce sera le théorème III.3.11) que les fonctions dérivables au sens complexe (sans plus d'hypothèses) sont bien holomorphes (au sens fort utilisé dans ces notes).

Comme on l'a fait ci-dessus pour les applications linéaires, on peut caractériser les fonctions dérivables au sens complexe parmi les fonctions différentiables en un point de $\mathbf{R}^2$. Écrivons donc $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ et rappelons ce qu'est une fonction différentiable, au sens usuel, de U dans $\mathbf{C}$:

$$f(x+k, y+\ell) - f(x,y) = a \cdot k + b \cdot \ell + \beta(k,\ell)\sqrt{k^2+\ell^2} \text{ avec } \lim_{(k,\ell)\to 0} \beta(k,\ell) = 0.$$

Ici a et b sont des nombres complexes, $a = \partial f/\partial x(x,y)$, $b = \partial f/\partial y(x,y)$ parce que f est à valeurs dans $\mathbf{C}$, mais l'application linéaire

$$(k,\ell) \longmapsto (a \cdot k, b \cdot \ell)$$

est $\mathbf{R}$-linéaire. L'application f sera dérivable au sens complexe si et seulement si elle est différentiable et

$$\frac{\partial f}{\partial x} k + \frac{\partial f}{\partial y} \ell = f'(z)(k + i\ell) \text{ pour tous } k, \ell.$$

Ceci peut s'écrire

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad i f'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

ou, de façon équivalente

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On peut aussi considérer que l'espace d'arrivée de f est $\mathbf{R}^2$ plutôt que $\mathbf{C}$, c'est-à-dire écrire $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où P et Q sont des fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

L'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Cette équation est en fait composée de deux équations réelles, les célèbres équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Au risque de me répéter, ces deux équations signifient simplement que la matrice jacobienne de

$$(x,y) \longmapsto (P(x,y), Q(x,y))$$

est la matrice d'une application **C**-linéaire, c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

En conclusion :

Proposition II.1.3. *Pour que $f : U \to \mathbf{C}$ soit dérivable au sens complexe en un point, il faut et il suffit qu'elle y soit différentiable comme fonction de deux variables réelles et que ses dérivées partielles en ce point vérifient les équations de Cauchy-Riemann.* □

Propriétés des fonctions holomorphes. On démontre facilement les propriétés rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition II.1.4. *Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur U est une algèbre sur $\mathbf{C}$. De plus, si $\lambda \in \mathbf{C}$ et si f et g sont holomorphes sur U,*

(1) $(\lambda f)' = \lambda f'$,
(2) $(f+g)' = f' + g'$,
(3) $(fg)' = f'g + fg'$.
(4) *Si de plus f ne s'annule pas sur U, $1/f$ est holomorphe sur U et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Si f est holomorphe sur U et si g est holomorphe sur un ouvert U' et prend ses valeurs dans U, alors $f \circ g$ est holomorphe sur U' et

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$ □

Remarque II.1.5. La composée de deux fonctions holomorphes est une fonction holomorphe, affirme l'énoncé précédent. On sait que la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$. On utilisera aussi le cas où f est holomorphe sur U et où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert I de $\mathbf{R}$ dans U. Alors, $f \circ g$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée (comme fonction de variable réelle) s'exprime par la formule

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Formulation géométrique. Tous les élèves de terminale savent[(1)] qu'une application **C**-linéaire de **C** dans lui-même ($z \mapsto az$) est une similitude (si elle n'est pas nulle). Ceci se traduit ici par « les fonctions holomorphes conservent les angles ». Précisons le sens de cette phrase. On suppose que γ_1 et γ_2 sont deux courbes de classe $\mathcal{C}^1$ dessinées dans un ouvert U de **C** qui se coupent en un point z_0 de U :

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \xrightarrow{\gamma_1} & U \\ t & \longmapsto & \gamma_1(t) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [0,1] & \xrightarrow{\gamma_2} & U \\ t & \longmapsto & \gamma_2(t) \end{array} \quad \text{avec } \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0.$$

On suppose aussi qu'elles ont un vecteur tangent en z_0, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(t_0) \neq 0 \text{ et } \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0) \neq 0.$$

[(1)]... et donc aucun étudiant de licence ne peut avoir oublié...

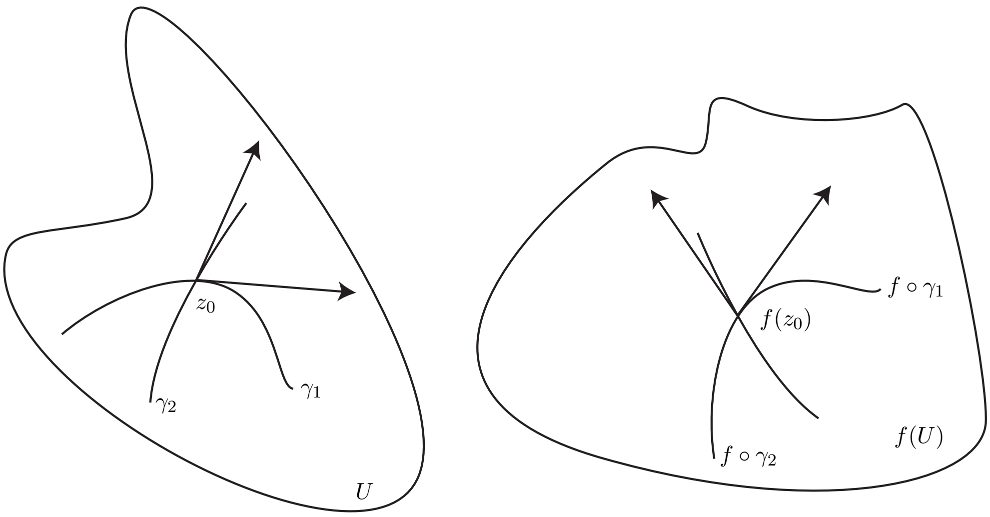


FIGURE 1.

On regarde maintenant leurs images par une fonction holomorphe $f : U \to \mathbf{C}$, les deux courbes $f\circ\gamma_1$ et $f\circ\gamma_2$ dessinées dans $f(U)$. Elles se coupent en $f(z_0)$. Leurs vecteurs tangents en ce point vérifient l'égalité

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_1)(t_0) = (f'\circ\gamma_1)(t_0)\cdot\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)(t_0).$$

On a bien sûr

$$(f'\circ\gamma_1)(t_0) = f'(z_0).$$

On voit ainsi que le vecteur tangent à la courbe $f\circ\gamma_1$ est l'image par l'application linéaire « multiplication par $f'(z_0)$ » du vecteur tangent à γ_1. De même pour le vecteur tangent à $f\circ\gamma_2$. Si on suppose que $f'(z_0)$ n'est pas nul, cette application linéaire est une similitude et donc l'angle des courbes images $f\circ\gamma_1$ et $f\circ\gamma_2$ est le même que celui des courbes originelles.

Exemple II.1.6. Les droites parallèles à l'axe des x sont orthogonales aux droites parallèles à l'axe des y. L'exponentielle envoie l'une de ces familles de droites sur la famille des cercles centrés en 0 et l'autre sur la famille des demi-droites issues de l'origine (figure 3 du chapitre I). Chacune des demi-droites est bien orthogonale à chacun des cercles. Voir aussi les exercices II.18 et II.19... et revoir l'exercice I.25.

Holomorphie des fonctions analytiques. La proposition I.3.1 affirme que les séries entières sont dérivables au sens complexe. On en déduit que les fonctions analytiques sont holomorphes. La réciproque est plus étonnante. C'est elle qu'on démontre dans le paragraphe suivant.

II.2. Analyticité des fonctions holomorphes

Il est remarquable que la dérivabilité au sens complexe implique l'analyticité, c'est-à-dire une propriété encore plus forte que la dérivabilité de tous ordres.

***Théorème II.2.1* (Cauchy)**. *Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon ρ. Alors*

– *le nombre*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it}+z_0)e^{-int}\,dt$$

ne dépend pas *du choix de* $r < \rho$ *;*
- *la série entière* $\sum a_n z^n$ *a un rayon de convergence au moins égal à* ρ *;*
- *on a l'égalité*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ pour } |z - z_0| < \rho.$$

Démonstration. On commence par faire un changement de variable pour se ramener au cas où $z_0 = 0$, ce qu'on suppose désormais.

Soit z un point du disque ouvert de rayon ρ et soit r tel que $|z| < r < \rho$. Considérons la fonction $g : [0, 1] \to \mathbf{C}$ définie par

$$g(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{f[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}] - f(z)}{re^{it} - z} re^{it}\, dt.$$

La fonction de (λ, t) figurant dans l'intégrale est continue et différentiable (z est fixé et le dénominateur ne s'annule pas) donc g est continue, dérivable et sa dérivée est donnée par

$$g'(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}] re^{it}\, dt$$

(ici on a utilisé le fait que f' est continue, voir la remarque II.1.2). Mais l'expression figurant dans cette dernière intégrale est nulle : ce que l'on intègre est la dérivée par rapport à t de

$$F(t) = \frac{1}{\lambda i} f[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}],$$

qui est périodique de période 2π. Ainsi, pour $\lambda \neq 0$,

$$g'(\lambda) = F(2\pi) - F(0) = 0.$$

Comme sa dérivée est identiquement nulle sur $]0, 1]$, g est constante sur $[0, 1]$. Comme $g(0) = 0$, la constante est nulle. En particulier $g(1) = 0$, ce qui s'écrit

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) - f(z)}{re^{it} - z} re^{it}\, dt = 0$$

ou encore

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} f(re^{it})\, dt.$$

Rappelons-nous maintenant que $r > |z|$ donc

$$\frac{re^{it}}{re^{it} - z} = 1 + \frac{z}{re^{it}} + \cdots + \left(\frac{z}{re^{it}}\right)^n + \cdots$$

et cette série converge normalement pour tout $t \in \mathbf{R}$. On peut l'intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z}\, dt = 2\pi.$$

Enfin, la fonction de variable réelle $f(re^{it})$ est bornée, donc on peut aussi intégrer terme à terme son produit avec le développement en série ci-dessus. On obtient ainsi l'égalité

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} f(re^{it})\, dt = \sum_{n \geq 0} z^n \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}}\, dt$$

soit, avec les notations de l'énoncé :

$$f(z) = \sum a_n z^n.$$

Ceci étant dit, la démonstration est terminée : le fait que a_n ne dépend pas de r est conséquence de l'unicité du développement en série entière de la fonction f. □

Remarque II.2.2. Avec $z_0 \neq 0$, l'avant-dernière égalité, une formule très utile, devient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} \, dt.$$

***Corollaire II.2.3* (Formule de Cauchy)**. *Si f est une fonction holomorphe sur un disque de centre z_0 et de rayon r, on a, pour tout z dans ce disque,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} \, dt. \qquad \square$$

Un autre résultat remarquable contenu dans le théorème de Cauchy (théorème II.2.1) est le suivant :

Corollaire II.2.4. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ et soit z_0 un point de U. La fonction f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur tous les disques de centre z_0 contenus dans U.* $\square$

Exemple II.2.5. Pensons à la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

qui est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{1\}$ et dont la série de Taylor en 0 (pour mémoire, $\sum z^n$) a un rayon de convergence égal à 1 (la distance de 0 à 1, le rayon du plus grand disque de centre 0 contenu dans $\mathbf{C} - \{1\}$).

Remarque II.2.6. Soient f une fonction analytique sur un ouvert U et g une fonction holomorphe sur un ouvert V contenant $f(U)$. Alors f et g sont holomorphes sur U et V respectivement (dérivabilité des fonctions analytiques, proposition I.3.1), la composée $g \circ f$ est holomorphe (comme composée de fonctions holomorphes, proposition II.1.4), et donc analytique (les fonctions holomorphes sont analytiques, théorème II.2.1). On a ainsi (enfin...) démontré que la composée de deux fonctions analytiques est analytique (voir la note 5 du chapitre I et l'exercice I.5).

Corollaire II.2.7. *Sur le cercle de convergence d'une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$, il y a toujours au moins un point* singulier *au sens où il n'existe pas de fonction holomorphe définie au voisinage de ce point et qui coïncide avec f là où toutes les deux sont définies.*

Démonstration. Appelons $D(z_0, \rho)$ le disque de convergence de notre série. S'il ne contenait aucun point singulier, on aurait, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, l'existence d'un $r(z) > 0$ et d'une fonction g_z holomorphe sur $D(z, r(z))$ telle que

$$g_z|_{D(z,r(z)) \cap D(z_0,\rho)} = f|_{D(z,r(z)) \cap D(z_0,\rho)}.$$

Par compacité, un nombre fini de tels disques, disons $D_1, \ldots, D_n$, suffit à recouvrir le cercle de convergence. Définissons une fonction $\widetilde{f}$

$$\widetilde{f} : D_1 \cup \cdots \cup D_n \cup D(z_0, \rho) \longrightarrow \mathbf{C}$$

par

$$\widetilde{f}(w) = \begin{cases} f(w) & \text{si } w \in D(z_0, \rho) \\ g_{z_i}(w) & \text{si } w \in D_i = D(z_i, r(z_i)). \end{cases}$$

Cette fonction est holomorphe, coïncide avec f sur le disque de convergence de cette dernière, mais est holomorphe sur un disque $D(z_0, \rho')$ avec $\rho' > \rho$, en contradiction avec la définition de ρ. $\square$

Les inégalités de Cauchy. Le théorème précédent, qui calculait les coefficients de la série de Taylor de la fonction holomorphe f, permet donc d'exprimer les dérivées successives de f en z_0 par les intégrales

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}+z_0)}{r^n e^{int}}\,dt.$$

On en déduit par une simple majoration :

Proposition II.2.8 **(Inégalités de Cauchy)**. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans U. Pour tout entier n, on a l'inégalité*

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| \leq r^{-n} \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|f(z_0+re^{it})\right|.$$

Démonstration. Utilisons les notations du théorème précédent. Il faut majorer les $|a_n|$. Mais

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}+z_0)}{r^n e^{int}}\,dt\right| &\leq r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(re^{it}+z_0)}{e^{int}}\right| dt\\ &\leq r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it}+z_0)\right| dt\\ &\leq r^{-n}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left|f(re^{it}+z_0)\right|.\end{aligned}$$

□

On peut démontrer un résultat un peu plus précis :

Proposition II.2.9. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Soit z_0 un point de U et soit $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans U. Alors on a*

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt.$$

Remarque II.2.10. Comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt \leq \sup_{t\in[0,2\pi]}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2,$$

cette égalité implique les inégalités de Cauchy.

Démonstration. Il s'agit d'une simple application de la formule de Parseval à la série

$$f(z_0+re^{it}) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)r^n e^{int}$$

(qui converge uniformément en t). Pour ceux qui ignoreraient cette formule, voici une démonstration (équivalente !).

Comme U est ouvert, on peut inclure le disque fermé dans un disque ouvert de rayon $\rho > r$ qui soit encore contenu dans U. D'après le théorème de Cauchy (théorème II.2.1), la série de Taylor de f a un rayon de convergence au moins égal à ρ et converge uniformément sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r. On peut donc écrire

$$f(z_0+re^{it}) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)r^n e^{int}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 &= \left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)r^n e^{int}\right)\left(\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\overline{f^{(m)}(z_0)}r^m e^{-imt}\right)\\ &= \sum_{n,m\geq 0}\frac{1}{n!m!}f^{(n)}(z_0)\overline{f^{(m)}(z_0)}r^{n+m}e^{i(n-m)t}.\end{aligned}$$

Si on intègre les deux membres sur $[0, 2\pi]$ en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi & \text{si } n=m\\ \displaystyle\frac{1}{i(n-m)}\left[e^{i(n-m)t}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{par périodicité si } n\neq m\end{cases}$$

on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}r^n\right)^2\left|f^{(n)}(z_0)\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right|^2 r^{2n}.$$ □

II.3. Les grands théorèmes sur les fonctions holomorphes

Le théorème de Liouville. En plus d'être un résultat remarquable et intéressant en lui-même, le théorème de Cauchy (théorème II.2.1) a de nombreuses conséquences spectaculaires.

On appelle les fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ tout entier (comme les polynômes, l'exponentielle, *etc.*) des fonctions *entières*.

Théorème II.3.1. *Toute fonction entière et bornée est constante.*

Démonstration. C'est une application simple des inégalités de Cauchy (c'est-à-dire de la proposition II.2.8). Supposons que la fonction f soit entière et bornée. Soit M un majorant de $|f|$. D'après les inégalités de Cauchy (en $z_0 = 0$), on a

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\right| \leq Mr^{-n} \text{ pour } \textit{tout } r$$

donc $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et le développement de Taylor de f en 0 est réduit à son terme constant. Comme f est holomorphe, elle est somme de sa série de Taylor en 0 sur un voisinage de 0, donc constante au voisinage de 0. Le principe du prolongement analytique (théorème I.2.4) dit alors que f est constante sur $\mathbf{C}$. □

Le corollaire le plus célèbre est le soi-disant « théorème fondamental de l'algèbre[(2)] », qui affirme que $\mathbf{C}$ est un corps algébriquement clos, c'est-à-dire que les polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$ sont les polynômes de degré 1.

***Corollaire II.3.2* (Théorème de d'Alembert-Gauss)**. *Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme. Si P n'a pas de racine dans $\mathbf{C}$, alors il est constant.*

[(2)] Toutes les démonstrations doivent faire appel à l'analyse, parce qu'il faut bien faire la différence entre $\mathbf{C}$ et $\mathbf{Q}[i]$. Il en existe qui en utilisent assez peu, par exemple le fait que tout polynôme réel de degré impair a une racine réelle (une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires). Celle proposée ici est la moins algébrique de toutes, et aussi la plus courte. On en trouvera quatre, dont la « nôtre » est la plus courte, sur une seule des pages de [Rem91].

Démonstration. Supposons que P soit un polynôme sans racine. Alors $1/P$ est une fonction entière. Montrons qu'elle est bornée. Si n est le degré de P, on a

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

avec $a_n \neq 0$, donc $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$. On peut donc trouver un disque fermé D tel que

- en dehors de D, la fonction $1/|P|$ est bornée (parce que $|P|$ tend vers $+\infty$)
- dans D, elle est bornée aussi (parce qu'elle est continue et D compact).

Comme $1/P$ est entière et bornée, elle est constante, ainsi P est constant et donc de degré 0. □

On trouvera une autre démonstration (peut-être un peu moins mystérieuse) de ce théorème dans les exercices du chapitre III.

Le principe du maximum. Il s'agit du résultat remarquable suivant.

***Théorème II.3.3* (Principe du module maximum).** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. On applique l'inégalité de Cauchy correspondant à $n = 0$. On a donc :

$$|f(z)| \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| f(z + re^{it}) \right|$$

pour tout z dans U et tout $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z et de rayon r soit contenu dans U.

Supposons maintenant que $|f|$ admette un maximum local en z_0. On aura $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ pour tout z dans un voisinage de z_0 et en particulier sur un disque fermé de centre z_0 et de rayon suffisamment petit. Sur un tel disque, l'inégalité de Cauchy ci-dessus est donc forcément une égalité.

Examinons le cas d'égalité, cas où

$$|f(z_0)| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| f(z_0 + re^{it}) \right|,$$

ce qui implique en particulier que

$$|f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{it}) \right|^2 dt.$$

Mais alors, le raffinement des inégalités de Cauchy exprimé par la proposition II.2.9 implique que toutes les dérivées successives de f en z_0 sont nulles. Donc f, qui est somme de sa série de Taylor en z_0 au voisinage de z_0 est constante au voisinage de z_0 et donc (principe du prolongement analytique I.2.4), elle est constante sur l'ouvert connexe U. □

On peut considérer le graphe de $|f|$ comme une surface dans $U \times \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$, que l'on appelle parfois le *paysage analytique*(3) de f. Le principe du module maximum affirme que, dans le paysage analytique d'une fonction holomorphe, il n'y a pas de sommet.

Le principe du maximum oblige le module d'une fonction holomorphe non constante à ne pas avoir de maximum local sur un ouvert connexe. Mais une fonction holomorphe est continue, et, pour peu qu'elle soit définie un peu au-delà de l'ouvert considéré et que celui-ci soit borné, son module va avoir un maximum sur l'adhérence. Ce maximum va donc forcément être atteint sur le bord. Dans le paysage analytique d'une fonction holomorphe, les sommets sont à l'horizon. Ce qu'affirme en termes plus précis le corollaire suivant.

(3) Voir les élégantes figures, dues à J. F. Colonna, qui illustrent la couverture de [SB03]. On peut compléter ce paysage en représentant l'argument de f par une couleur — une idée efficace et belle, utilisée sur la couverture de ce cours.

***Corollaire II.3.4* (Principe du module maximum, deuxième version).** *Soit U un ouvert connexe et borné dans $\mathbf{C}$. Soit f une fonction définie et continue sur l'adhérence $\overline{U}$ de U et holomorphe sur U. Soit M le maximum de $|f|$ sur la frontière de U. Alors on a*

- *pour tout $z \in U$, $|f(z)| \leq M$;*
- *si $|f(z_0)| = M$ pour un $z_0 \in U$, f est constante sur U.*

Démonstration. La frontière de U est une partie compacte de $\mathbf{C}$, ce qui fait que la fonction continue $|f|$ y a un maximum. D'où l'existence de M. Appelons M' le maximum de $|f|$ sur $\overline{U}$, qui existe pour la même raison.

- Si un des points z_0 où le maximum est atteint est dans l'ouvert U, f est constante sur U d'après la première version du principe du maximum (théorème II.3.3), donc $f(z) = f(z_0)$ pour tout z de U. Comme f est continue sur $\overline{U}$, on a aussi $f(z) = f(z_0)$ pour tout z de $\overline{U}$ et en particulier les deux assertions de l'énoncé.
- Si aucun des points où le maximum est atteint n'est dans U, appelons z_0 un de ces points ($z_0 \in \overline{U} - U$). On a, pour tout z dans U,
$$|f(z)| < |f(z_0)|\,.$$
On a évidemment $M \leq M'$ en général, mais ici $|f(z_0)| = M' = M$. En particulier
$$|f(z)| \leq |f(z_0)| = M \text{ pour tout } z \in U,$$
ce qui est la première assertion à démontrer. De plus $|f(z)| \neq M$ pour tout z dans U donc la deuxième est automatique. □

Le théorème de l'application ouverte. Les équations de Cauchy-Riemann empêchent une fonction holomorphe d'avoir une image trop petite (contenue dans une droite réelle, par exemple, voir l'exercice II.13). On montre ici que l'image d'un ouvert par une application analytique (ou, donc, holomorphe) non constante est un ouvert.

Théorème II.3.5. *Toute fonction holomorphe non constante est une application ouverte.*

Démonstration. Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$. Nous voulons montrer que l'image de tout ouvert dans U est un ouvert, c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points. Soit $z_0 \in U$. Il s'agit donc de montrer que, au moins pour r assez petit,
$$f(U) \supset D(f(z_0), r).$$
Au voisinage de z_0, on peut écrire
$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= f(z_0) + (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$
où $b_0 = a_m \neq 0$ est le premier des a_n ($n \geq 0$) non nuls, ce qu'on peut donc aussi écrire, plus simplement
$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^m g(z)$$
pour un certain entier $m \geq 1$ et une fonction analytique g vérifiant $g(z_0) \neq 0$. Soit V un voisinage de $g(z_0)$ dans $\mathbf{C} - \{0\}$ sur lequel existe une détermination h de la racine m-ème (par exemple, un

petit disque centré en $g(z_0)$). Sur l'ouvert $g^{-1}(V)$, on a $h(g(z))^m = g(z)$ et donc, en posant $\varphi(z) = (z - z_0)h(g(z))$,

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m, \text{ avec } \varphi'(z_0) = h(g(z_0)) \neq 0.$$

L'application φ, dont la différentielle en z_0 est une application linéaire complexe inversible, est donc un difféomorphisme local (en vertu du théorème d'inversion locale), difféomorphisme d'un voisinage $\mathcal{U}$ de z_0 sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $\varphi(z_0) = 0$.

Nous voulons montrer que, pour r assez petit, le disque $D(f(z_0), r)$ est contenu dans l'image de f. Choisissons $r > 0$ tel que $\mathcal{V}$ contienne le disque de rayon $\sqrt[m]{r}$. Soit $w \in D(f(z_0), r)$. Montrons que w est dans l'image de f. Soit v une racine m-ème de $w - f(z_0)$. On a

$$v^m = w - f(z_0), \text{ donc } |v|^m < r$$

et v est dans le disque $D(0, \sqrt[m]{r})$. Donc $v = \varphi(z)$ pour un (unique) z dans un voisinage de z_0 et

$$w - f(z_0) = v^m = \varphi(z)^m \text{ donc } w = f(z),$$

ce que nous voulions démontrer. □

La démonstration qui suit du même théorème n'utilise pas l'inversion locale mais plutôt le principe du maximum. Elle m'a été proposée et rédigée par Arnaud Mortier.

Une autre démonstration du théorème de l'application ouverte. Supposons que U soit un ouvert dont l'image $f(U)$ n'est pas un ouvert. Il existe donc un point x de U tel que $f(U)$ n'est pas voisinage de $f(x)$. C'est dire qu'il existe une suite (α_n) de nombres complexes qui ne sont pas dans $f(U)$ et qui tend vers $f(x)$. Pour chaque n, la fonction

$$g_n(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha_n}$$

est donc holomorphe sur U.

Utilisons l'hypothèse que U est ouvert. Il est en particulier voisinage de x. Utilisons aussi le fait que f est analytique et n'est pas constante sur U. Il existe donc un nombre réel positif r tel que $\overline{D}(x, r) \subset U$ et

$$\forall\, z \in \overline{D}(x, r) \text{ avec } z \neq x, f(z) \neq f(x)$$

(x est un zéro isolé de $f(z) - f(x)$).

La fonction g_n est bornée sur le disque compact $\overline{D}(x, r)$ et, en vertu du principe du maximum, son module atteint son maximum sur le bord de ce disque. On a donc ainsi, pour tout n, un z_n sur le cercle de centre x et de rayon r, tel que

$$\text{si } z \in \overline{D}(x, r), \frac{1}{|f(z) - \alpha_n|} \leq \frac{1}{|f(z_n) - \alpha_n|}, \text{ et en particulier } \quad \frac{1}{|f(x) - \alpha_n|} \leq \frac{1}{|f(z_n) - \alpha_n|}.$$

Comme le cercle est compact, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout z dans ce cercle, $|f(z) - f(x)| \geq \varepsilon$ (sinon, il y aurait une suite, disons β_n de points du cercle tels que $f(\beta_n)$ converge vers $f(x)$, la suite β_n elle-même, après extraction d'une sous-suite, convergerait vers une limite β qui ne pourrait manquer de vérifier $f(\beta) = f(x)$, ce que nous avons exclu en choisissant r). On a en particulier, pour tout n, $|f(x) - f(z_n)| \geq \varepsilon$. Pour n assez grand, on a aussi $|\alpha_n - f(x)| \leq \varepsilon/2$, de sorte que, pour n assez grand, on a

$$|f(z_n) - \alpha_n| \geq \varepsilon/2.$$

Ce dont on déduit que

$$\frac{1}{|f(x) - \alpha_n|} \leq \frac{1}{|f(z_n) - \alpha_n|} \leq \frac{2}{\varepsilon} \text{ avec un } \varepsilon \text{ indépendant de } n,$$

ce qui contredit le fait que $1/|f(x)-\alpha_n|$ tend vers l'infini. □

Exercices

Exercice II.1. Une application **R**-linéaire $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est **C**-linéaire si et seulement si elle commute avec la multiplication par i. Lorsque c'est le cas, on a $\varphi(z) = \varphi(1)z$.

Exercice II.2. Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe en z_0 (pour tout $z_0 \in \mathbf{C}$).

Exercice II.3. Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur leur domaine de définition et qu'elles satisfont aux équations de Cauchy-Riemann

$$f(z) = z^3, \quad f(z) = \frac{1}{z+1}, \quad f(z) = \frac{e^z}{z}, \quad f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

Exercice II.4. Parmi les fonctions suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans **C**, lesquelles sont dérivables au sens complexe ?

(1) $x^4y^5 + ixy^3$,
(2) $y^2 \sin x + iy$,
(3) $\sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)$,
(4) $e^x \cos y - 2xy + i(e^x \sin y + x^2 - y^2)$,
(5) $-6(\cos x + i \sin y) + (2-2i)y^3 + 15(y^2+2y)$.

Exercice II.5. On définit les « opérateurs différentiels » (s'appliquant à des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ dans **C**)

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ et } \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ et à valeurs dans **C**. Montrer que f est holomorphe en $z_0 \in U$ si et seulement si $\left(\overline{\partial} f\right)(z_0) = 0$. Que vaut $(\partial f)(z_0)$ dans ce cas ?

Exercice II.6. Soit f une fonction de **C** dans **C** qui est polynomiale en x et y. Montrer que f est holomorphe si et seulement si c'est un polynôme en z.

Exercice II.7. Quelles sont toutes les fonctions holomorphes sur **C** dont la partie réelle est la fonction

$$z = x + iy \longmapsto 2xy?$$

Exercice II.8. Construire une fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, polynomiale en x et y, telle que l'ensemble des z en lesquels f est dérivable au sens complexe soit la réunion

$$\{0\} \cup \{z \mid |z| = 1\}$$

et telle que $f'(0) = 0$.

Exercice II.9. Pour chacune des fonctions $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ suivantes, trouver une fonction $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ telle que $u + iv$ soit holomorphe.

(1) $u(x+iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2$,
(2) $u(x+iy) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{-y}\cos x$.

Exercice II.10. Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe si et seulement si elle vérifie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(on dit que u est *harmonique*).

Montrer que la fonction $u(z) = \ln |z|$ est harmonique sur $\mathbf{C} - \{0\}$, mais qu'elle n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Exercice II.11. On considère la forme différentielle(4)

$$\alpha = (P(x, y) + iQ(x, y))(dx + idy).$$

Montrer que P et Q satisfont les équations de Cauchy-Riemann si et seulement si cette forme est fermée.

Exercice II.12. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$. On suppose que la partie réelle de f est constante. Montrer que f est constante.

Exercice II.13. Est-ce qu'une fonction holomorphe sur un ouvert non vide U de $\mathbf{C}$ peut ne prendre que des valeurs réelles ? Est-ce que son image peut être contenue dans une droite (réelle, c'est-à-dire d'équation $y = ax + b$, a, $b \in \mathbf{R}$) ?

Exercice II.14. Montrer que $z \mapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe, de même que $\operatorname{Ré} z$, $\operatorname{Im} z$.

Exercice II.15. La fonction f définie sur $\mathbf{C} - \{0\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ est-elle holomorphe ? Quelle est sa différentielle ? Montrer que f conserve les angles non orientés.

Exercice II.16. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, invariant par conjugaison complexe (c'est-à-dire tel que $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$). Soit f une fonction holomorphe sur U. On définit, pour $z \in U$,

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Montrer que g est holomorphe sur U.

Exercice II.17. Quelle est l'image de

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$

par l'application $z \mapsto 1/z$?

Exercice II.18. Dessiner les images des droites parallèles aux axes par la fonction $z \mapsto z^2$.

Exercice II.19. Dessiner les images des droites parallèles aux axes par la fonction $z \mapsto \sin z$.

Exercice II.20. Dessiner les images des cercles centrés en 0 et des demi-droites (ouvertes) issues de l'origine par l'application g

$$z \longmapsto g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Déterminer l'image V du « demi-plan de Poincaré »

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Montrer que $g|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to V$ est bijective est que son inverse est la fonction analytique

$$u(z) = z + f(z)$$

(4) Pour ceux qui savent ce que c'est. Les autres peuvent passer.

où f est celle des déterminations de $\sqrt{z^2-1}$ définies dans l'exercice I.34 pour laquelle $f(0) = i\pi/2 \in \mathcal{H}$.

Exercice II.21. Trouver une application holomorphe bijective $\mathcal{H} \to U_\pi$ (U_π désigne, comme au chapitre I, le complémentaire des réels négatifs dans $\mathbf{C}$).

Exercice II.22. Montrer que la fonction $f(z) = 1/(1-z-z^2)$ est holomorphe au voisinage de 0. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ son développement en série entière en 0. Montrer que les coefficients a_n vérifient

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ et } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ pour } n \geq 2$$

(en d'autres termes, a_n est la suite de Fibonacci). Quel est le rayon de convergence de cette série entière (voir aussi l'exercice I.40) ?

Exercice II.23. Développer la fonction holomorphe $f(z) = 1/(z+1)(z+2)$ en série entière en 0. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

Exercice II.24. On considère la série entière

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots .$$

Quel est son rayon de convergence ? Montrer que $f(z) = 1/(z^2+1)$.

***Exercice II.25* (Examen, janvier 2007)**. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes de rayon de convergence $\rho > 0$. On appelle *étoile de Mittag-Leffler* de cette série entière le plus grand ouvert U de $\mathbf{C}$ tel que

- U est étoilé[5] en 0,
- il existe une fonction analytique $f : U \to \mathbf{C}$ dont le développement de Taylor en 0 est cette série.

Déterminer l'étoile de Mittag-Leffler de chacune des séries entières suivantes

(1) $\sum \frac{z^n}{n!}$,
(2) $\sum z^n$,
(3) $\sum (-1)^n z^{3n}$.

***Exercice II.26* (Examen, janvier 2006)**. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et D un disque ouvert non vide contenu dans U. Ainsi l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}(U) &\longrightarrow \mathcal{O}(D) \\ f &\longmapsto f|_D \end{aligned}$$

est-elle un homomorphisme d'algèbres.

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur U pour que φ soit injectif.
(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur U pour que φ soit surjectif.

Exercice II.27. Dessiner le paysage analytique de la fonction exponentielle sur $\mathbf{C}$.

Exercice II.28. Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,1)$, analytique sur le disque ouvert $D(0,1)$ et nulle sur le demi-cercle $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Montrer que f est nulle (on pourra considérer $g(z) = f(z)f(-z)$).

[5] La définition d'un ouvert étoilé est rappelée page 56.

Exercice II.29. Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,R)$. Pour $r \in [0,R[$, on pose
$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|\,.$$
Montrer que M est une fonction continue et croissante sur $[0,R[$ et qu'elle est strictement croissante si f n'est pas constante.

***Exercice II.30* (Principe du module minimum)**. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U. Soit $z_0 \in U$ un minimum local de $|f|$. Montrer que, soit $f(z_0) = 0$, soit f est constante sur U.

Exercice II.31. Soit c un nombre réel strictement positif. Existe-t-il une fonction f holomorphe sur un ouvert U contenant 0 telle que
$$|f(z)| = |z|^2 + c?$$

Exercice II.32. Soit f une fonction entière qui tend vers l'infini quand z tend vers l'infini. Montrer que f s'annule en un nombre fini de points $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. En déduire que f est un polynôme[6].

Exercice II.33. Soient f et g deux fonctions entières. On suppose que
$$|f(z)| \leq |g(z)| \text{ pour tout } z.$$
Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice II.34. Trouver toutes les fonctions entières f vérifiant
$$|f(z)| = |z|^2\,.$$

Exercice II.35. On donne deux nombres positifs A et α. Déterminer toutes les fonctions entières qui vérifient
$$|f(z)| \leq A \exp\left(\alpha \operatorname{Ré}(z)\right)$$
pour tout z de module assez grand.

Exercice II.36. Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe des réels positifs A, B et a tels que
$$|f(z)| \leq A + B\,|z|^a$$
pour tout z de module assez grand. Montrer que f est un polynôme.

Exercice II.37. Vérifier que l'application
$$u \longmapsto u/\sqrt{1-|u|^2}$$
est un homéomorphisme (c'est-à-dire une application continue bijective dont l'inverse est aussi continue) du disque unité ouvert sur $\mathbf{C}$. Existe-t-il un isomorphisme analytique (c'est-à-dire une application analytique bijective dont l'inverse est aussi analytique) du disque unité ouvert sur $\mathbf{C}$?

***Exercice II.38* (Le théorème des trois cercles d'Hadamard)**. Soient r et R deux nombres réels avec $0 < r < R$. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant le disque $\overline{D}(0,R)$ et soit f une fonction holomorphe sur U. Pour $\rho \in [r,R]$, on pose
$$M(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|\,.$$
Montrer que
$$M(\rho) \leq M(r)^{\frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}} M(R)^{\frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}}.$$

[6] Question subsidiaire : cet exercice permet-il de démontrer que la fonction exponentielle est un polynôme ?

Indication : on pourra appliquer le principe du module maximum à la fonction $z \mapsto z^p(f(z))^q$ (pour $p \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$).

Exercice II.39. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant le disque unité (fermé) et soit f une fonction holomorphe sur U. On suppose que $f(0) = 1$ et que $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f s'annule en un point du disque unité (ouvert).

Exercice II.40. Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D = D(0, 1)$. On suppose que $f(0) = 0$. Soit $r < 1$. Montrer qu'il existe une constante A telle que

$$|z| \leq r \Rightarrow |f(z^n)| \leq Ar^{n-1}.$$

En déduire que la série de terme général $f(z^n)$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur D vérifiant $f(0) = g(0) = 0$ et de développements respectifs

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n \text{ et } g(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n.$$

Montrer que les deux séries

$$F(z) = \sum_{n\geq 1} a_n g(z^n) \text{ et } G(z) = \sum_{n\geq 1} b_n f(z^n)$$

convergent normalement sur tous les compacts de D. Déterminer le développement en série de F à l'origine et montrer que $F = G$.

Soit ℓ la détermination du logarithme sur $D(1, 1)$ qui est nulle en 1. Montrer que, pour tout $z \in D$, on a

$$\sum_{\ell\geq 1} \ell(1 + z^n) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

et de même

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1 + z^n}.$$

Exercice II.41. Soit f une fonction entière *non* bornée. On veut montrer que son image est dense dans $\mathbf{C}$. On suppose au contraire qu'il existe un disque ouvert centré en w_0 qui ne rencontre pas $f(\mathbf{C})$. Que peut-on dire de la fonction $1/(f(z) - w_0)$? Conclure.

***Exercice II.42* (Le lemme de Schwarz)**. On appelle D le disque unité ouvert. Soit f une fonction holomorphe sur D. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| < 1$ pour tout z dans D (f envoie D dans lui-même et fixe 0).

Montrer que $z \mapsto f(z)/z$ définit une fonction holomorphe sur D. Soit $r \in]0, 1[$. Montrer que

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \text{ pour } |z| \leq r.$$

En déduire que

$$|f(z)| \leq |z| \text{ pour tout } z \text{ dans } D.$$

Supposons maintenant qu'il existe un z_0 non nul tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

***Exercice II.43* (Automorphismes du disque unité)**. On utilise les notations (et le résultat) de l'exercice II.42. On appelle *automorphisme* de D un automorphisme analytique, c'est-à-dire une bijection holomorphe dont l'application réciproque est holomorphe. Le but de cet exercice est de déterminer tous les automorphismes du disque D.

(1) Déterminer les automorphismes de D qui fixent 0.
(2) Soient a, $b \in \mathbf{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Montrer que $f_{a,b}$, définie par

$$f_{a,b}(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},$$

est un automorphisme de D.
(3) Montrer que, pour tout $w \in D$, il existe des nombres complexes a et b tels que

$$|a|^2 - |b|^2 = 1 \text{ et } f_{a,b}(w) = 0.$$

(4) Déterminer tous les automorphismes de D.

Exercice II.44. Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré (des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive) et soit $f : \overline{\mathcal{H}} \to \mathbf{C}$ une fonction continue, bornée, et dont la restriction à $\mathcal{H}$ est holomorphe. On suppose de plus que $|f(z)| \leq 1$ quand z est réel. On veut montrer que la même inégalité est vraie pour tous les éléments de $\mathcal{H}$.

(1) Soit t un réel strictement positif. On considère la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{f(z)}{i+tz}.$$

Montrer qu'elle est continue sur $\overline{\mathcal{H}}$ et holomorphe sur $\mathcal{H}$.
(2) Montrer que $|g(z)| \leq 1$ pour z réel et que $\lim_{|z|\to+\infty} |g(z)| = 0$.
(3) Montrer que $|g(z)| \leq 1$ pour tout z dans $\mathcal{H}$. En déduire que $|f(z)| \leq 1$ pour tout z dans $\mathcal{H}$.
(4) L'hypothèse que f est bornée est-elle vraiment nécessaire ?

Exercice II.45. On suppose que f est une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ et qu'elle est injective. Montrer que sa dérivée f' ne s'annule en aucun point de U et que la bijection réciproque de f est holomorphe.

***Exercice II.46* (Les zéros de P' sont dans l'enveloppe convexe de ceux de P)**

Soient $c_1, \ldots, c_n$ les n racines (pas nécessairement distinctes) d'un polynôme P de degré n dans $\mathbf{C}$. Montrer (par exemple par récurrence sur n) que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-c_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \frac{z-c_i}{|z-c_i|^2}}.$$

Soit c une racine de P'. On suppose que $P(c) \neq 0$. Montrer qu'il existe des nombres réels strictement positifs $m_1, \ldots, m_n$ tels que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) c = \sum_{i=1}^{n} m_i c_i.$$

Montrer que les racines du polynôme P' sont toutes dans l'enveloppe convexe des racines du polynôme P (encore un théorème de Gauss).

CHAPITRE III

INTÉGRALES CURVILIGNES, PRIMITIVES

On s'intéresse maintenant au problème des *primitives* des fonctions holomorphes. Il devrait déjà être clair que ce n'est pas un problème facile : la fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0\}$ mais on a bien compris qu'elle ne possédait pas de primitive sur cet ouvert (voir la discussion page 15 et suivantes).

Dans le cas où f est une fonction réelle de variable réelle (disons, continue), pour trouver une primitive de f, on fixe un x_0 et on définit

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

On peut essayer une tactique analogue dans le cas complexe : on fixe $z_0 \in U$, on choisit un chemin γ de z_0 à z et on calcule

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\, dw$$

... tout irait bien si cette intégrale ne dépendait pas du choix du chemin γ utilisé. Il n'en est, hélas, rien. Mais la considération de ces intégrales « curvilignes » est riche de conséquences, on va le voir dans ce chapitre et le suivant.

III.1. Intégration le long des chemins

On appellera *chemin* une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ définie sur un intervalle fermé de $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à dérivée bornée. Cette condition signifie qu'il existe des nombres $c_1, \dots, c_k$ tels que $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_k < c_{k+1} = b$, que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]c_i, c_{i+1}[$ et qu'il existe un réel M tel que $|\gamma'(t)|$ soit majoré par M. En particulier, l'intégrale

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

existe. On l'appelle la longueur du chemin γ.

Si le chemin « se referme » (c'est-à-dire si $\gamma(a) = \gamma(b)$) on dit que c'est un *lacet*.

On notera que je désigne ici par « chemins » ou « lacets » des applications, c'est-à-dire des chemins et lacets *paramétrés*.

Exemples III.1.1

(1) Le cercle de centre z_0 et de rayon r, paramétré par

$$\begin{aligned} C(z_0, r) : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto z_0 + re^{it} \end{aligned}$$

est un lacet. Dans la suite, on utilisera la notation $C(z_0, r)$ pour désigner *ce* paramétrage du cercle.

(2) Si α et β sont deux points fixés dans $\mathbf{C}$, le chemin
$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow \mathbf{C}\\ t &\longmapsto \alpha + t(\beta-\alpha)\end{aligned}$$
est un paramétrage du segment $[\alpha, \beta]$.

Si $f : U \to \mathbf{C}$ est une fonction continue et si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin, on peut intégrer f sur γ. *Par définition,*
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$
J'insiste, je n'ai pas défini d'« intégrale complexe » dans aucun sens, mais simplement remarqué que la fonction
$$t \longmapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$$
étant continue par morceaux sur $[a, b]$, y était intégrable *comme fonction de variable réelle* et j'ai défini l'intégrale de $f(z)dz$ le long du chemin comme l'intégrale de cette fonction de variable réelle.

Exemples III.1.2

(1) Intégrons par exemple la fonction $z \mapsto f(z)/(z-z_0)^{n+1}$ sur le cercle $C(z_0, r)$. On suppose que f est, non seulement continue mais aussi holomorphe. Comme il est paramétré par $C(z_0, r)(t) = z_0 + re^{it}$, on a $C(z_0, r)'(t) = ire^{it}$ et
$$\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}} ire^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{r^n e^{int}}\,dt.$$
Ce nombre est, d'après le théorème de Cauchy (théorème II.2.1), justement $2i\pi a_n$, où a_n est le n-ième coefficient de la série de Taylor de f en z_0.

En particulier, la « formule de Cauchy » (corollaire II.2.3) est simplement
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$
L'essentiel de ce chapitre vise à généraliser le fait, affirmé par le théorème de Cauchy, que ces intégrales ne dépendent pas du rayon r du cercle sur lequel elles sont calculées.

(2) Considérons maintenant la fonction $z \mapsto 1/z$. Elle est holomorphe, donc continue sur $\mathbf{C} - \{0\}$. Intégrons-la sur le cercle unité :
$$\begin{aligned}\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} i\,dt\\ &= 2i\pi.\end{aligned}$$

Établissons maintenant une liste de propriétés de ces intégrales. Pour m'excuser d'avoir appelé « chemin » un chemin paramétré plutôt qu'un chemin géométrique, je commence par signaler que l'intégrale, elle, ne dépend que du « chemin géométrique » orienté.

Proposition III.1.3. *Soit $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ une bijection* croissante *de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*
$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Une bijection croissante et $\mathcal{C}^1$ n'est autre qu'un changement de paramétrage du chemin géométrique γ, la croissance impose que les deux chemins paramétrés soient parcourus dans le même sens. Il s'agit donc bien d'un chemin non paramétré mais orienté.

Démonstration. Le chemin $\delta = \gamma \circ \varphi$ est un chemin $[a', b'] \to U$ et

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} f(\delta(t))\delta'(t)\,dt &= \int_{a'}^{b'} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)\,du\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = \varphi(t)$. □

On décrit maintenant ce qui se passe pour le même chemin géométrique, mais parcouru dans l'autre sens. Si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin, soit $\gamma^\star$ le chemin défini par $\gamma^\star(t) = \gamma(a + b - t)$.

Proposition III.1.4

$$\int_{\gamma^\star} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Démonstration. Comme pour la proposition précédente, il suffit de faire le changement de variable indiqué (ici $u = a + b - t$) dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^\star} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma^\star(t))(\gamma^\star)'(t)\,dt \\ &= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\,dt \\ &= -\int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)\,du.\end{aligned}$$

□

On peut aussi « composer » les chemins, comme sur la figure 1, c'est-à-dire suivre γ_1 puis γ_2 (si l'extrémité de γ_1 coïncide avec l'origine de γ_2).

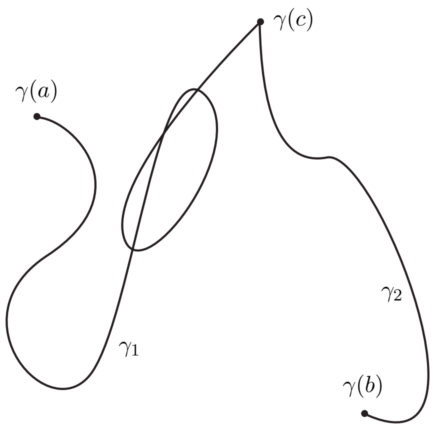


FIGURE 1.

On a clairement :

Proposition III.1.5. *Soient $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin, $c \in]a,b[$ et soient $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

□

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &\leq \int_a^b |f\circ\gamma(t)|\,|\gamma'(t)|\,dt\\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f\circ\gamma(t)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt,\end{aligned}$$

la dernière intégrale n'étant autre que la longueur du chemin (géométrique) γ, que nous notons $L(\gamma)$. Cette inégalité porte un nom, alors énonçons-la dignement.

***Proposition III.1.6* (Estimation standard)**. *Pour tout chemin γ et toute fonction continue sur l'image de γ, on a*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f\circ\gamma(t)|\,L(\gamma).$$

On en déduit :

Proposition III.1.7. *Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues $U \to \mathbf{C}$ convergeant uniformément vers une fonction f sur les compacts de U, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Démonstration. On applique l'inégalité précédente à la fonction $f - f_n$. On en déduit le résultat (dont on remarquera qu'il s'applique aux séries). □

Les fonctions f intégrées jusqu'ici étaient seulement supposées *continues*. Revenons maintenant à nos fonctions favorites et supposons que f est *holomorphe*.

Proposition III.1.8. *Si $F : U \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe et si $f = F'$, alors*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Démonstration. La fonction $F\circ\gamma$ est une primitive de la fonction à intégrer $(f\circ\gamma)\cdot\gamma'$. □

Un corollaire immédiat de cette proposition quasi-évidente est très important :

Corollaire III.1.9. *Si γ est un* lacet *dans U et si f admet une primitive holomorphe sur U, alors l'intégrale de f sur γ est nulle.* □

Exemples III.1.10

(1) Soit γ le cercle unité. Alors on a

$$\int_\gamma z^m\,dz = 0 \text{ pour } m \geq 0.$$

En effet $F(z) = z^{m+1}/(m+1)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ dont z^m est la dérivée et γ est un lacet.

(2) Sur le même lacet, on a
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \pm 2i\pi$$
comme on l'a vu en III.1.2. Il n'existe donc aucun ouvert contenant le cercle unité et sur lequel la fonction $1/z$ possède des primitives. Ceci est cohérent avec ce que nous savons des logarithmes complexes. Voir les pages 15 et suivantes.

III.2. Homotopie des chemins et intégrales de fonctions holomorphes

On va montrer maintenant que l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un chemin tracé dans U ne change pas quand on « déforme » ce chemin dans U. Ce sera plus précis dans l'énoncé III.2.3 ci-dessous.

Avant de pouvoir l'énoncer, il faut définir ce que veut dire « déformer ». Un chemin est paramétré par un segment, deux chemins le sont par deux segments, dans la déformation on considère que ces deux segments sont deux côtés parallèles d'un carré et que la « déformation » est une application définie sur tout le carré (figure 2).

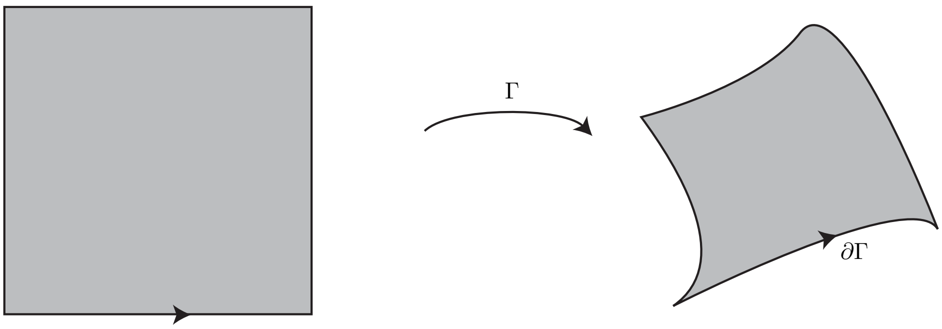


Figure 2.

Soit $\Gamma : [0,1]^2 \to \mathbf{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ (un « carré »). On va intégrer les fonctions sur le « bord » de ce carré, c'est-à-dire sur un chemin paramétré[(1)] image par Γ d'un paramétrage β du bord de $[0,1]^2$.

On en déduit par composition un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\Gamma \circ \beta$, qu'on appelle *bord* de Γ et qu'on note $\partial\Gamma$ (voir la figure 2).

Si maintenant f est une fonction définie au voisinage du bord de γ, c'est-à-dire de $\Gamma\left([0,1]^2 -]0,1[^2\right)$,
$$\int_{\partial\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma(\cdot,0)} f(z)\,dz + \int_{\Gamma(1,\cdot)} f(z)\,dz - \int_{\Gamma(\cdot,1)} f(z)\,dz - \int_{\Gamma(0,\cdot)} f(z)\,dz$$
où $\Gamma(\cdot,0)$ désigne le chemin $t \mapsto \Gamma(t,0)$, *etc.* En effet, $\partial\Gamma$ est obtenu en « composant » les chemins apparaissant dans ces intégrales, les signes sont dus au changement de sens. Cette décomposition est une application directe des propriétés III.1.3, III.1.4 et III.1.5.

Théorème III.2.1. *Pour toute fonction holomorphe sur l'ouvert U et toute application*
$$\Gamma : [0,1]^2 \longrightarrow U$$

(1) On peut par exemple paramétrer le bord du carré standard par une application
$$\beta : [0,4] \longrightarrow \mathbf{R}^2$$
où β est affine sur chacun des intervalles $[k, k+1]$ $(k = 0, \ldots, 3)$ et telle que $\beta(0) = \beta(4) = 0$.

de classe $\mathcal{C}^2$, *on a*

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Remarques III.2.2

(1) L'hypothèse sur f est *locale*, c'est-à-dire qu'elle se vérifie en chaque point : on demande qu'elle soit holomorphe. Par contre, la conclusion est *globale*, il s'agit de l'intégrale sur un lacet.

(2) Il est indispensable que *tout* le carré soit envoyé par Γ dans l'ouvert U. Par exemple, sur le bord du carré

$$-1 \leq \mathrm{Ré}(z) \leq 1, \qquad -1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$$

l'intégrale de la fonction $1/z$ n'est pas nulle (exercice). Le carré n'est pas contenu dans $\mathbf{C} - \{0\}$, ouvert où $1/z$ est holomorphe.

(3) Pour pouvoir dire que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$, il faut qu'elle soit définie sur un ouvert. On suppose donc ici qu'elle est définie sur un petit voisinage du carré dans $\mathbf{R}^2$. Cette hypothèse (classe $\mathcal{C}^2$) n'est pas indispensable pour obtenir le résultat, mais elle simplifie la démonstration (elle est indispensable dans la démonstration donnée ici) et elle suffit pour toutes les applications.

Démonstration du théorème III.2.1. Si $s \in [0,1]$, on considère le segment $t \mapsto (s,t)$ dans $[0,1]^2$ et le chemin

$$\begin{aligned}\gamma_s : [0,1] &\longrightarrow U\\ t &\longmapsto \Gamma(s,t)\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\delta_s : [0,s] &\longrightarrow U\\ u &\longmapsto \Gamma(u,0)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta'_s : [0,s] &\longrightarrow U\\ u &\longmapsto \Gamma(u,1)\end{aligned}$$

(voir la figure 3).

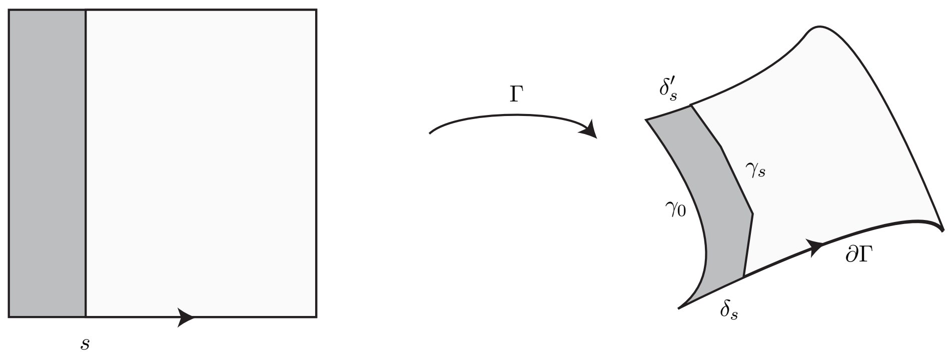


FIGURE 3.

Pour démontrer le théorème (l'intégrale sur le bord de Γ est nulle), on va démontrer que, pour tout s dans $[0,1]$, l'intégrale sur le bord du petit rectangle défini par s (figure 3) est nulle, c'est-à-dire qu'on a

$$\forall\, s \in [0,1], \quad \underbrace{\int_{\gamma_s} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz}_{G(s)} = \underbrace{\int_{\delta'_s} f(z)\,dz - \int_{\delta_s} f(z)\,dz}_{D(s)}.$$

Le théorème est cette formule pour $s = 1$.

Calculons maintenant les expressions $G(s)$ et $D(s)$ constituant les deux membres de l'égalité espérée :

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_{\gamma_s} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \\ &= \int_0^1 f\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma(s,t)\right)\,dt - \int_0^1 f\left(\Gamma(0,t)\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma(0,t)\right)\,dt \end{aligned}$$

et

$$D(s) = \int_0^s f\left(\Gamma(u,1)\right) \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma(u,1)\right)\,du - \int_0^s f\left(\Gamma(u,0)\right) \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma(u,0)\right)\,du.$$

La fonction f est holomorphe et en particulier de classe $\mathcal{C}^1$, l'application Γ est de classe $\mathcal{C}^2$, de sorte que l'application

$$(s,t) \longmapsto f\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]^2$. Donc G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable $s \in [0,1]$. De plus, pour tout s dans cet intervalle,

$$G'(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left\{ f\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) \right\}\,dt.$$

Pour D, c'est encore plus simple : c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,s]$. Donc D est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout s dans $[0,1]$, on a

$$D'(s) = f\left(\Gamma(s,1)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,1) - f\left(\Gamma(s,0)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,0).$$

On va donc évaluer $G'(s)$ et montrer que c'est égal à $D'(s)$. La fonction de t à intégrer est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left\{ f\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) \right\} &= f'\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) + f\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{ f\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \right\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$G'(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left\{ f\left(\Gamma(s,t)\right) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \right\}\,dt = D'(s).$$

Les fonctions G et D ont la même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante. Mais

$$G(0) = D(0) = 0$$

donc $G(s) = D(s)$ pour tout s. ☐

Corollaire III.2.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ et soit*

$$\Gamma : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{C}$$

une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que les chemins

$$\gamma_s = \Gamma(s,\cdot) : [0,1] \longrightarrow U$$

vérifient l'une des conditions suivantes

(1) *Pour tout s, γ_s est un* lacet.

(2) *Les extrémités $\gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1)$ ne dépendent pas de s.*

Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz.$$

Démonstration. Dans le premier cas, on déforme un lacet sur un autre (figure 4), on a $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$ pour tout s dans $[0,1]$. Dans le deuxième cas, on déforme un chemin de α à β en un autre chemin de α à β (figure 4) et les deux chemins $t \mapsto \Gamma(t,0)$ et $t \mapsto \Gamma(t,1)$ sont constants. Dans les deux cas,

$$\int_{\Gamma(\cdot,1)} f(z)\,dz = \int_{\Gamma(\cdot,0)} f(z)\,dz$$

donc le théorème donne

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial\Gamma} f(z)\,dz &= \int_{\Gamma(1,\cdot)} f(z)\,dz - \int_{\Gamma(0,\cdot)} f(z)\,dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

□

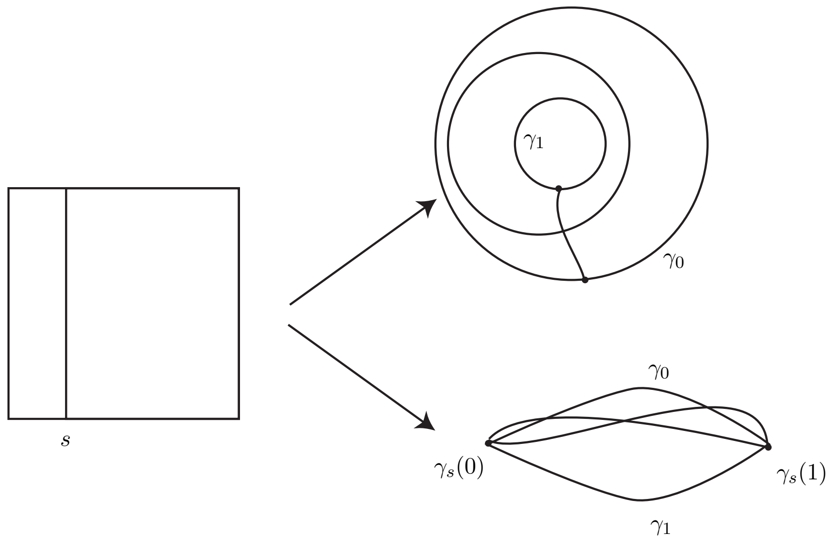


FIGURE 4. Homotopies

Sous l'une ou l'autre des hypothèses du corollaire, on appelle *homotopie* de γ_0 à γ_1 une application Γ.

Ce résultat s'appelle aussi « formule de Cauchy », parce qu'il contient la formule de Cauchy telle qu'exprimée par le corollaire II.2.3.

Démonstration « par homotopie » de la formule de Cauchy. Soit donc f une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$. Soit $a \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(a,r) \subset U$. Soit $z \in D(a,r)$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(z,\varepsilon) \subset D(a,r)$. On écrit une homotopie entre les deux cercles

$$\Gamma(s,t) = (1-s)(a + re^{it}) + s(z + \varepsilon e^{it}).$$

Rien de bien sorcier dans cette formule *linéaire*[2], $\Gamma(s,\cdot)$ est le cercle de centre $(1-s)a + sz$ et de rayon $(1-s)r + s\varepsilon$, on a ainsi recouvert toute la partie du disque de centre a et de rayon r qui est en dehors du disque de centre z et de rayon ε. En particulier, Γ est à valeurs dans $U - \{z\}$. Donc, en appliquant le résultat d'homotopie ci-dessus, on trouve

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{it})\,dt$$

[2] qui décrit une partie du faisceau de cercles, une droite dans l'espace des cercles, celle engendrée par nos deux cercles

qui tend vers $f(z)$ quand ε tend vers 0. On a donc

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

ce qui est bien la formule de Cauchy. □

III.3. Problèmes de primitives

Revenons maintenant au problème des primitives. En conséquence du corollaire III.2.3, commençons par mettre en évidence une classe d'ouverts de $\mathbf{C}$ sur lesquels toutes les fonctions holomorphes ont des primitives.

On dit qu'un ouvert $U\subset\mathbf{C}$ est *simplement connexe* si

- il est connexe par arcs et non vide,
- tout lacet basé en un point z_0 est homotope au lacet constant égal à z_0.

En gros, un ouvert connexe est simplement connexe s'il n'a pas de « trou ». On remarquera que c'est une « propriété topologique » au sens où, si U est simplement connexe et V homéomorphe à U, alors V est simplement connexe lui aussi.

Proposition III.3.1. *Sur un ouvert simplement connexe U, toute fonction holomorphe admet une primitive holomorphe.*

Démonstration. Fixons un point $z_0\in U$. Soit $z\in U$. Soit γ un chemin dans U joignant z_0 à z. Montrons d'abord que

$$F(z)=\int_\gamma f(w)\,dw$$

est bien définie (c'est-à-dire ne dépend que de l'extrémité z de γ et pas du choix spécifique de ce chemin). Soit γ' un autre chemin de z_0 au même point z. Alors le chemin composé $\gamma\cdot\gamma'^{\star}$ est un lacet basé en z_0. Il est donc homotope au lacet constant et le corollaire III.2.3 nous donne donc que

$$0=\int_{z_0}f(w)\,dw=\int_{\gamma\cdot\gamma'^{\star}}f(w)\,dw=\int_\gamma f(w)\,dw-\int_{\gamma^{\star}}f(w)\,dw$$

ce qui est l'indépendance espérée.

Ainsi la formule $F(z)=\int_\gamma f(w)\,dw$ définit bien une fonction sur U. Si h est un nombre complexe de très petit module, le segment (paramétré) δ joignant z à $z+h$ est contenu dans un petit disque de centre z contenu dans U. On peut calculer $F(z+h)$ en intégrant f le long d'un chemin de z_0 à z suivi de δ. D'après la propriété III.1.5,

$$F(z+h)-F(z)=\int_\delta f(w)\,dw$$

ou encore

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\int_\delta\frac{f(w)-f(z)}{h}\,dw$$

(on aura remarqué que $\int_\delta dw = \int_0^1 h dt = h$). On majore le module de cette expression comme au § III.1 pour trouver

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_\delta \frac{f(w)-f(z)}{h}\,dw\right| \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq 1} |f(z+th)-f(z)|\,\frac{L(\delta)}{|h|} \\ &= \sup_{0\leq t\leq 1} |f(z+th)-f(z)|\end{aligned}$$

puisque $\int_0^1 |\delta'(t)|\,dt = |h|$. Ce dernier terme tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc F est holomorphe et sa dérivée est f. □

Une classe importante d'ouverts simplement connexes est celle des ouverts étoilés. Rappelons qu'un ouvert U est *étoilé* par rapport à un point z_0 si, quand il contient un point z, il contient tous le segment joignant ce point à z_0. Par exemple, les ouverts convexes sont étoilés par rapport à tous leurs points. Il y a bien d'autres exemples (les étoiles notamment) parmi lesquels il faut noter les U_θ, étoilés par rapport aux points de la demi-droite d'argument $\theta + \pi$.

Proposition III.3.2. *Tout ouvert étoilé est simplement connexe.*

Démonstration. Si l'ouvert est étoilé par rapport au point z_0, pour tout lacet γ, l'application

$$(s,t) \longmapsto sz_0 + (1-s)\gamma(t)$$

est une homotopie de γ au lacet constant en z_0. □

Corollaire III.3.3. *Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$ étoilé par rapport à un de ses points, toute fonction holomorphe sur U y admet une primitive holomorphe.*

Remarque III.3.4. On peut démontrer directement l'existence d'une primitive sur un ouvert étoilé (exercice III.14).

Tous les ouverts connexes ne sont pas simplement connexes.

Proposition III.3.5. *L'ouvert $\mathbf{C} - \{0\}$ n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. Voici une preuve par les fonctions holomorphes de cette propriété topologique : si l'ouvert en question était simplement connexe, la fonction $1/z$ qui y est notoirement holomorphe, aurait une primitive, ce que nous savons impossible ! □

La proposition suivante permet de construire des exemples d'ouverts simplement connexes (voir aussi l'exercice III.18).

Proposition III.3.6. *Soient U et V deux ouverts simplement connexes de $\mathbf{C}$. Si $U \cap V$ est non vide* et connexe, *alors $U \cup V$ est un ouvert simplement connexe.*

Remarque III.3.7. L'hypothèse de connexité de l'intersection est indispensable. On s'en convaincra en considérant les ouverts étoilés (et donc simplement connexes)

$$U = \mathbf{C} - \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}, \quad V = \mathbf{C} - \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$$

dont la réunion est $\mathbf{C} - \{0\}$.

Idée de la démonstration. On choisit un point base z_0 dans l'intersection $U \cap V$ (qui n'est pas vide). On décompose un lacet en chemins contenus soit dans U soit dans V et on utilise la connexité de $U \cap V$ pour joindre les extrémités de ces petits chemins à z_0, ce qui permet (avec beaucoup d'allers-retours) d'écrire le lacet comme composé de lacets qui sont tous soit dans U, soit dans V et de conclure grâce à la simple connexité de ces derniers. □

Remarque III.3.8. J'ai été un peu rapide ici, c'est un résultat de topologie que nous aurons peu l'occasion d'utiliser. Pour une démonstration précise et des informations sur la simple connexité et les groupes d'homotopie, voir par exemple [**Aud04**]. Le fait que, si U et V vérifient les hypothèses de la proposition, alors toute fonction holomorphe sur $U \cup V$ y admet une primitive fait l'objet de l'exercice III.15.

Dans les énoncés précédents, il était question d'ouverts sur lesquels *toutes* les fonctions holomorphes ont des primitives. Avec le même type de démonstration, on peut aussi donner une condition pour qu'*une* fonction soit holomorphe.

***Théorème III.3.9* (Morera)**. *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction. Alors pour que f soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit continue et que, pour tout triplet de points A, B et C tels que le triangle ABC soit contenu dans U, on ait*

$$\int_{[A,B]} f(z)dz + \int_{[B,C]} f(z)dz + \int_{[C,A]} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Si f est holomorphe sur U, on applique le corollaire III.2.3 et le carré reliant la ligne brisée ABC et le segment AC (voir la figure 6)

$$\Gamma(s,t) = a + s(b-a) + st(c-b).$$

Réciproquement, supposons l'égalité de l'énoncé vérifiée et montrons que f est holomorphe en un point z_0 de U. Choisissons un disque D de centre z_0 et de rayon r contenu dans U. Définissons une fonction F sur D par

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw.$$

Pour tout point z de U, en appliquant l'hypothèse au triangle de sommets z_0, z et $z+h$, on voit que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)dw.$$

Les mêmes arguments que dans la démonstration de III.3.1 montrent alors que F est holomorphe et que sa dérivée est f... qui ne peut donc pas s'empêcher d'être holomorphe. □

Le théorème de Morera est un résultat puissant qui a de nombreuses applications, on en trouvera une classique dans l'exercice III.19. En voici une première, assez spectaculaire.

Corollaire III.3.10. *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions holomorphes converge uniformément sur tous les compacts de U, la limite est holomorphe sur U.*

Démonstration. Comme la convergence est uniforme sur les compacts, la limite f est une fonction continue sur U. Pour montrer qu'elle est holomorphe, il suffit donc de montrer que son intégrale sur les bords des triangles est nulle. Maintenant chaque bord de triangle est un compact et donc la suite (f_n) y converge uniformément vers f. L'intégrale de f est donc la limite des intégrales des f_n, qui sont nulles puisque ce sont des fonctions holomorphes. □

Une autre application du théorème de Morera est le fait, annoncé dans la remarque II.1.2, que la condition de continuité de la dérivée, que nous avons imposée dans la définition d'une fonction holomorphe, était, *a posteriori*, inutile.

Théorème III.3.11. *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Si f est dérivable (au sens complexe) en tout point de U, alors elle est holomorphe sur U.*

Démonstration. Il suffit, puisque nous appliquons le théorème de Morera, de montrer que l'intégrale de f est nulle sur tout triangle $ABC = \partial\Delta_0$ contenu dans U. Appelons A_1 le milieu de BC, B_1 celui de CA et C_1 celui de AB (figure 5). On décompose le lacet ABC en somme des lacets constitués par les quatre petits triangles

$$\begin{aligned}[ABC] = [AB] + [BC] + [CA] &= [AC_1] + [C_1B] + [BA_1] + [A_1C] + [CB_1] + [B_1A] \\ &= ([AC_1] + [C_1B_1] + [B_1A]) + ([C_1B] + [BA_1] + [A_1C_1]) + \\ &+ ([A_1C] + [CB_1] + [B_1A_1]) - ([C_1B_1] + [B_1A_1] + [A_1C_1]) \\ &= [AC_1B_1] + [C_1BA_1] + [A_1CB_1] + [A_1B_1C_1].\end{aligned}$$

L'intégrale de f sur le bord du grand triangle Δ_0 est donc la somme des intégrales de f sur les quatre

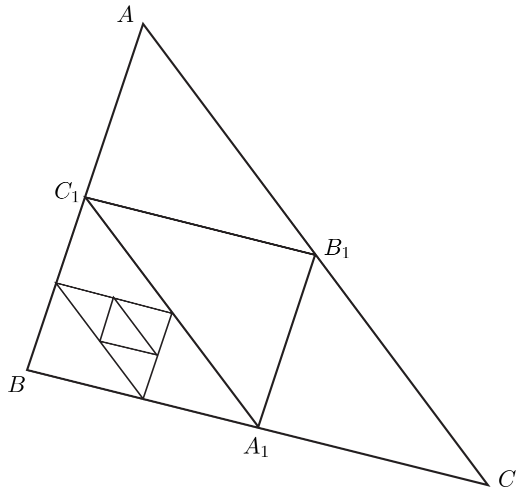


FIGURE 5.

petits triangles, en particulier, il existe un de ces quatre triangles, que nous notons Δ_1 et tel que

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|.$$

En itérant cette construction (figure 5), on trouve une suite emboîtée de triangles

$$ABC = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$$

dont le diamètre δ_n est $2^{-n}\delta_0$ (le diamètre d'un triangle est la longueur du plus grand de ses côtés) et pour lesquels on a

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right|.$$

L'intersection des fermés emboîtés Δ_n de diamètre tendant vers 0 est, en vertu de la complétude de $\mathbf{C}$, un point z_0 du triangle ABC. Notre fonction f est dérivable sur U (il faut bien utiliser l'hypothèse !), elle l'est en particulier en z_0, et l'on a, pour tout $z \in U$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0|\, \varepsilon(z) \text{ avec } \lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

La fonction $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est holomorphe, donc son intégrale sur $\partial\Delta_n$ est nulle. On a donc

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0|\, \varepsilon(z)\, dz.$$

En utilisant l'estimation standard (la proposition III.1.6) et le fait que la longueur du bord de Δ_n, périmètre de Δ_n est la somme des longueurs de ses trois côtés, donc majorée par trois fois son diamètre, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_n} |z - z_0|\, \varepsilon(z)\, dz\right| &\leq 3\, \delta_n \sup_{z \in \Delta_n} (|z - z_0|\, |\varepsilon(z)|)\\ &\leq 3\, \delta_n^2 \sup_{z \in \Delta_n} (|\varepsilon(z)|)\\ &\leq 3 \times 2^{-2n} \delta_0^2 \sup_{z \in \Delta_n} (|\varepsilon(z)|).\end{aligned}$$

Pour l'intégrale de f sur le triangle originel Δ_0, on obtient donc

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\, dz\right| &\leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz\right|\\ &\leq 3\, \delta_0^2 \sup_{z \in \Delta_n} (|\varepsilon(z)|)\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Notre intégrale est donc bien nulle, comme nous le souhaitions. □

Remarque III.3.12. Le bon langage à utiliser serait plutôt celui des *formes*. Ce que l'on intègre sur un chemin, c'est une forme différentielle (de degré 1). On peut dire que f est holomorphe si et seulement si la forme $f(z)\, dz$ est fermée (voir l'exercice II.11). Les formes fermées sur les ouverts simplement connexes sont exactes, $f dz = dF$... voilà le rapport avec les primitives. Voir [Car61, § II.1].

III.4. Indice d'un point par rapport à un lacet

La fonction $1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbf{C} - \{0\}$ et son intégrale sur un cercle centré en 0 mesure la différence entre deux déterminations du logarithme (ou de l'argument), soit $2i\pi$. Si on fait n fois le tour de l'origine, en intégrant sur le cercle paramétré par e^{int} ($t \in [0, 2\pi]$), l'intégrale est $2ni\pi$. Autrement dit, rien qu'en calculant l'intégrale, on sait combien de fois on a fait le tour de l'origine. Dans ce paragraphe, on va généraliser et prolonger cette remarque. Considérons un lacet $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$. On va montrer que

Proposition III.4.1. *Pour tout nombre complexe z qui n'est pas dans l'image de γ, le nombre*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}$$

est un entier.

Définition III.4.2. Le nombre entier défini dans la proposition III.4.1 est appelé l'indice de z par rapport à γ. On le note $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$.

On utilisera cet entier et cette notion dans les chapitres suivants.

Démonstration. Considérons la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\right).$$

On a

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$$

sur $[0,1]-S$, où S est l'ensemble (fini) des valeurs où la dérivée de γ n'est pas continue. On voit ainsi que la fonction $\varphi/(\gamma - z)$ est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et a une dérivée nulle sur $[0,1]-S$. Elle est donc constante. Cette constante vaut $\varphi(0)/(\gamma(0)-z) = 1/(\gamma(0)-z)$. Par suite on a

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(0)-z}.$$

Puisque γ est un chemin fermé, on a $\gamma(1) = \gamma(0)$ et donc $\varphi(1) = 1$. Ainsi le nombre

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$$

est un multiple entier de $2i\pi$, ce que nous voulions démontrer. □

L'indice de z est bien défini pour tout z dans le complémentaire Ω de l'image $\gamma([0,1])$. Cet entier ne peut changer que si z traverse l'image de γ. En termes plus précis :

Proposition III.4.3. *L'indice* $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ *est constant sur chaque composante connexe de* Ω. *L'ouvert* Ω *possède une unique composante connexe non bornée, sur laquelle l'indice est nul.*

Démonstration. La fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

est une fonction continue de z sur l'ouvert Ω : la fonction $z \mapsto \gamma'(t)/(\gamma(t)-z)$ est continue (en fait holomorphe) pour tout t dans $[0,1]$, l'intégrale définit donc une fonction continue de z (on peut même montrer qu'elle est holomorphe). Elle prend ses valeurs dans l'espace discret $\mathbf{Z}$, donc elle est constante sur chaque composante de Ω.

Il est facile de se convaincre que Ω n'a qu'une composante non bornée. En effet, l'image de l'intervalle compact $[0,1]$ par la fonction continue γ est un compact de $\mathbf{C}$, elle est donc bornée et contenue dans un disque. Le complémentaire de ce disque est à la fois connexe par arcs et contenu dans la réunion des composantes non bornées de Ω. Il n'y a donc qu'une telle composante.

Soit z un point de cette composante. Son indice par rapport à γ est le même que celui de n'importe quel autre point de cette composante. Si $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de points dont le module tend vers l'infini, on a donc

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Ind}_\gamma(z_n).$$

Et, bien entendu, cette limite est nulle. □

Exercices

Exercice III.1. Calculer les intégrales

$$J_1 = \int_\gamma x dz \text{ et } J_2 = \int_\gamma y dz$$

le long des chemins suivants

(1) le segment joignant 0 à $2+i$,
(2) le demi-cercle $|z| = R$, $y \geq 0$ (en commençant en 1).

Exercice III.2. Soit C le cercle centré en z_0 et de rayon $r > 0$. pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, calculer
$$\int_C (z-z_0)^n dz.$$

Exercice III.3. On considère un demi-cercle C de diamètre le segment $[-3,3] \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ parcouru dans le sens « trigonométrique ». Calculer
$$\int_C e^z dz.$$
Comparer cette valeur à celle de
$$\int_{-3}^{3} e^x dx.$$

Exercice III.4. On considère le rectangle
$$R = \{z \in \mathbf{C} \mid -r < \text{Ré}(z) < r \text{ et } -s < \text{Im}(z) < s\}$$
(r et s sont des réels positifs). Calculer les intégrales
$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z} \text{ et } \int_{\partial R} \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice III.5. Dessiner les courbes suivantes, pour $t \in [0,1]$
(1) $\gamma(t) = 1 + it$;
(2) $\gamma(t) = e^{-i\pi t}$;
(3) $\gamma(t) = e^{i\pi t}$;
(4) $\gamma(t) = 1 + it + t^2$

... et calculer l'intégrale de chacune des fonctions suivantes sur chacune de ces courbes
(1) $f(z) = z^3$;
(2) $f(z) = \overline{z}$;
(3) $f(z) = 1/z$.

Exercice III.6. On considère le carré $\Gamma : [0,1]^2 \to \mathbf{C}$ de sommets 0, 1, $1+i$ et i. Calculer
$$\int_{\partial\Gamma} \text{Ré}(z) dz$$
et comparer le résultat au théorème III.2.1.

Exercice III.7. Sur l'ellipse $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$ (pour $t \in [0,2\pi]$), calculer
$$\int_\gamma |z|^2 \, dz.$$

Exercice III.8. Soit g une fonction continue sur le cercle $\gamma = C(0,1)$ ($\gamma(t) = e^{it}$ pour $t \in [0,2\pi]$, donc). Montrer que
$$\overline{\int_\gamma g(z)\, dz} = -\int_\gamma \overline{g(z)} z^{-2} \, dz.$$

***Exercice III.9* (Utilisation des formules de Cauchy)**. Dans cet exercice, U désigne un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant le disque unité (fermé), f est une fonction holomorphe sur U, et, pour $\theta \in [0,2\pi]$, $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Calculer les intégrales
$$\int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} \, dz \text{ et } \int_\gamma \left(2 - z - \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} \, dz.$$

En déduire que
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2f(0)+f'(0)$$
et une formule analogue pour
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

Exercice III.10. Montrer que la fonction $f(z)=1/(z^2-z)$ n'a pas de primitive dans
$$U=\{z\in\mathbf{C}\mid 0<|z-1|<1\}\,.$$

Exercice III.11. Existe-t-il une homotopie de γ_0 à γ_1 dans l'ouvert U dans les cas suivants (si oui, en écrire une explicitement, sinon, donner un argument rigoureux) ?

(1) $\gamma_0(t)=e^{it}$, $\gamma_1(t)=-1+2e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$, $U=\mathbf{C}-\{0\}$,
(2) $\gamma_0(t)=e^{2it}$, $\gamma_1(t)=-1+2e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$, $U=\mathbf{C}-\{0\}$,
(3) $\gamma_0(t)=2e^{it}$, $\gamma_1(t)=2\cos t+i\sin t$ $(t\in[0,2\pi])$, $U=\mathbf{C}-[0,1]$,
(4) $\gamma_0(t)=e^{it}$, $\gamma_1(t)=i$ $(t\in[0,2\pi])$, $U=\mathbf{C}-\{2i\}$,
(5) $\gamma_0(t)=e^{it}$, $\gamma_1(t)=i$ $(t\in[0,2\pi])$, $U=\mathbf{C}-\{-i/2\}$.

Exercice III.12. Dessiner rapidement les lacets $t\mapsto 2(\cos t+i\sin(2t))$ $(t\in[0,2\pi])$ et $t\mapsto 2e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$. Sont-ils homotopes dans $\mathbf{C}-\{-1,1\}$?

Exercice III.13. Pour chacun des ouverts suivants, dire s'il est ou non étoilé par rapport à un de ses points : un disque, l'intérieur d'un carré, le complémentaire dans $\mathbf{C}$ d'un point, d'une demi-droite, d'un segment, d'une droite, de deux demi-droites de la même droite, d'un disque ?

Exercice III.14. Soit U un ouvert étoilé par rapport à un point z_0. On définit $F(z)$ comme l'intégrale de f le long du segment joignant z_0 à z. À l'aide de la figure 6, montrer que l'on peut aussi calculer

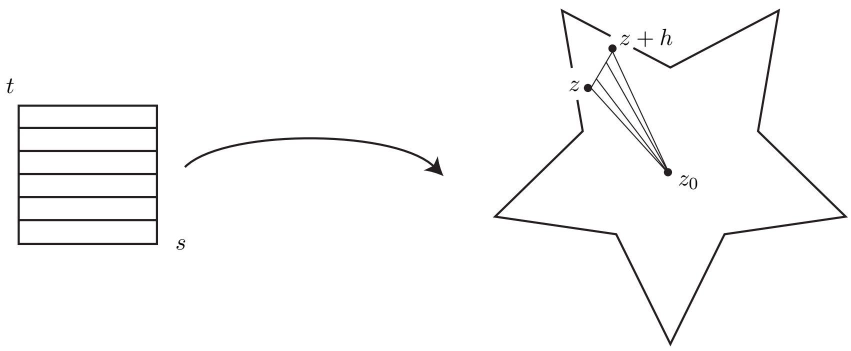


Figure 6.

$F(z+h)$ en intégrant sur la ligne brisée $z_0, z, z+h$. En déduire que F est holomorphe sur U et que sa dérivée est f.

Exercice III.15. Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$ et soit z_0 un point de U. Montrer que toute fonction holomorphe sur U possède une unique primitive sur U qui s'annule en z_0.

On suppose que U et V sont deux ouverts simplement connexes dont l'intersection $U\cap V$ est connexe (non vide). Montrer (sans utiliser la proposition III.3.6) que, sur $U\cup V$, toute fonction holomorphe admet une primitive holomorphe.

Exercice III.16. Soit U un ouvert simplement connexe contenant le cercle $C = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r\}$. Montrer que U contient tout le disque fermé

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

Exercice III.17. Pour chacun des ouverts de $\mathbf{C}$ suivants, dire s'il est simplement connexe ou pas :

$$\mathbf{C} - \{1\}, \quad \{z \in \mathbf{C} \mid 2\,\text{Ré}(z) < \text{Im}(z) < 3\,\text{Ré}(z) \text{ et } \text{Ré}(z) > 0\}.$$

Exercice III.18. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et soit $\varphi : V \to U$ une transformation holomorphe. On suppose que V est simplement connexe. Vérifier que $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ a une primitive G. On suppose que φ est une bijection et que son inverse est holomorphe (on dit que φ est une application *biholomorphe*). Trouver une primitive de f.

En déduire que s'il existe une application biholomorphe d'un ouvert V de $\mathbf{C}$ sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, alors toute fonction holomorphe sur U possède une primitive si et seulement si toute fonction holomorphe sur V y admet une primitive.

***Exercice III.19* (Principe de réflexion de Schwarz)**. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. On suppose que f est holomorphe sur $U - U \cap \mathbf{R}$ et continue sur U. Montrer que f est holomorphe sur U.

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ invariant par conjugaison complexe. On appelle

$$U^+ = \{z \in U \mid \text{Im}(z) > 0\} \text{ et } U'^+ = \{z \in U \mid \text{Im}(z) \geq 0\}.$$

Soit $f : U'^+ \to \mathbf{C}$ une fonction continue, holomorphe sur l'ouvert U^+ et prenant des valeurs réelles sur $U \cap \mathbf{R}$. Montrer que

$$F(z) = \begin{cases} f(z) \text{ si } \text{Im}(z) \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})} \text{ si } \text{Im}(z) \leq 0 \end{cases}$$

définit un prolongement holomorphe de f à U.

Exercice III.20. Montrer qu'il existe

– une fonction holomorphe g_1, définie sur $\mathbf{C}-]-\infty, 0]$ et telle que

$$g_1(1) = 1 \text{ et } \forall\, z \in \mathbf{C}-]-\infty, 0], \quad g_1(z)^2 = z$$

– et une fonction holomorphe g_2, définie sur $\mathbf{C}-]-\infty, -1]$ et telle que

$$g_2(1) = \sqrt{2} \text{ et } \forall\, z \in \mathbf{C}-]-\infty, -1], \quad g_2(z)^2 = z + 1.$$

Montrer que la fonction $f : \mathbf{C}-]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbf{C}$ qui à z associe $g_1(z)g_2(z)$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{C} - [-1, 0]$.

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe h définie sur $\mathbf{C} - [-1, 0]$ telle que

$$h(1) = \sqrt{2} \text{ et } \forall\, z \in \mathbf{C} - [-1, 0], \quad h(z)^2 = z(z + 1).$$

***Exercice III.21* (Examen, janvier 2006)**. Sur $U = \mathbf{C} - [0, 1]$, on considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Montrer que, pour tout lacet γ dans U, on a

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Exercice III.22. On suppose que $\gamma([0, 1])$ est un polygone convexe (parcouru une fois). Montrer que $\text{Ind}_\gamma(z) = 1$ pour tout z dans la composante connexe bornée du complémentaire Ω de l'image de γ.

Exercice III.23. Soient γ_0 et γ_1 deux lacets paramétrés[3] par $[0,1]$ ne passant pas par 0 et soit γ le lacet produit

$$\gamma(t) = \gamma_0(t)\gamma_1(t).$$

Montrer que

$$\operatorname{Ind}_\gamma(0) = \operatorname{Ind}_{\gamma_0}(0) + \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(0).$$

Exercice III.24. Soient γ_0 et γ_1 deux tels chemins fermés paramétrés par $[0,1]$ et soit $z \in \mathbf{C}$ tel que

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_0(t)|$$

pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que les nombres $\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(z)$ et $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z)$ sont bien définis et qu'ils sont égaux.

***Exercice III.25* (Théorème de d'Alembert-Gauss)**. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

(1) Pour $R > 0$, on appelle γ_R l'image du cercle de centre 0 et de rayon R par P. Montrer que, pour R assez grand, le lacet γ_R ne passe pas par 0.

(2) Vérifier que, pour R assez grand,

$$|z| \geq R \Rightarrow |z^n| > \left|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\right|.$$

Montrer que $\operatorname{Ind}_{\gamma_R}(0)$ est égal à l'indice par rapport à l'origine de l'image du cercle $|z| = R$ par l'application $z \mapsto z^n$.

(3) Que vaut $\operatorname{Ind}_{\gamma_R}(0)$? Montrer que P a une racine.

Exercice III.26. Montrer que, si 0 n'est pas dans l'image de γ,

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

est un entier.

Exercice III.27. Soit $f(z) = a(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_r)^{m_r}$, où a est un nombre complexe non nul, $z_1, \dots, z_r$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, et les m_i sont des entiers relatifs non nuls.

Montrer que s'il existe une détermination du logarithme de f sur un ouvert connexe D, alors

$$\sum_{i=1}^r m_i \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) = 0$$

pour tout lacet γ dans D.

Soit $g(z) = 1 - \dfrac{1}{z^2}$. Existe-t-il une détermination du logarithme de g dans $\mathbf{C} - A$ avec

– $A = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$
– $A =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

***Exercice III.28* (Logarithme, le retour)**. Existe-t-il une détermination de la « fonction » $\log(z + \sqrt{1-z})$ sur un domaine contenant le segment joignant l'origine au point $1+i$? Quelle est la valeur d'une telle détermination en $1+i$ sachant qu'elle est nulle en 0 ?

Montrer qu'il existe une détermination de la racine cubique de $z^2(2-z)$ sur un disque assez petit centré en 1. On choisit celle qui vaut 1 en 1. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité le long du chemin $t \mapsto e^{it}$ ($t \in [0, \pi/2]$). Quelle est la valeur en i ? Même question avec le chemin $t \mapsto e^{-it}$ ($t \in [0, 3\pi/2]$).

[3] Dans tous ces exercices, les lacets sont supposés suffisamment différentiables pour pouvoir leur appliquer les théorèmes du cours.

***Exercice III.29* (Un calcul d'intégrales)**. Soit γ le lacet représenté sur la figure 7. Vérifier que

$$\int_\gamma e^{iz^2}\,dz = 0$$

et montrer que

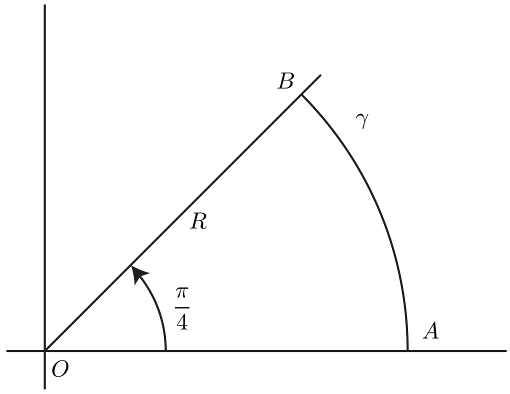


FIGURE 7.

$$\int_{OA} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx,$$
$$\int_{AB} e^{iz^2}\,dz = \int_0^{\pi/4} \exp(iR^2e^{2i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta,$$
$$\int_{BO} e^{iz^2}\,dz = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-r^2}\,dr.$$

Quelles sont les limites de ces deux dernières intégrales lorsque $R \to +\infty$ (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$) ? En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

CHAPITRE IV

POINTS SINGULIERS, FONCTIONS MÉROMORPHES

IV.1. Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent

Une *couronne* est la partie du plan délimitée par deux cercles concentriques. Si R_1 et R_2 sont deux nombres réels positifs vérifiant $R_1 < R_2$, on notera

$$A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbf{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$$

(le A est pour « anneau »). On autorise R_1 à être nul (la couronne est alors un *disque épointé*) et/ou R_2 à être infini.

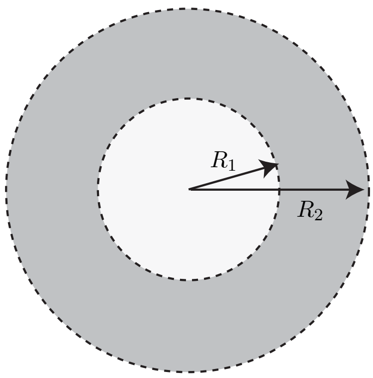


FIGURE 1. Couronne

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres complexes (indexée par $\mathbf{Z}$) telle que, si ρ (resp. σ) est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_{-n} w^n$), on ait

$$\rho \geq R_2 \text{ et } \sigma \geq \frac{1}{R_1}.$$

Alors :

– La série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur les compacts du disque de rayon R_2, et y définit une fonction holomorphe.
– La série $\sum_{n\geq 0} a_{-n} w^n$ converge normalement sur les compacts du disque de rayon $1/R_1$ et donc ($z = 1/w$), la série $\sum_{n\leq 0} a_n z^n$ converge normalement sur les compacts de

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > R_1\}$$

et y définit une fonction holomorphe.

Donc leur somme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ est une série normalement convergente sur les compacts de la couronne $A(R_1, R_2)$ et définit une fonction holomorphe sur cet ouvert. Le but de ce paragraphe est de montrer la réciproque, à savoir que toute fonction holomorphe sur la couronne est somme d'une série de ce type, dite *série de Laurent*.

***Théorème IV.1.1* (Laurent).** *Toute fonction holomorphe dans une couronne $A(R_1, R_2)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne. Les coefficients du développement de f se calculent par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} z^{-n-1} f(z)dz$$

pour $r \in]R_1, R_2[$ arbitraire.

***Exemple IV.1.2*.** La fonction $1/z(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$. D'après le théorème, elle doit être développable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans cet ouvert. Et en effet :

- pour $0 < |z| < 1$ (couronne centrée en 0 de rayons 0 et 1) :
$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0} z^n,$$
- pour $0 < |z-1| < 1$ (couronne centrée en 1, rayons 0 et 1) :
$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n\geq 0} (-1)^n (z-1)^n,$$
- pour $1 < |z|$ (couronne centrée en 0, rayons 1 et ∞) :
$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z^2}\frac{z}{z-1} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n\geq 2}\frac{1}{z^n}.$$

En préparation de la démonstration du théorème, énonçons une conséquence directe du théorème d'homotopie III.2.3.

***Lemme IV.1.3*.** *Soit g une fonction holomorphe sur la couronne $A(R_1, R_2)$. Alors l'intégrale*

$$\int_{C(0,r)} g(z)dz$$

ne dépend pas de $r \in]R_1, R_2[$.

Démonstration. Si $R_1 < r_1 \leq r_2 < R_2$, on déforme le cercle de rayon r_1 sur le cercle de rayon r_2 dans la couronne à travers les cercles concentriques. Une formule pour cette homotopie est

$$\Gamma(s, t) = ((1-s)r_1 + sr_2)e^{it}.$$ □

On démontre ensuite :

***Proposition IV.1.4*.** *Soit f une fonction holomorphe sur la couronne $A(R_1, R_2)$. Soit $z \in A(R_1, R_2)$ et soient r_1, r_2 tels que $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$. Alors les intégrales*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw \quad et \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

ne dépendent pas de r_1 et r_2. De plus, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Démonstration. On applique le lemme IV.1.3 à la fonction holomorphe

$$w \longmapsto \frac{f(w)}{w-z}$$

sur la couronne $A(R_1, |z|)$ pour obtenir que la première intégrale ne dépend pas de r_1. On l'applique à la même fonction sur $A(|z|, R_2)$ pour obtenir le résultat analogue sur la deuxième intégrale.

Il reste à démontrer la formule donnant $f(z)$. On considère la fonction $g : A(R_1, R_2) \to \mathbf{C}$ définie par

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Elle est évidemment holomorphe sauf peut-être en $w = z$. En fait, elle l'est aussi en ce point. Il suffit de développer la fonction holomorphe f en série entière au voisinage de z en

$$f(w) = \sum_{n \geq 0} b_n (w - z)^n$$

de sorte que $f'(z) = b_1$ et que

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{\sum b_n (w-z)^n - b_0}{w - z} = \sum_{n \geq 1} b_n (w - z)^{n-1}.$$

Donc sur ce voisinage,

$$g(w) = \sum_{n \geq 0} b_{n+1} (w - z)^n.$$

Donc g est holomorphe sur la couronne $A(R_1, R_2)$. On peut donc lui appliquer le lemme IV.1.3 pour obtenir :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw.$$

Calculons le membre de gauche. Il vaut

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \left\{ \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{C(0,r_1)} \frac{dw}{w - z} \right\} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw \end{aligned}$$

puisque z est à l'extérieur du disque de rayon r_1, il est dans la composante non bornée du complémentaire du cercle et donc son indice par rapport à ce cercle est nul (proposition III.4.3).

Le membre de droite, lui, vaut

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \left\{ \int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{C(0,r_2)} \frac{dw}{w - z} \right\} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \end{aligned}$$

puisque $\operatorname{Ind}_{C(0,r_1)} = 1$, ce qui finit la démonstration de la proposition. □

Démonstration du théorème IV.1.1. Il n'y a plus grand chose à faire. Si z est tel que

$$R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2,$$

la proposition donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

On écrit les développements *normalement convergents*

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} \text{ pour } |w| = r_2 \text{ et } \left|\frac{z}{w}\right| < 1$$

et

$$\frac{1}{w-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}} \text{ pour } |w| = r_1 \text{ et } \left|\frac{w}{z}\right| < 1$$

et on les reporte (puisqu'ils sont normalement convergents) dans les intégrales ci-dessus :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) z^n + \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{C(0,r_1)} w^n f(w) dw \right) z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

pour

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

comme annoncé. □

Corollaire IV.1.5. *Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $A(R_1, R_2)$. Il existe une fonction f_2, holomorphe pour $|z| < R_2$ et une fonction f_1 holomorphe pour $|z| > R_1$ et telles qu'on ait*

$$\forall\, z \in A(R_1, R_2), \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

De plus cette décomposition est unique si on impose que f_1 tende vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini.

Démonstration. Le théorème IV.1.1 affirme l'existence d'un développement de f en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$$

tel que les deux fonctions

$$f_1(z) = \sum_{n<0} a_n z^n \text{ et } f_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

aient les propriétés voulues.

Si $f = g_1 + g_2$ est une autre décomposition vérifiant ces propriétés, posons

$$h(z) = \begin{cases} f_2(z) - g_2(z) & \text{pour } |z| < R_2 \\ g_1(z) - f_1(z) & \text{pour } |z| > R_1. \end{cases}$$

(ces deux formules donnent le même résultat sur la couronne). La fonction h est entière, elle tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, de sorte qu'elle est bornée. Elle est donc constante d'après le théorème de Liouville (théorème II.3.1). La constante est nulle puisque h tend vers 0 à l'infini. □

IV.2. Points singuliers, fonctions méromorphes

On considère maintenant une fonction holomorphe sur un disque épointé (une couronne $A(0, R)$). On remarque d'abord que le théorème de Laurent (théorème IV.1.1) affirme dans ce cas ($R_1 = 0$, $R_2 = R$) que la fonction se développe en

$$\sum_{n>0} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

où les séries entières $\sum a_{-n} w^n$ et $\sum a_n w^n$ ont des rayons de convergence respectivement *infini* et au moins égal à R. En particulier $\sum_{n>0} a_{-n} z^{-n}$ converge normalement sur les compacts de $\mathbf{C} - \{0\}$.

On se demande maintenant si on peut prolonger une fonction holomorphe sur le disque épointé en une fonction holomorphe sur le disque de rayon R tout entier.

Proposition IV.2.1. *Pour qu'une fonction f holomorphe sur un disque épointé se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque, il faut et il suffit que $|f|$ soit bornée au voisinage du centre.*

On appelle parfois ce résultat, dû à Riemann, le « théorème de la singularité apparente » (en anglais *removable singularity theorem*, puisque, si la singularité n'est qu'apparente, on peut l'ôter).

On remarque ici que f se prolonge en une fonction holomorphe si et seulement si elle se prolonge en une fonction continue.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On suppose pour simplifier que le disque est centré en 0.

Sur $A(0, R)$, grâce aux résultats précédents (théorème IV.1.1), la fonction se développe en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n.$$

Écrivons l'hypothèse : il existe deux réels $r_0 > 0$ et M tels que

$$|z| \leq r_0 \Rightarrow |f(z)| \leq M.$$

Pour $|z| = r \leq r_0$, on a donc, d'après le théorème IV.1.1,

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(0,r)} z^{-n-1} f(z)\, dz\right| \\
&= \frac{1}{2\pi} M \left|\int_0^{2\pi} ir^{-n} e^{-(n-1)it} f(re^{it}\, dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} M \left|\int_0^{2\pi} r^{-n} e^{it} dt\right| \\
&\leq \frac{M}{r^n} \text{ car } \left|f(re^{it}\right| \leq M \quad \forall t \in [0, 2\pi]
\end{aligned}$$

et ceci pour toutes les valeurs de n, positives ou négatives, et pour tout $r \leq r_0$.

Pour $n < 0$, cette majoration impose donc qu'on ait $a_n = 0$ (en faisant tendre r vers 0) et que la série de Laurent soit en fait une série entière, qui donne le prolongement voulu en 0. ☐

Remarque IV.2.2. Cette démonstration est complètement analogue à celle donnée pour le théorème de Liouville (théorème II.3.1)... en remplaçant z qui, là-bas, tendait vers l'infini par $1/z$ qui, ici, tend vers 0.

Si on ne peut pas prolonger f, on dit qu'elle a un *point singulier* (ou une *singularité*) au centre z_0 du disque. Il y a alors deux possibilités :

(1) Soit presque tous[(1)] les a_n ($n < 0$) sont nuls. Alors il existe un entier $n > 0$ tel que $z \mapsto (z - z_0)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe en z_0. On dit que f est *méromorphe* en z_0 et que z_0 est un *pôle* de f. Si f n'est pas holomorphe en z_0 mais que $z \mapsto (z - z_0)f(z)$ l'est, on dit que z_0 est un pôle *simple* de f. Par exemple, 0 est un pôle simple de $1/z$. On définit de même pôle double, pôle d'ordre k ($k \geq 1$).

(2) Soit il y a une infinité de coefficients a_n non nuls. On dit que z_0 est une *singularité essentielle*.

---

(1) « Presque tous » veut dire « tous sauf un nombre fini », comme toujours.

Définition IV.2.3. On appelle *fonction méromorphe* sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur le complémentaire dans U d'une partie discrète F qui est méromorphe en tout point de F.

Exemple IV.2.4. Les fractions rationnelles sont des fonctions méromorphes (les pôles sont les racines du dénominateur), mais ce ne sont pas les seules. Le quotient de deux fonctions holomorphes sur U est une fonction méromorphe sur U. L'ensemble discret F est ici l'ensemble des zéros (isolés ! grâce à la proposition I.2.7) du dénominateur.

Remarque IV.2.5. L'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur l'ouvert U est une algèbre. C'est même un corps quand U est connexe. On peut montrer, mais ce n'est pas facile(2), que c'est le corps des fractions de $\mathcal{O}(U)$, c'est-à-dire que toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions holomorphes sur U.

Séries de fonctions méromorphes. Si (f_n) est une suite des fonctions méromorphes sur U et si K est une partie de U, on dira que la série $\sum f_n$ *converge uniformément* (resp. *normalement*) sur K si

- l'ensemble des entiers n tels que f_n a un pôle dans K est fini et
- les autres f_n forment une série uniformément (resp. normalement) convergente sur K.

On démontre alors facilement que, si (f_n) est une série de fonctions méromorphes qui converge normalement sur les compacts de U, la somme est méromorphe sur U et qu'on peut calculer la dérivée de la somme comme somme des dérivées des f_n.

IV.3. La sphère de Riemann

Une fonction méromorphe sur un ouvert U n'est pas vraiment une fonction sur U : c'est en réalité une fonction définie sur le complémentaire d'une partie discrète. On a envie ici de prolonger ces fonctions de façon à ce qu'elles soient définies sur U tout entier. La seule valeur qu'on puisse imaginer de donner à une expression telle que $1/z^n$ est « ∞ » quel que soit le sens que ça puisse avoir.

Dans cette partie, on fait une construction rigoureuse qui permet de réaliser ce désir (et même au-delà). L'idée est d'ajouter un point à l'espace localement compact $\mathbf{C}$ pour le rendre compact(3). Notons $\widehat{\mathbf{C}}$ l'ensemble

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

où ∞ est juste le nom que je donne au point ajouté. Pour justifier ce nom, on met une topologie sur ce qui n'est, pour le moment, qu'un ensemble.

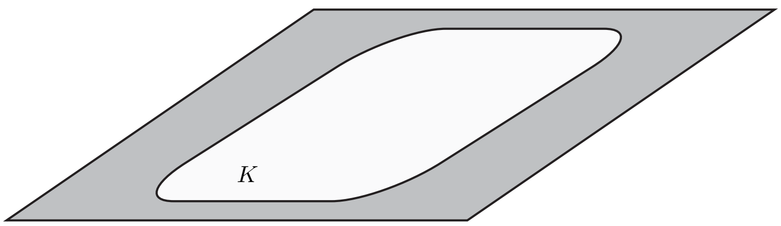


Figure 2. Voisinage de ∞

Pour définir cette topologie, il suffit de donner une base de voisinages de chaque point. Considérons donc un point z de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. De deux choses l'une :

(2) Dans le cas où $U = \mathbf{C}$, c'est une conséquence d'un théorème de Weierstrass, celui démontré ici dans l'exercice VI.18.

(3) C'est un cas particulier d'une construction plus générale, celle du compactifié d'Alexandrov (en anglais *one point compactification*) d'un espace localement compact.

- soit $z \in \mathbf{C}$, on alors prend pour base de voisinages de z les boules ouvertes centrées en z (c'est une base de voisinages de z pour la topologie usuelle de $\mathbf{C}$),
- soit $z = \infty$, cas où l'on prend pour base de voisinages de ∞ dans $\widehat{\mathbf{C}}$ les complémentaires des compacts de $\mathbf{C}$ auxquels on ajoute ∞, en d'autres termes les $(\mathbf{C} - K) \cup \{\infty\}$, où $K \subset \mathbf{C}$ est un compact.

Proposition IV.3.1. *Cette topologie fait de $\widehat{\mathbf{C}}$ un espace topologique compact, homéomorphe à la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$.*

Démonstration. Montrons d'abord directement que $\widehat{\mathbf{C}}$ est compact.

D'abord il est séparé parce que $\mathbf{C}$ est séparé et localement compact : si x et y sont deux points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$, soit ils sont tous les deux dans $\mathbf{C}$ et peuvent être séparés comme d'habitude par des disques, sinon, l'un des deux, disons y est ∞ et l'autre, x est dans $\mathbf{C}$, on sépare alors x et y en prenant

- pour voisinage de x le disque de centre x et rayon r
- et pour voisinage de ∞ le complémentaire du disque ouvert de centre x et de rayon $r + 1$.

Soit maintenant $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $\widehat{\mathbf{C}}$ par des ouverts. Comme c'est un recouvrement, au moins un des U_i contient ∞. Fixons i_0 tel que $U_{i_0} \ni \infty$. Le complémentaire de U_{i_0} est un compact K de $\mathbf{C}$. Pour tout $i \neq i_0$, on définit $U'_i = U_i \cap \mathbf{C}$, qui est un ouvert de $\mathbf{C}$ (par définition, la topologie induite par celle de $\widehat{\mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}$ est la topologie de $\mathbf{C}$). Les U'_i recouvrent K qui est compact, on peut donc en extraire un recouvrement fini $U'_{i_1}, \ldots, U'_{i_n}$. Bien entendu, les U_{i_k} avec $0 \leq k \leq n$ forment un recouvrement fini de $\widehat{\mathbf{C}}$ extrait du recouvrement donné au départ.

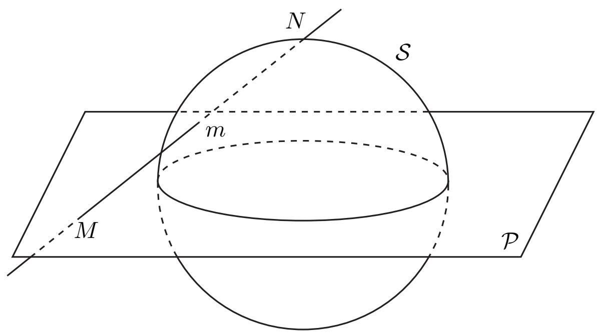


FIGURE 3. Projection stéréographique

Montrons maintenant que $\widehat{\mathbf{C}}$ est homéomorphe à une sphère. On se place sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$:

$$S = \left\{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1\right\}.$$

On définit la *projection stéréographique* $\varphi : S \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ par

$$(u, v, w) \xmapsto{\varphi} \begin{cases} \dfrac{u + iv}{1 - w} & \text{si } w \neq 1 \\ \\ \infty & \text{si } w = 1. \end{cases}$$

L'application φ est représentée sur la figure 3. Elle associe à un point m de la sphère le point d'intersection M de la droite joignant m au pôle nord N avec le plan équatorial de la sphère. Ce n'est bien défini que si m n'est pas le pôle nord, auquel cas on lui associe le point ∞.

Au vu de la description géométrique de φ, il est clair qu'elle est bijective ; au vu de sa description par une formule, il est clair que sa restriction à $S - \{N\}$ est continue.

En plus, φ est continue en N : montrons que l'image inverse d'un voisinage U de ∞ est un voisinage de N. On écrit

$$U = (\mathbf{C} - K) \cup \{\infty\}, \qquad \varphi^{-1}(U) = S - \varphi^{-1}(K).$$

Mais K est compact, donc fermé dans $\mathbf{C}$, la restriction de φ à $S - \{N\}$ est continue, donc $\varphi^{-1}(K)$ est fermé dans S, son complémentaire est un ouvert de S qui contient N, donc un voisinage de N.

On a donc une application bijective φ continue de l'espace compact S dans l'espace compact $\widehat{\mathbf{C}}$. Elle est bicontinue. C'est un homéomorphisme. □

Remarque IV.3.2. La projection stéréographique (plus précisément son inverse) transforme un cercle (respectivement une droite) du plan $\mathbf{C}$ en un cercle (respectivement passant par ∞) de $\widehat{\mathbf{C}}$, un exercice pas très difficile si on a remarqué que φ est la restriction à la sphère d'une inversion. Voir les exercices (et, par exemple, [**Aud06**]).

Définition IV.3.3. On appelle $\widehat{\mathbf{C}}$ la *sphère de Riemann*.

Remarque IV.3.4. Une remarque fondamentale est que la transformation $z \mapsto 1/z$ échange voisinages de 0 dans $\mathbf{C}$ et voisinages de ∞ dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

Fonctions holomorphes, méromorphes. On dit qu'une fonction f définie sur le complémentaire d'un disque dans $\mathbf{C}$ (resp. le complémentaire d'un disque moins un ensemble discret) est *holomorphe en* ∞ (resp. *méromorphe en* ∞) si l'application

$$z \longmapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

est holomorphe (resp. méromorphe) en 0.

Exemples IV.3.5

(1) Si P est un polynôme de degré n,

$$P(z) = z^n + \cdots + a_0, \qquad P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} + \cdots + a_0$$

donc P est méromorphe en ∞ (et y a un pôle d'ordre n).

(2) La fonction exponentielle

$$f(z) = e^z, \qquad f\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{-n}}{n!}$$

a une singularité *essentielle* en ∞. Elle ne définit pas une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$.

Dans ce nouveau contexte, le théorème de Liouville II.3.1 affirme :

***Théorème IV.3.6* (Liouville, deuxième version)**. *Toute fonction holomorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$ est constante.*

Démonstration. En effet, dire que f est holomorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, c'est dire que f est holomorphe sur $\mathbf{C}$ (donc entière) et que

$$z \longmapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

est bornée au voisinage de 0, soit que f est bornée sur $\mathbf{C}$. □

On peut faire plus précis :

Proposition IV.3.7. *Pour qu'une fonction entière se prolonge en une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, il faut et il suffit que ce soit un polynôme.*

Démonstration. Dire qu'une fonction entière f se prolonge en une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$ est équivalent à dire qu'il existe un entier n tel que

$$z \longmapsto z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$$

soit bornée au voisinage de 0 (proposition IV.2.1), soit

$$|z| \leq r \Rightarrow \left|z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq M.$$

En posant $u = 1/z$, ceci se réécrit

$$|u| \geq \frac{1}{r} \Rightarrow |f(u)| \leq M\,|u|^n .$$

Et ceci est équivalent à dire que f est un polynôme (voir au besoin l'exercice II.36). □

Il y a bien sûr des fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$ qui ne sont pas des polynômes, mais alors elles ont des pôles dans $\mathbf{C}$. C'est le cas de toutes les fractions rationnelles

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \in \mathbf{C}[X].$$

Proposition IV.3.8. *Si f est méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, elle a un nombre fini de pôles et un nombre fini de zéros dans $\widehat{\mathbf{C}}$.*

Démonstration. On écrit $\widehat{\mathbf{C}}$ comme réunion de deux compacts

$$K_0 = \{z \mid |z| \leq R+1\}$$

et

$$K_\infty = \{z \mid |z| \geq R\},$$

voisinages respectivement de 0 et ∞. Comme f est méromorphe sur $\mathbf{C}$, elle a un nombre fini de zéros et de pôles dans le compact K_0. La fonction $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ est aussi méromorphe sur $\mathbf{C}$, elle a donc un nombre fini de zéros et de pôles dans le disque $|z| \leq 1/R$, de sorte que f a un nombre fini de zéros et de pôles dans K_∞. □

Remarque IV.3.9. La fonction entière $z \mapsto \sin z$ a une infinité de zéros dans $\mathbf{C}$... et donc une singularité essentielle à l'infini (comme on peut bien sûr le vérifier en développant $\sin \frac{1}{w}$ sur $\mathbf{C} - \{0\}$).

Proposition IV.3.10. *Les fractions rationnelles sont les seules fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$.*

Démonstration. Soit f une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, soient $a_1, \ldots, a_n$ ses pôles dans $\mathbf{C}$ et $k_1, \ldots, k_n$ leurs multiplicités (on utilise la proposition IV.3.8). La fonction

$$(z-a_1)^{k_1} \cdots (z-a_n)^{k_n} f(z)$$

est entière sur $\mathbf{C}$, méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, c'est donc un polynôme d'après la proposition IV.3.7. □

Avec une fonction f méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$, on peut fabriquer une application bien définie sur tout $\widehat{\mathbf{C}}$ et à valeurs dans $\widehat{\mathbf{C}}$:

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbf{C}} &\longrightarrow \widehat{\mathbf{C}} \\ z &\longmapsto \begin{cases} f(z) \in \mathbf{C} & \text{si } z \text{ n'est pas un pôle} \\ \infty & \text{si } z \text{ est un pôle.} \end{cases} \end{aligned}$$

L'application ainsi définie est continue. Il suffit pour le démontrer de vérifier que l'image inverse d'un voisinage de ∞ est un voisinage des pôles. Soit $R > 0$, de sorte que

$$U = \{w \mid |w| > R\}$$

est un voisinage de ∞... On voit bien sûr que

$$f^{-1}(U) = \{z \in \mathbf{C} \mid |f(z)| > R\}$$

est un voisinage des pôles de f. □

On dit qu'un tel f est un *automorphisme* de $\widehat{\mathbf{C}}$ si f est bijective et si son application réciproque a les mêmes propriétés.

Théorème IV.3.11 **(Automorphismes de $\widehat{\mathbf{C}}$).** *Les automorphismes de $\widehat{\mathbf{C}}$ sont les homographies*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2; \mathbf{C}).$$

Les automorphismes forment un groupe, les homographies aussi, ce groupe est le *groupe projectif* $\mathrm{PGL}(2; \mathbf{C})$, quotient de $\mathrm{GL}(2; \mathbf{C})$ par son centre (les homothéties, voir au besoin l'exercice IV.20).

Démonstration. Si f est injective, elle a un seul zéro et un seul pôle. Quitte à la composer par une homographie, on peut supposer que $f(\infty) = \infty$. Pour tout $w \in \mathbf{C}$, il existe donc un unique $z \in \mathbf{C}$ tel que $f(z) = w$. Autrement dit, comme nous savons que f est une fraction rationnelle P/Q, pour tout $w \in \mathbf{C}$, l'équation

$$P(z) = wQ(z)$$

a une unique solution $z_0 \in \mathbf{C}$. Pour conclure que P et Q sont au plus de degré 1, vérifions que cette solution n'est pas une racine multiple du polynôme $R(z) = P(z) - wQ(z)$. Si c'était le cas, la dérivée de R serait nulle en z_0 elle aussi. Mais, si

$$P(z_0) - wQ(z_0) = 0 \text{ et } P'(z_0) - wQ'(z_0) = 0,$$

alors

$$f'(z_0) = \frac{P(z_0)Q'(z_0) - P'(z_0)Q(z_0)}{Q(z_0)^2} = 0.$$

Comme f est inversible, nous savons que $f'(z_0) \neq 0$.

Donc P et Q sont de degré au plus 1 et l'on peut écrire $P(z) = az + b$, $Q(z) = cz + d$. La condition que $f(0) \neq f(\infty)$, c'est-à-dire $b/d \neq a/c$ (avec les conventions d'usage) donne le désiré $ad - bc \neq 0$. □

Remarque IV.3.12. Le bon langage, pour parler d'homographies, est celui de la géométrie projective : notre sphère unité de $\mathbf{R}^3$, alias sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}}$, est aussi la *droite projective complexe* $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ (voir par exemple [**Aud06**]).

IV.4. Singularités essentielles

Une fonction qui a une singularité essentielle en z_0 n'a aucune limite (finie ou infinie) en z_0 : si elle tendait vers l'infini, on aurait

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

et $1/f$ serait holomorphe en z_0, ce qui fait que l'on pourrait écrire

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n g(z) \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } g(z_0) \neq 0$$

de sorte que f a un pôle en z_0. Les fonctions f qui ont un pôle en z_0 sont celles dont l'inverse a un zéro en z_0. En une singularité essentielle, on s'attend donc à ce que le comportement d'une fonction soit assez compliqué. Il est assez bien décrit par le théorème suivant.

***Théorème IV.4.1* (Casorati-Weierstrass).** *Soit z_0 un point singulier essentiel d'une fonction f holomorphe sur le disque épointé $D(z_0, r) - \{z_0\}$. Alors, pour tout A (fini ou infini), il existe une suite z_n de points du disque qui converge vers z_0 et telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = A.$$

En d'autres termes, l'image du disque épointé est dense dans $\mathbf{C}$ (et même dans $\widehat{\mathbf{C}}$, mais rajouter le point à l'infini est facile ici). Remarquons aussi que ce n'est pas le cas pour une fonction qui a un pôle en z_0 : l'image d'un voisinage de z_0 est alors un voisinage de ∞.

Démonstration. Le théorème est clair pour $A = \infty$ puisque la fonction f n'est bornée sur aucun voisinage de z_0. On suppose donc que $A \in \mathbf{C}$ et que la conclusion du théorème est fausse. Alors (quitte à diminuer r_0), il doit exister un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, z \in D(z_0, r) - \{z_0\}\,, \quad |f(z) - A| > \alpha.$$

Alors la fonction

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

est holomorphe sur le disque épointé et satisfait à l'inégalité

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{\alpha}.$$

La proposition IV.2.1 montre alors que g se prolonge en une fonction (encore notée g) holomorphe en z_0, et de plus que

$$g(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z) - A}.$$

La fonction f n'est bornée dans aucun voisinage épointé de z_0, donc cette limite doit être nulle et $g(z_0) = 0$. La fonction holomorphe g a un zéro en z_0, donc la fonction $z \mapsto f(z) - A$ a un pôle en z_0, donc il en est de même de f, ce qui est contradictoire avec le fait que f avait une singularité essentielle en z_0. □

***Exemple IV.4.2*.** La fonction $f(z) = e^{1/z}$ a une singularité essentielle en 0, nous l'avons déjà dit lorsque nous avons remarqué que la fonction exponentielle en a une à l'infini. Et en effet, on trouve facilement une suite comme celle que nous promet le théorème.

- Pour $A = \infty$, la suite $z_n = 1/n$ donne $f(z_n) = e^n \to \infty$;
- pour $A = 0$, la suite $z_n = -1/n$ donne $f(z_n) = e^{-n} \to 0$;
- et finalement, pour $A \neq 0, \infty$, choisissons un B tel que $e^B = A$ et définissons la suite

  $$z_n = \frac{1}{B + 2in\pi},$$

  qui converge vers 0 et satisfait à $f(z_n) \to A$ (on a même ici $f(z_n) = A$, ce qui nous amène à la remarque suivante).

***Remarque IV.4.3* (Le théorème de Picard).** Le fait que l'on ait trouvé, dans l'exemple ci-dessus, pour toutes les valeurs de A (sauf 0 et ∞) une suite z_n tendant vers z_0 et telle que $f(z_n) = A$ n'est pas un accident mais un fait très général, si l'on en croit un théorème de Picard, qu'il n'est pas question de démontrer[(4)] mais qu'il serait dommage de ne pas énoncer ici. Il affirme que, si z_0 est une singularité essentielle de f, pour tout nombre $A \in \mathbf{C}$, sauf peut-être *un*, il existe une suite z_n tendant vers z_0 et telle que $f(z_n) = A$. Autrement dit, f est presque surjective : elle rate au plus un point (comme c'est le cas pour la fonction $e^{1/z}$ qui « rate » 0).

Le théorème de Casorati-Weierstrass permet de déterminer les automorphismes de $\mathbf{C}$. Il s'agit, comme toujours (exercice II.43, théorème IV.3.11) des applications analytiques bijectives de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ (dont l'application réciproque est aussi une fonction entière, mais c'est automatique).

***Théorème IV.4.4* (Automorphismes de C).** *Les automorphismes de* $\mathbf{C}$ *sont les fonctions de la forme* $f(z) = az + b$*, pour des constantes* a *et* b *(avec* $a \neq 0$*).*

Si le groupe des automorphismes de $\widehat{\mathbf{C}}$ était le groupe $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{C})$ des transformations « projectives », le groupe des automorphismes de $\mathbf{C}$ est donc celui des transformations affines de $\mathbf{C}$.

Démonstration. Soit donc f un automorphisme de $\mathbf{C}$. En remplaçant f par $f - f(0)$, on peut supposer que $f(0) = 0$. Nous voulons donc démontrer que les automorphismes de $\mathbf{C}$ tels que $f(0) = 0$ sont de la forme $z \mapsto az$ pour un nombre complexe $a \neq 0$. Considérons la fonction

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ pour } z \neq 0.$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Développons f en série entière au voisinage de 0,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \text{ donc } g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n}$$

est un développement en série de Laurent de g sur un disque épointé centré en 0.

Montrons que g ne peut avoir une singularité essentielle en 0. La fonction f est bijective, analytique, et envoie 0 sur 0, elle définit donc une bijection d'un voisinage ouvert de 0 sur un autre voisinage ouvert de 0. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\text{si } |w| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ alors } |f(w)| > C.$$

En faisant le changement de variable $z = 1/w$, on a donc

$$\text{si } |z| < \varepsilon, \text{ alors } |g(z)| > C.$$

Ceci est contradictoire avec la conclusion du théorème de Casorati-Weierstrass. Donc 0 n'est pas une singularité essentielle de g.

Ainsi le développement de g est fini, donc celui de f en série entière aussi et donc f est un polynôme, disons de degré n. Comme elle est injective, elle n'atteint 0 qu'une fois, donc ce polynôme a une seule racine (qui, d'ailleurs est 0, puisque $f(0) = 0$). Ainsi,

$$f(z) = az^n \text{ pour } a \in \mathbf{C}, \, a \neq 0.$$

L'injectivité de f implique encore que $n = 1$, ce qui est ce que nous voulions démontrer. □

[(4)] On trouvera un énoncé conséquence du théorème de Casorati-Weierstrass et confirmant la non-injectivité d'une fonction avec une singularité essentielle dans l'exercice IV.34.

Remarque IV.4.5. On a ainsi déterminé les automorphismes du disque unité ouvert (exercice II.43), ceux de la sphère de Riemann (théorème IV.3.11) et ceux de **C**, c'est-à-dire, si l'on en croit le théorème de la représentation conforme — que nous ne démontrerons pas dans ces notes, mais dont on trouvera des versions par exemple dans [**Car61**, § VI.3] et [**Rey90**] — ceux de toutes les surfaces de Riemann ([**Car61**, § VI.5], [**Rey90**]) simplement connexes.

Exercices

Exercice IV.1. Montrer que les séries de Laurent peuvent être dérivées terme à terme.

Exercice IV.2. On suppose que a et b sont tels que $0 < |a| < |b|$. Trouver le développement en série de Laurent de la fonction $1/(z-a)(z-b)$ dans la couronne $A(|a|, |b|)$.

Exercice IV.3. Trouver le développement en série de Laurent de la fonction $(z^2-2z+5)/(z-2)(z^2+1)$ dans la couronne $A(1, 2)$.

Exercice IV.4. Existe-t-il un polynôme P non nul tel que $P(z)e^{1/z}$ soit une fonction entière ?

Exercice IV.5. Montrer que la série de Laurent

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

définit une fonction qui n'a pas de singularité essentielle en 0. Pourquoi n'est-ce pas contradictoire avec l'étude faite au § IV.2 ?

Exercice IV.6. On considère la fonction $f(z) = 1/(z-1)(z-2)$. Trouver son développement en série de Laurent

(1) dans le disque $|z| < 1$;
(2) dans la couronne $1 < |z| < 2$;
(3) dans la couronne $|z| > 2$.

Exercice IV.7. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}.$$

Combien a-t-elle de développements en série de Laurent ? Dans quelles régions sont-ils convergents ? Trouver les coefficients de ces développements.

Exercice IV.8. Montrer que les formules suivantes définissent des fonctions méromorphes sur **C** et déterminer leurs pôles (et les ordres de ceux-ci)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{z^2+n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

***Exercice IV.9* (Examen, janvier 2007)**. Déterminer les développements de Laurent des fonctions suivantes sur les couronnes indiquées :

(1) $1/\exp(1/z)$ sur $\mathbf{C} - \{0\}$,
(2) $1/(z-a)^n$ (on suppose $n \geq 1$ et $a \neq 0$) sur
   (a) $|z-a| > 0$,
   (b) $|z| > |a|$.

***Exercice IV.10* (Fonctions de Bessel (bis))**. Soient $k \in \mathbf{Z}$ et $z \in \mathbf{C}$. On appelle $J_k(z)$ le coefficient de w^k dans le développement en série de Laurent

$$\exp\left(\frac{1}{2}(w+w^{-1})z\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z)w^k.$$

Montrer que J_k est une fonction entière de z et que, pour tout $k \geq 0$, son développement en série entière est celui donné dans l'exercice I.42.

Exercice IV.11. Construire un espace topologique compact $\widehat{\mathbf{R}}$ contenant $\mathbf{R}$ comme sous-espace topologique en ajoutant un point à $\mathbf{R}$. Montrer que l'espace obtenu est homéomorphe à un cercle.

Exercice IV.12. Trouver toutes les injections holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, puis toutes les injections holomorphes de $\mathbf{C}^\star$ dans $\mathbf{C}^\star$.

Exercice IV.13. Soit f une fonction analytique dans $\mathbf{C}^\star$ vérifiant

$$\forall\, z \in \mathbf{C}^\star \qquad |f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

Montrer que f est constante.

Exercice IV.14. Existe-t-il une fonction holomorphe f sur le disque épointé de centre 0 et de rayon R telle que $|f(z)|$ soit équivalent à $\exp \dfrac{1}{|z|}$ au voisinage de 0 ?

Exercice IV.15. Dire si les fonctions suivantes sont ou ne sont pas des fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$. Quand elles le sont, quels sont leurs zéros et leurs pôles ?

$$\frac{z^3+1}{z^4-1}, \quad \exp(z-1), \quad \exp\frac{1}{z}, \quad \frac{e^z}{z^6-5}, \quad \frac{z\sin z}{z^2+1}, \quad \frac{z^6-1}{z^3-1}.$$

***Exercice IV.16* (Examen, janvier 2007)**. Quelles sont les singularités de la fonction $f(z) = \dfrac{z}{e^z-1}$ dans $\mathbf{C}$? Dans $\widehat{\mathbf{C}}$? On précisera la nature de chacune de ces singularités.

Exercice IV.17. On suppose que f est une fonction analytique à l'infini. Montrer que

$$\lim_{z\to\infty} f'(z) = 0.$$

Exercice IV.18. Par la projection stéréographique, deux points z_1 et z_2 de $\mathbf{C}$ sont envoyés sur deux points diamétralement opposés de la sphère. Quelle relation y a-t-il entre z_1 et z_2 ? Que devient la transformation $z \mapsto 1/\overline{z}$ par projection stéréographique ?

Exercice IV.19. Sur la sphère de Riemann, dessiner le cercle unité, les axes réel et imaginaire pur, les cercles de centre 0 et les droites passant par l'origine. Puis, sur une autre figure, représenter les images de ces courbes par l'application

$$z \longmapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

(déjà étudiée dans l'exercice II.20).

Exercice IV.20. Quel est le centre du groupe $\mathrm{GL}(2;\mathbf{C})$? Montrer que les homographies forment un groupe et que ce groupe est le groupe $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{C})$ quotient de $\mathrm{GL}(2;\mathbf{C})$ par son centre.

Exercice IV.21. Montrer que les six homographies

$$f_1(z) = z, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = 1 - z, \quad f_4(z) = \frac{1}{1-z}, \quad f_5(z) = \frac{z-1}{z}, \quad f_6(z) = \frac{z}{1-z}$$

forment un sous-groupe du groupe des homographies. À quel groupe ce sous-groupe est-il isomorphe ?

Exercice IV.22. Montrer qu'une homographie a, en général, deux points fixes. Que peut-on dire d'une homographie qui a trois points fixes ?

Exercice IV.23. On suppose que f est une homographie qui a deux points fixes distincts z_1 et z_2. Montrer qu'il existe un scalaire k tel que, si $w = f(z)$,

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k\frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Montrer que $f'(z_1)f'(z_2) = 1$.

Exercice IV.24. Quelles sont les images des courbes suivantes par la fonction $z \mapsto 1/z$?

(1) $x^2 + y^2 = ax$;
(2) $x^2 + y^2 = by$;
(3) $y = x + b$;
(4) $y = kx$.

Exercice IV.25. Montrer que toute homographie est composée de similitudes et de l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$. En déduire que toute homographie transforme un cercle ou une droite de $\mathbf{C}$ en un cercle ou une droite.

Exercice IV.26. Trouver les images des parties de $\mathbf{C}$ ci-dessous par les homographies indiquées :

- le quadrant $x > 0$, $y > 0$ par $(z - i)/(z + i)$,
- le demi-disque $|z| < 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ par $(2z - i)/(2 + iz)$,
- le secteur $0 < \theta < \pi/4$ par $z/(z - 1)$,
- la bande $0 < x < 1$ par $(z - 1)/z$, par $(z - 1)/(z - 2)$

(on pourra utiliser l'exercice précédent). On demande, dans chacun des cas, de dessiner la partie considérée sur la sphère de Riemann, puis son image sur la même sphère.

Exercice IV.27. On demande de déterminer l'image de la bande $x_0 < x < x_0 + h$ (où $h \in]0, \pi]$) par la fonction méromorphe

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

On propose de le faire en vérifiant que $w = \tan z$ s'obtient comme composition de

$$w = \frac{1}{i}\frac{\tau - 1}{\tau + 1}, \quad \tau = t^2, \quad t = e^{\zeta}, \quad \zeta = iz.$$

Exercice IV.28. Trouver une homographie qui envoie le point i sur 0 et le demi-plan supérieur

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

(dit *demi-plan de Poincaré*) sur l'intérieur du disque unité. Quelles sont les images des demi-droites parallèles à l'axe des y ? des demi-cercles centrés sur l'axe des x ? De quelles courbes dans $\mathcal{H}$ les diamètres du disque unité sont-ils les images ?

***Exercice IV.29* (Automorphismes du demi-plan de Poincaré)**. Déduire de l'homographie trouvée dans l'exercice précédent (en utilisant le résultat de l'exercice II.43) les automorphismes de $\mathcal{H}$.

Existe-t-il un isomorphisme analytique de $\mathcal{H}$ sur $\mathbf{C}$ (voir l'exercice II.37) ?

Exercice IV.30. Montrer que la fonction $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$ a une singularité essentielle en 0. Soit $A \in \mathbf{C}$. Quelles sont les solutions de l'équation $f(z) = A$? Montrer qu'il existe une suite z_n tendant vers 0 telle que $f(z_n) = A$.

Exercice IV.31. Montrer que les fonctions définies dans l'exercice IV.8 ont une singularité essentielle à l'infini.

Exercice IV.32. Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé de centre z_0 avec une singularité essentielle en z_0. Soit g une fonction entière non constante. Montrer que z_0 est une singularité essentielle de $g \circ f$ (on pourra utiliser l'exercice II.41).

Exercice IV.33. Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé de centre z_0 avec un pôle en z_0. Soit g une fonction entière. Montrer que, si g n'est pas un polynôme, $g \circ f$ a une singularité essentielle en z_0.

Exercice IV.34. Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $A(z_0, R)$. On suppose que f a une singularité essentielle en z_0. En utilisant le théorème de l'application ouverte, montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} f\left(A\left(z_0, \frac{1}{n}\right)\right)$$

est dense dans $\mathbf{C}$. En déduire que l'ensemble des nombres complexes atteints une infinité de fois par f est dense dans $\mathbf{C}$.

Pensez-vous qu'une fonction avec une singularité essentielle puisse être injective ?

***Exercice IV.35* (Un théorème de géométrie)**. Soit f une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ du plan affine euclidien (que l'on identifiera à $\mathbf{C}$) dans lui-même. On suppose que f préserve les angles non-orientés. On se propose de démontrer (encore un théorème de Liouville) que f est une similitude.

Montrer que la différentielle $(df)_z$ est, soit une similitude directe pour tout z, soit une similitude indirecte pour tout z et donc, qu'en composant si nécessaire avec une réflexion, on peut supposer que $(df)_z$ est, pour tout z, une similitude directe. Montrer qu'alors f est une fonction entière, et qu'elle ne peut avoir de singularité essentielle à l'infini. En déduire que c'est un polynôme, et que ce polynôme est de degré 1.

CHAPITRE V

LE THÉORÈME DES RÉSIDUS

Dans ce chapitre, nous définissons les résidus, démontrons le théorème qui porte leur nom et en donnons quelques applications au dénombrement des zéros et pôles des fonctions et à des calculs d'intégrales.

V.1. Le théorème des résidus

Commençons par définir les résidus. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit z_0 un point de U. Si f est holomorphe sur $U - \{z_0\}$, elle possède un développement de Laurent en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Définition V.1.1. Le coefficient a_{-1} de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement en série de Laurent de f en z_0 s'appelle le *résidu* de f en z_0. On le note $\text{rés}(f, z_0)$.

Remarquons pour commencer :

Proposition V.1.2. *Le résidu de f en z_0 est l'unique nombre complexe a tel que la fonction*

$$f(z) - \frac{a}{z - z_0}$$

ait une primitive sur un voisinage épointé de z_0.

Démonstration. On développe f en série de Laurent en z_0, on a

$$f(z) - \frac{a}{z - z_0} = \frac{a_1 - a}{z - z_0} + \sum_{n \leq -2} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

La fonction

$$F(z) = \sum_{n \leq -2} \frac{1}{n+1} a_n (z - z_0)^{n+1} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

est une primitive de $\sum_{n \leq -2} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$. Donc f a une primitive si et seulement si $(a_{-1} - a)/(z - z_0)$ en a une, c'est-à-dire si et seulement si $a = a_{-1}$. □

Avant de donner une liste de propriétés (et de méthodes de calcul) des résidus, commençons par donner une notation unifiée décrivant les ordres des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe.

Définition V.1.3. Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle au voisinage de $z_0 \in \mathbf{C}$. On appelle *valuation* de f en z_0 et on note $v_{z_0}(f)$ le nombre entier

- 0 si f est holomorphe en z_0 et ne s'y annule pas,

- $n \in \mathbf{N}$ si f est holomorphe en z_0, $f(z_0) = 0$ et z_0 est un zéro d'ordre n de f,
- $-n$ ($n \in \mathbf{N}$) si f a un pôle d'ordre n en z_0.

Exemples V.1.4

(1) Pour $f(z) = 1/(z-1)$, on a

$$v_1(f) = -1, \quad v_0(f) = 0, \quad \text{rés}(f, 1) = 1, \quad \text{rés}(f, 2) = 0.$$

(2) Pour $f = z^3/(z-2)^2$, on a

$$v_0(f) = 3, \quad v_2(f) = -2, \quad v_1(f) = 0, \quad \text{rés}(f, 0) = 0, \quad \text{rés}(f, 2) = 12$$

(cette dernière valeur s'obtient en appliquant la proposition suivante).

Proposition V.1.5. *Soient f et g deux fonctions méromorphes sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ et soit z_0 un point de U.*

(1) *Si f a un pôle simple en z_0,*

$$\text{rés}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Plus généralement, si z_0 est un pôle d'ordre k de f, alors

$$\text{rés}(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \text{ où } h(z) = (z - z_0)^k f(z).$$

(2) *Si f est holomorphe en z_0 et si g a un zéro simple en z_0, alors*

$$\text{rés}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(3) *La fonction f'/f est méromorphe sur U. Ses pôles sont les zéros et les pôles de f et*

$$\text{rés}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = v_{z_0}(f).$$

La démonstration consiste en une simple vérification, elle est laissée en exercice. □

Exemple V.1.6. Le point $z_0 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ est un pôle simple de $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$. En appliquant la deuxième propriété ci-dessus, on trouve

$$\text{rés}(f, z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Une application immédiate du théorème de Laurent (théorème IV.1.1) est l'écriture du coefficient a_{-1} de la série de Laurent comme une intégrale

$$2i\pi \, \text{rés}(f, z_0) = \int_{C(z_0, r)} f(z) dz.$$

Le théorème des résidus est une généralisation de cette égalité : il exprime l'intégrale de fonctions le long de certains lacets à l'aide de ses résidus en ses différents points singuliers.

Théorème V.1.7. *Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$, F un ensemble fini de points de U, f une fonction holomorphe sur $U - F$ et γ un lacet à valeurs dans $U - F$. Alors on a*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in F} \text{rés}(f, z_0) \, \text{Ind}_\gamma(z_0)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in F$. La fonction f admet un développement de Laurent sur un disque épointé centré en z_0 et contenu dans U :
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_{z_0,n}(z - z_0)^n.$$
On considère la « partie singulière » de f en z_0 :
$$h_{z_0}(z) = \sum_{n<0} b_{z_0,n}(z - z_0)^n.$$
On sait (voir le début du § IV.2) que cette série est normalement convergente sur les compacts de $\mathbf{C} - \{z_0\}$.

On définit maintenant
$$g(z) = f(z) - \sum_{z_0 \in F} h_{z_0}(z).$$
C'est une fonction holomorphe sur $U - F$, qui, par construction, n'a pas de singularité en les points de F. Elle définit donc une fonction *holomorphe* sur U.

Mais U est un ouvert simplement connexe, la fonction g y a donc une primitive holomorphe et, en particulier pour tout lacet γ, on a
$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$
soit
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{z_0 \in F} \int_\gamma h_{z_0}(z)dz.$$
Évaluons donc l'intégrale de h_{z_0}. La série définissant cette fonction est, on l'a dit, normalement convergente sur les compacts de $\mathbf{C} - \{z_0\}$ et donc
$$\begin{aligned}\int_\gamma h_{z_0}(z)dz &= \int_\gamma \sum_{n<0} b_{z_0,n}(z - z_0)^n dz\\ &= \sum_{n<0} b_{z_0,n} \int_\gamma (z - z_0)^n dz.\end{aligned}$$
Mais, si $n \neq -1$, $(z-z_0)^n$ a une primitive (à savoir $(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$) sur $\mathbf{C} - \{z_0\}$. Donc, si $n \neq -1$,
$$\int_\gamma (z - z_0)^n dz = 0.$$
Il ne nous reste plus que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi \operatorname{Ind}_\gamma(z_0) \text{ par définition.}$$
□

Corollaire V.1.8. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe U de $\mathbf{C}$, soient z un point de U et γ un lacet dont l'image ne contient pas z. Alors*
$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Démonstration. C'est le théorème des résidus (théorème V.1.7) appliqué à la fonction
$$w \longmapsto \frac{f(w)}{w - z}$$
qui est holomorphe sur $U - \{z\}$ et dont le résidu en z est $f(z)$ (voir la proposition V.1.5). □

C'est une généralisation de la formule de Cauchy, qui s'obtient pour les cercles centrés en z_0, cas où l'indice est 1.

Ce qui se passe à l'infini. Soit g une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon R, où R est supposé assez grand pour que tous les pôles de g dans $\mathbf{C}$ soient à l'intérieur du disque bordé par γ. Soit h la fonction méromorphe définie par $h(u) = g\left(\frac{1}{u}\right)$. Alors on a l'égalité

$$\int_\gamma g(z)dz = -2i\pi \operatorname{rés}\left(\frac{h(u)}{u^2}, 0\right).$$

Paramétrons en effet le cercle par $\gamma(t) = Re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Par définition de l'intégrale, on a

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_0^{2\pi} g \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$-\int_0^{2\pi} g \circ \gamma(t)\frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t)^2}\gamma(t)^2 dt.$$

Si l'on pose $\delta(t) = 1/\gamma(t) = e^{-it}/R$ (c'est le cercle parcouru dans l'autre sens, vu du côté de l'infini), la dernière intégrale est égale à

$$-\int_0^{2\pi} h \circ \delta(t)\frac{1}{\delta(t)^2}\delta'(t)dt = -\int_\delta \frac{h(z)}{z^2}dz.$$

On conclut en appliquant le théorème des résidus. □

Remarque V.1.9. On peut *définir* le résidu de g en ∞ comme le résidu en 0 de $-h(u)/u^2$:

$$\operatorname{rés}(g, \infty) = \operatorname{rés}\left(-\frac{h(u)}{u^2}, 0\right).$$

Nombres de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe. La théorème des résidus (théorème V.1.7) et le calcul des résidus de f'/f dans la proposition V.1.5 donnent immédiatement :

Proposition V.1.10. *Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$ et f une fonction méromorphe sur U dont l'ensemble F des zéros et des pôles est* fini. *Soit γ un lacet dans $U - F$. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_0 \in F} v_{z_0}(f)\operatorname{Ind}_\gamma(z_0).$$

Corollaire V.1.11. *Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$ et f une fonction méromorphe sur U dont l'ensemble F des zéros et des pôles est* fini. *Soit γ un lacet dans $U - F$ dont l'indice par rapport à tous les points de F vaut 1. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_0 \in F} v_{z_0}(f).$$

Le second membre de cette égalité s'interprète comme le nombre de zéros de f comptés avec multiplicités moins le nombre de pôles de f (toujours comptés avec multiplicités).

Exemples V.1.12

(1) La fraction rationnelle $(z^n - 2)/(z + i)$ s'annule n fois dans $\mathbf{C}$, a un pôle dans $\mathbf{C}$, elle a donc un pôle d'ordre $n - 1$ en ∞ (ce qui se vérifie aisément !).
(2) De même $(z^2 - 1)/(z + 3)^3$ a un pôle triple et deux zéros simples dans $\mathbf{C}$, elle a donc un zéro simple en ∞.

Remarque V.1.13. Une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$ a autant de zéros que de pôles. En effet, on a démontré que toutes les fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbf{C}}$ sont des fractions rationnelles. On peut aussi vérifier que la valuation d'une fraction rationnelle en ∞ compense la différence des degrés du numérateur et du dénominateur.

Le théorème qui suit est un outil assez pratique pour compter les zéros d'une fonction (d'un polynôme, par exemple), dans un ouvert du plan.

***Théorème V.1.14* (Rouché)**. *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert simplement connexe U de $\mathbf{C}$. Soit K un compact contenu dans U et dont le bord Γ admet un paramétrage $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On suppose que*

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |g(\zeta)| \text{ pour tout } \zeta \in \Gamma.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans K.

Démonstration. Remarquons d'abord que l'hypothèse implique que ni f ni g ne s'annule sur Γ, et en particulier que ni l'une ni l'autre n'est identiquement nulle. Comme K est compact, chacune a donc un nombre fini de zéros dans K. Alors, la fonction $h = f/g$ est méromorphe au voisinage de K et même holomorphe au voisinage de Γ. Soit V un voisinage de Γ assez petit pour que h y soit holomorphe et pour que l'inégalité

$$|h(z) - 1| < 1 \text{ soit vraie pour tout } z \in V.$$

La fonction h envoie donc V dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1, sur lequel existe une détermination du logarithme, que nous choisissons et notons ℓ. Maintenant $\ell \circ h$ est définie, analytique, et une primitive de h'/h sur V. Si cette fonction a une primitive sur $V \supset \Gamma$, on a

$$\int_\Gamma \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}\, d\zeta = 0.$$

Comme f et g n'ont pas de zéro sur Γ, on a, pour $\zeta \in \Gamma$,

$$\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}$$

et donc

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta.$$

□

Ce théorème a de nombreuses applications. La plus naturelle est une nouvelle démonstration (encore !) du « théorème fondamental de l'algèbre » : on a un polynôme $f(z) = z^n + \cdots + a_0$ de degré $n \geq 1$, on compare le nombre de ses zéros à celui de $g(z) = z^n$ (qui est n, puisqu'on tient compte des multiplicités). Il suffit d'appliquer le théorème de Rouché sur un disque assez grand(1).

V.2. Applications du théorème des résidus au calcul d'intégrales

Le théorème des résidus a de nombreuses applications au calcul d'intégrales (même réelles). Le plus simple est de donner quelques familles d'exemples.

---

(1)Une méthode peu différente on en conviendra de celle proposée dans les exercices III.24 et III.25.

Fonctions trigonométriques. Il s'agit de calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$$

où R est une fraction rationnelle

$$R(X,Y) = \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}, \quad P, Q \in \mathbf{R}[X,Y]$$

sans pôle sur le cercle unité (c'est dire que Q ne s'annule pas sur $x^2 + y^2 = 1$, l'intégrale est une « intégrale définie »).

On pose $z = e^{it}$, de sorte que $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, etc. L'intégrale s'écrit

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_{C(0,1)} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

et le théorème des résidus affirme qu'elle vaut $2i\pi$ fois la somme des résidus des pôles de la fraction rationnelle

$$r(z) = \frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

contenus à l'intérieur du disque unité.

Exemple V.2.1. Calculons par cette méthode

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} \text{ pour } a > 1.$$

Comme le dénominateur $a + \sin t$ ne s'annule pas, la méthode s'applique. Il s'agit de trouver les pôles et les résidus de la fraction rationnelle

$$r(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{a + \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Les deux pôles sont $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$ et $-1/z_0$. Seul z_0 est à l'intérieur du disque unité. Le résidu de r en z_0 est

$$\frac{2z_0}{z_0^2+1} = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}$$

et on trouve finalement

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Fractions rationnelles. Dans les exemples précédents, on appliquait directement le théorème des résidus. Dans ceux étudiés maintenant, il va y avoir un passage à la limite. Il s'agit d'intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt$$

où $R \in \mathbf{R}(X)$ est une fraction rationnelle sans pôle réel. Il faut faire une hypothèse pour que cette intégrale existe. On peut demander que le degré du dénominateur soit au moins 2 de plus que celui du numérateur. Il est équivalent de dire que

$$\lim_{|t|\to+\infty} tR(t) = 0.$$

Pour calculer l'intégrale, on va intégrer la fonction $R(z)$ sur le bord d'un demi-disque de rayon r, centré à l'origine et contenu dans le demi-plan supérieur. Le rayon est supposé assez grand pour que tous les pôles de R soient strictement à l'intérieur du disque de rayon r.

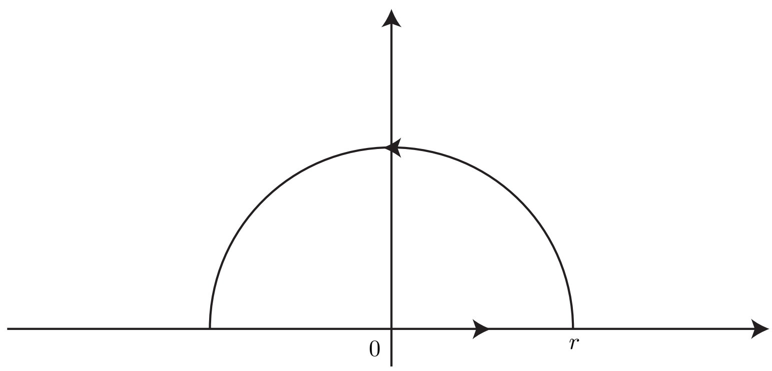


FIGURE 1.

Le lacet « demi-cercle » est constitué du segment $[-r, r]$ de l'axe réel et du demi-cercle proprement dit. L'intégrale de R sur le segment tend vers I quand r tend vers l'infini, pour pouvoir calculer I en sommant les résidus de R en ses pôles à partie imaginaire positive, il suffirait donc que l'intégrale de R sur le demi-cercle tende vers 0 quand r tend vers l'infini. C'est ce qu'affirme le lemme facile (et un peu plus général) suivant.

***Lemme V.2.2* (Jordan)**. *Soit f une fonction continue définie dans un secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $r \geq r_0$. Si*

$$\lim_{|z| \to +\infty} zf(z) = 0$$

alors

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(re^{i\theta}) ir d\theta = 0.$$

Démonstration. La fonction f est continue, son module est donc borné sur l'arc de cercle de rayon r, soit $M(r)$ sa borne supérieure. On a

$$\left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(re^{i\theta}) ir d\theta \right| \leq M(r) r(\theta_2 - \theta_1)$$

et l'hypothèse implique que $\lim_{r \to +\infty} rM(r) = 0$. □

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2i\pi \sum_j \text{rés}\,(R, z_j)$$

la somme étant étendue à tous les pôles z_j de R contenus dans le demi-plan supérieur.

Remarque V.2.3. En considérant le demi-disque contenu dans le demi-plan inférieur, on obtiendrait une formule analogue avec les pôles du demi-plan inférieur

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = -2i\pi \sum_j \text{rés} \left(R, z'_j \right).$$

Le signe vient de l'indice du lacet par rapport aux pôles : on fait le tour dans l'autre sens. Il est compensé *in fine* par le fait que $z'_j = \overline{z}_j$ (R est réelle).

Exemple V.2.4. Calculons l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^6}.$$

On remarque d'abord que l'intégrale est convergente, puis que la fonction à intégrer est paire et donc que l'intégrale considérée est la moitié de l'intégrale sur tout l'axe réel, enfin que les trois zéros de $1+z^6$ qui sont dans le demi-plan supérieur sont

$$\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right), \quad \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \quad \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right).$$

En appliquant la recette habituelle pour le calcul du résidu en z_0, on trouve ici $1/6z_0^5$, c'est-à-dire $-z_0/6$ (parce que $z_0^6=-1$). Finalement

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^6} \\ &= -\frac{i\pi}{6}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)+\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)+\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\left(2\sin\frac{\pi}{6}+1\right) \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Mélanges de fractions rationnelles et de fonctions trigonométriques. On considère des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$$

où f est holomorphe au voisinage du demi-plan fermé $\operatorname{Im} z \geq 0$ (sauf peut-être en un nombre fini de points). Le lemme de Jordan ne s'applique pas, mais on a :

Lemme V.2.5. *Soit f une fonction définie dans un secteur du demi-plan fermé. On suppose que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z)=0$. Alors l'intégrale*

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz$$

(sur l'arc de cercle $\gamma(\theta)=re^{i\theta}$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$ de rayon r) tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$.

Démonstration. Si $z=re^{i\theta}$ et $M(r)=\sup_\theta\left|f(re^{i\theta})\right|$, on a

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz\right| \leq M(r)\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta.$$

Notre hypothèse est que $M(r)$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. Majorons donc la dernière intégrale par une constante ne dépendant pas de r. D'abord, on a

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta \leq \int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta.$$

En utilisant le fait classique que

$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2}{\pi}\leq\frac{\sin\theta}{\theta}\leq 1,$$

on obtient

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\,d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2r\theta/\pi} r\,d\theta \leq \int_0^{+\infty} e^{-2r\theta/\pi} r\,d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-2x/\pi}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

une majoration uniforme qui donne le résultat. $\square$

Proposition V.2.6. *Si f est une fonction holomorphe au voisinage du demi-plan fermé* $\operatorname{Im} z \geq 0$, *sauf peut-être en un nombre fini de singularités dont aucune n'est sur l'axe réel et si f satisfait à* $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, *alors*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{ix}\,dx = 2i\pi \sum_{\operatorname{Im} z_0>0} \operatorname{rés}(f(z)e^{iz}, z_0).$$

Démonstration. Dans le cas où l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente (l'intégrale étudiée est absolument convergente), on aura bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx = 2i\pi \sum_{\operatorname{Im} z_0>0} \operatorname{rés}(f(z)e^{iz}, z_0).$$

Si elle n'est pas absolument convergente, il y a quand même une limite, qui est donnée par la relation ci-dessus. Passons donc à la démonstration. L'intérêt de s'être placés dans le demi-plan supérieur[(2)], c'est qu'on y a $|e^{iz}| \leq 1$. Le lemme V.2.5 permet d'évaluer l'intégrale réelle en intégrant la fonction sur le contour de la figure 1. ☐

Voici un exemple d'un tel calcul. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx = 2i\pi \operatorname{rés}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}, e^{2i\pi/3}\right).$$

Ce résidu vaut

$$\operatorname{rés}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}, e^{2i\pi/3}\right) = \left(\frac{e^{iz}}{z-e^{-2i\pi/3}}\right)_{|_{z=e^{2i\pi/3}}} = \frac{e^{-(\sqrt{3}+i)/2}}{2i\sin\frac{2\pi}{3}}.$$

Donc on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{1}{2} - i\sin\frac{1}{2}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{1}{2} \quad\text{et}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\frac{1}{2}.$$

Voir aussi, par exemple, l'exercice V.13. On trouvera d'autres exemples de calculs et de méthodes de calcul dans les exercices.

Exercices

Exercice V.1. Calculer les résidus en $\pm i$ de $f(z) = e^{iz}/(z^2+1)$.

Exercice V.2. Calculer le résidu en i de $f(z) = e^{iz}/(z(z^2+1)^2)$.

Exercice V.3. Soient n un entier ≥ 1 et g une fonction entière qui ne s'annule en aucune racine n-ème de -1. Soit z_0 un pôle de $f(z) = g(z)/(1+z^n)$. Calculer le résidu de f en z_0.

---

(2) Dans les applications du lemme de Jordan, il n'y avait pas de différence sérieuse entre les demi-plans supérieur et inférieur. Ici, oui. Le demi-plan inférieur peut être utilisé pour calculer des intégrales faisant intervenir une exponentielle e^{-ix}.

Exercice V.4. Soit $p \in \mathbf{R}$, $p > 1$, et soit $z_0 = -p + \sqrt{p^2 - 1}$. On demande le résidu en z_0 de

$$f(z) = \frac{4z}{(z^2 + 2pz + 1)^2}.$$

Exercice V.5. Combien de fonctions holomorphes y a-t-il sur le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1 qui vérifient $f(z)^2 = z$?

Pour chacune d'elles, calculer le résidu en 1 de $\dfrac{f(z)}{z-1}$.

***Exercice V.6* (Encore d'Alembert-Gauss)**. Soit $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ (avec $n \geq 1$) et soit $r > 0$ assez grand pour que

$$|z| \geq r \Rightarrow |P(z)| \geq 1.$$

Calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$

et conclure.

***Exercice V.7* (Applications du théorème de Rouché)**. Combien le polynôme $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ a-t-il de racines dans le disque unité $|z| \leq 1$?

***Exercice V.8* (Applications du théorème de Rouché)**. Montrer que, pour tout réel $\lambda > 1$, la fonction $f(z) = ze^{\lambda - z} - 1$ a exactement un zéro dans le disque unité.

Exercice V.9. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2u\cos\theta + u^2} \text{ pour } |u| \neq 1.$$

Exercice V.10. Calculer les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(p + \cos\theta)^n}$$

pour $n = 1, 2$ et où p est réel, avec $|p| > 1$

Exercice V.11. Calculer l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{1 + t^4}$$

et plus généralement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2k}\, dt}{1 + t^{2n}}$$

pour $0 \leq k < n$. Voir aussi l'exercice V.17.

***Exercice V.12* (Examen, janvier 2007)**. Soit a un nombre réel, $a > 0$.

(1) Soit ζ un nombre complexe tel que $\zeta^4 = -1$. Calculer le résidu en ζa de la fonction $1/(z^4 + a^4)^2$.

(2) Calculer l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + a^4)^2}.$$

Exercice V.13. Calculer l'intégrale réelle

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2 + 1} dt.$$

Exercice V.14. Soit g une fonction méromorphe au voisinage de 0, ayant un pôle simple en 0 et soit $C^+(0, \varepsilon)$ le demi-cercle $(|z| = \varepsilon) \cap (\operatorname{Im} z \geq 0)$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C^+(0,\varepsilon)} g(z)\, dz = i\pi \operatorname{rés}(g, 0).$$

En utilisant le contour indiqué sur la figure 2, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

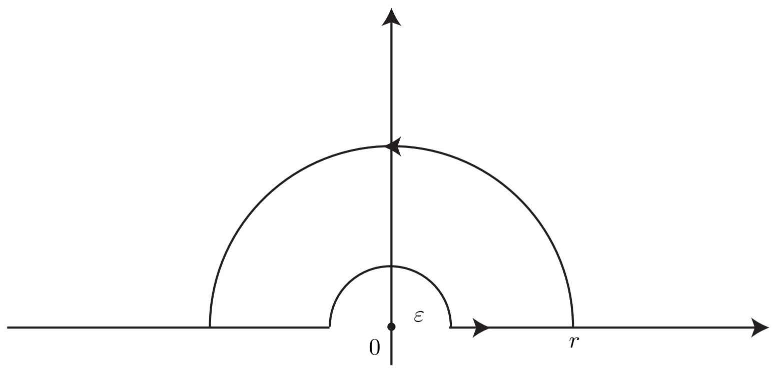


Figure 2.

Exercice V.15. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale réelle

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx.$$

(1) Montrer qu'il existe des déterminations du logarithme sur l'ouvert

$$U = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z \notin \mathbf{R}^+ \right\}.$$

Que peut-on dire de la différence de deux telles déterminations ? Montrer qu'il en existe une unique, que l'on notera log dans cet exercice, vérifiant $\log(-1) = i\pi$.

(2) On considère le contour Γ représenté sur la figure 3. Les nombres réels r et R vérifient $0 < r < 1 < R$. Quelle est la limite de l'intégrale

$$\int_\Gamma \frac{(\log z)^2}{(1+z)^3} dz$$

quand R tend vers $+\infty$ et r vers 0 ?

(3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx \quad \left(\text{et celle de } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^3} \right).$$

Exercice V.16. Avec les mêmes notations (et la même méthode) que dans l'exercice précédent, évaluer

$$\int_\Gamma \frac{\log z}{z^3 + z^2 + z + 1} dz$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

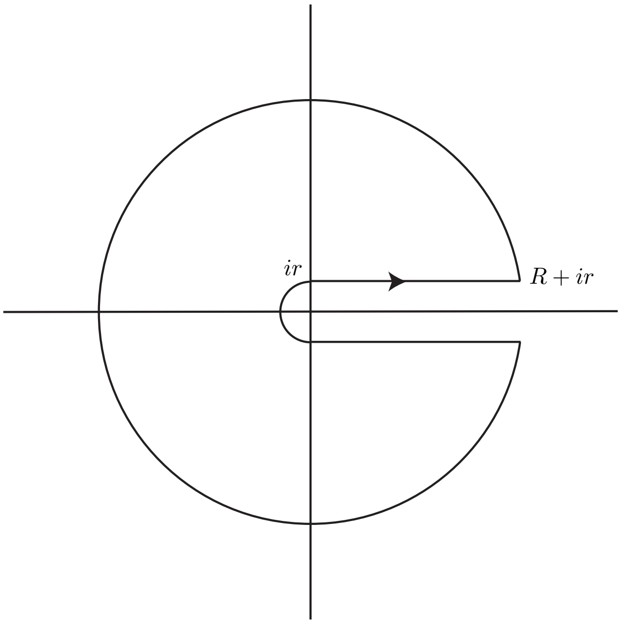


FIGURE 3.

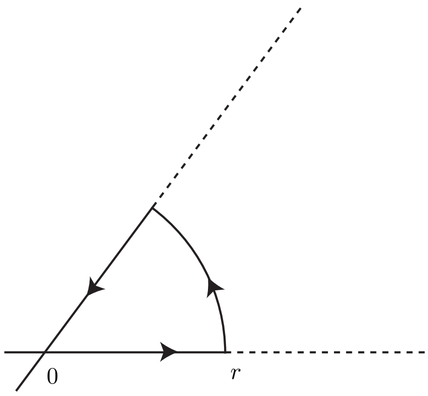


FIGURE 4.

Exercice V.17. Pour $n > m > 0$, montrer, à l'aide du contour représenté sur la figure 4, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{m}{n}\pi\right)^{-1}$$

(encore une formule connue d'Euler).

Exercice V.18. Calculer

$$\int_E \frac{dz}{1+z^4}$$

pour E l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$.

Exercice V.19. Pour tout $R > 1$, on considère le triangle

$$T_R = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Ré}(z) \leq R, \mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Ré}(z), \mathrm{Im}(z) \geq -\mathrm{Ré}(z)\}$$

et on pose
$$I_R = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_R}\frac{e^{-z}}{(1-z^4)^2}dz.$$
Calculer $I = \lim_{R\to+\infty} I_R$. Déterminer une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ telle que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = I.$$

***Exercice V.20* (Examen, janvier 2006)**. Dans cet exercice, a et b sont deux nombres réels vérifiant $a < b$.

(1) Montrer qu'il existe des déterminations de « $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ » sur le complémentaire U du segment $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$. Combien en existe-t-il ? Montrer qu'il en existe une unique qui coïncide avec $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ pour $x \in \mathbf{R}\cap U$.
(2) Montrer qu'il existe une unique détermination, notée f de « $\dfrac{z}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$ » sur le complémentaire $U\cup\{\infty\}$ du segment $[a,b]$ dans la sphère de Riemann $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ qui prend la valeur 1 en ∞. On pose $u = 1/z$, de sorte que $h(u) = f(1/u)$ est holomorphe au voisinage de $u = 0$. Donner les deux premiers termes du développement en série entière de h en 0.
(3) Soit R un nombre réel, $R > \sup(|a|, |b|)$ et soit C_R le cercle paramétré par $Re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$). Calculer
$$\int_{C_R}\frac{z\,dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$$
(en utilisant la détermination définie dans les questions précédentes).

***Exercice V.21* (Examen, janvier 2006)**. On pose $a = (1+i)\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $g(z) = \dfrac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$.

(1) Montrer que $g(z) - g(z+a) = e^{-z^2}$.
(2) Trouver l'ensemble des pôles de g et calculer son résidu en $a/2$.
(3) Pour $r > 0$ soit C_r le parallélogramme de sommets $-r, r, r+a, -r+a$ parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale
$$\int_{C_r} g(z)\,dz.$$
(4) Montrer que, lorsque $r \to \infty$, l'intégrale de g sur les côtés « non horizontaux » du parallélogramme tend vers 0.
(5) En déduire les valeurs des intégrales
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}\,dt.$$

Réponses à certains de ces exercices. Comme il est assez facile d'écrire des bêtises dans les calculs d'intégrales, j'inclus les résultats de certains des calculs proposés ici[(3)].

- Exercice V.1, $e^{-1}/2i$ en i, $-e/2i$ en $-i$. Exercice V.2, $-3/4e$. Exercice V.3, $-z_0g(z_0)/n$. Exercice V.4, $p/(\sqrt{p^2-1})$. Exercice V.5, $+1$ pour l'une et -1 pour l'autre.
- Exercice V.9, $2\pi/(1-u^2)$ si $|u|<1$, $2\pi/(u^2-1)$ si $|u|>1$. Exercice V.10, $\pi/\sqrt{p^2-1}$ si $n=1$, $2\pi p/(\sqrt{p^2-1})^3$ si $n=2$. Exercice V.11, $\pi/(n\sin((2k+1)\pi/2n))$. Exercice V.12, $-3\zeta/16a^7$, $3\pi\sqrt{2}/8a^7$. Exercice V.13, $\pi/2e$.
- Exercice V.15,
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx=-\frac{1}{2}\quad(\text{et }\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^3}=\frac{1}{2}).$$
- Exercice V.16, $\pi/4$. Exercice V.18, $\dfrac{i\pi}{2}e^{i\pi/4}$.

(3) Je ne crois pas à l'unicité des résultats de ce type de calcul. Mais je crois à leur convergence. Les résultats proposés ici ont été obtenus par cette méthode. Au cas où la limite n'ait pas été vraiment atteinte, me communiquer vos résultats !

CHAPITRE VI

EXEMPLES DE CONSTRUCTIONS DE FONCTIONS

Dans ce chapitre final, nous étudions des fonctions périodiques et notamment une célèbre fonction elliptique, la fonction $\wp$ de Weierstrass. Nous nous intéressons ensuite aux produits infinis (ou eulériens) et à la fonction zêta de Riemann. Nous concluons par une démonstration du théorème des nombres premiers.

VI.1. Exemples de fonctions périodiques

On a déjà rencontré des fonctions holomorphes périodiques, l'exponentielle par exemple : il y a un sous-groupe G de $\mathbf{C}$ (le sous-groupe $2i\pi\mathbf{Z}$ dans le cas de l'exponentielle) et la fonction est invariante par l'action de ce groupe par translation :

$$f(z+g) = f(z)$$

pour tout g dans G. Les fonctions sin et cos sont aussi des fonctions entières périodiques. On va considérer ici des fonctions périodiques méromorphes. Remarquons d'abord que le théorème de Laurent affirme que les fonctions holomorphes périodiques sont sommes de leur *série de Fourier*, au sens précis de la proposition VI.1.1 ci-dessous. Fixons deux nombres réels a et b avec $a < b$ et appelons $B(a,b)$ la bande

$$B(a,b) = \{z \in \mathbf{C} \mid a < \operatorname{Im}(z) < b\}.$$

On dit qu'une fonction holomorphe sur $B(a,b)$ est périodique de période T (ou T-périodique les jours de paresse) si elle vérifie

$$f(z+T) = f(z) \text{ pour tout } z \in B(a,b).$$

Proposition VI.1.1. *Toute fonction holomorphe sur $B(a,b)$ et périodique de période T s'écrit de façon unique*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp\left(\frac{2i\pi n z}{T}\right)$$

écriture dans laquelle les a_i sont des nombres complexes tels que les séries entières

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ et } \sum_{n\geq 0} a_{-n} z^n$$

ont des rayons de convergence

$$\rho \geq \exp\left(-\frac{2\pi}{T}a\right), \quad \sigma \geq \exp\left(\frac{2\pi}{T}b\right) \text{ respectivement.}$$

Réciproquement toute suite a_n satisfaisant à ces conditions définit une série normalement convergente sur les compacts de $B(a,b)$ dont la somme est une fonction holomorphe périodique de période T.

Démonstration. C'est le théorème de Laurent (théorème IV.1.1), via l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C}^\star \\ z &\longmapsto \exp\left(\frac{2i\pi}{T}z\right) \end{aligned}$$

qui se restreint en une bijection

$$B(a,b) \longrightarrow A\left(\exp\left(-\frac{2\pi}{T}b\right), \exp\left(-\frac{2\pi}{T}a\right)\right)$$

et induit un isomorphisme de l'algèbre des fonctions holomorphes T-périodiques sur la bande dans l'algèbre des fonctions holomorphes sur l'anneau. □

On peut bien entendu démontrer ce résultat directement via la théorie des séries de Fourier.

Exemple VI.1.2. Les fonctions cos et sin sont holomorphes sur $\mathbf{C}$ ($a = -\infty$, $b = \infty$), et périodiques de période 2π, leurs développements de Fourier sont bien sûr

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ et } \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

La fonction $1/\cos z$ est périodique de période 2π, elle est holomorphe sur chacune des bandes $B(0, +\infty)$ et $B(-\infty, 0)$ (les zéros de la fonction cos sont réels). On a, par exemple,

$$\frac{1}{\cos z} = 2e^{iz}\frac{1}{1+e^{2iz}} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{(2n+1)iz} \text{ pour } \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Proposition VI.1.3. *La série de fonctions méromorphes*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}$ *et sa somme est*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2.$$

Démonstration. On montre d'abord que la série converge uniformément dans toutes les bandes $x_0 \leq \text{Ré}(z) \leq x_1$. Fixons donc une telle bande. Elle ne contient qu'un nombre fini d'entiers. Pour ceux qui n'y sont pas :

- dans la série partielle $\sum_{n<x_0} \frac{1}{(z-n)^2}$, chaque terme est majoré par $\frac{1}{(x_0-n)^2}$, d'où la convergence normale dans la bande,
- de même, dans la série partielle $\sum_{n>x_1} \frac{1}{(z-n)^2}$, chaque terme est majoré par $\frac{1}{(x_1-n)^2}$.

Pour calculer la somme de la série et finir de démontrer la proposition, faisons une liste de propriétés de la somme f de la série :

(1) Elle est périodique de période 1 (c'est clair).
(2) Elle a un pôle en chaque entier n et s'écrit plus précisément

$$f(z) = \frac{1}{(z-n)^2} + h(z)$$

où h est holomorphe au voisinage de n.
(3) Elle tend vers 0 uniformément en x quand $|y|$ tend vers l'infini, plus précisément, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, M, \quad |y| \geq M \Rightarrow |f(z)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons ensuite que la fonction $g(z) = (\pi/\sin \pi z)^2$ possède exactement les mêmes propriétés :

(1) La première est claire.

(2) À cause de la périodicité, il suffit d'étudier g au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 &= \left(\frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + \cdots}\right)^2 \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \cdots\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\cdots),\end{aligned}$$

d'où la deuxième propriété.

(3) La troisième résulte de la relation

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y.$$

On conclut en utilisant le théorème de Liouville : la fonction $f - g$ est entière (en appliquant la deuxième propriété) elle est bornée puisque périodique de période 1 (première propriété) et bornée sur les bandes verticales (troisième propriété). Elle est donc constante, mais cette constante est nulle puisqu'elle tend vers 0 quand y tend vers l'infini (encore la troisième propriété). □

***Corollaire VI.1.4* (Euler).** *La somme de la série numérique* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est* $\frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. On écrit

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

et on fait tendre z vers 0. Le deuxième membre tend vers $2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. Le calcul du développement de g en série de Laurent en 0 ci-dessus montre que le premier membre, lui, tend vers $\frac{\pi^2}{3}$. □

***Proposition VI.1.5*.** *La série de fonctions méromorphes*

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}$ *et sa somme est*

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\tan \pi z}.$$

Démonstration. On montre exactement comme ci-dessus l'assertion sur la convergence. Appelons f la somme, c'est donc une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui a un pôle simple en chaque entier. On calcule sa dérivée comme somme de la série des dérivées :

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Mais nous savons (proposition VI.1.3) que cette somme vaut $-(\pi/\sin \pi z)^2$, en d'autres termes, on a

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\tan \pi z}\right).$$

Donc $f(z) - \pi/\tan \pi z$ est constante. Il est clair par définition de f que celle-ci est impaire, on en déduit que la constante est nulle. □

Remarque VI.1.6. En regroupant les termes deux par deux, on en déduit aussi l'identité

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z}$$

(que l'on utilisera pour calculer les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers pairs, voir l'exercice VI.2).

VI.2. Exemple de fonction bi-périodiques : la fonction $\wp$ de Weierstrass

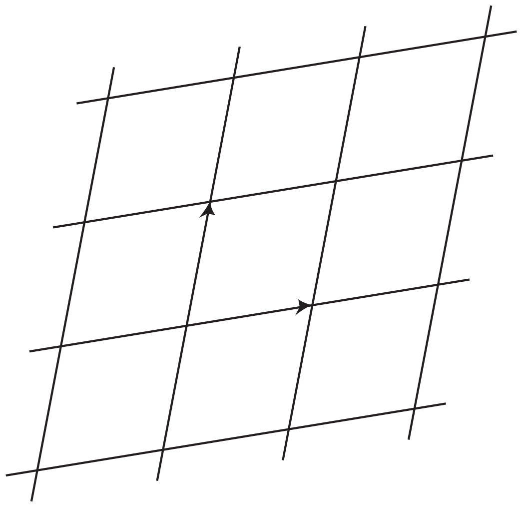


FIGURE 1.

Dans l'exemple de l'exponentielle et dans les exemples considérés ci-dessus, le groupe de périodes G est un groupe de translations engendré par un élément, il est isomorphe à $\mathbf{Z}$. On peut se demander s'il existe des fonctions holomorphes qui ont un groupe de périodes plus gros, engendré par deux translations indépendantes. On se donne donc deux nombres complexes u et v, indépendants sur $\mathbf{R}$ (c'est dire que la partie imaginaire du rapport u/v n'est pas nulle) et on considère le *réseau*[(1)]

$$\Lambda = \{nu + mv \mid n, m \in \mathbf{Z}\}.$$

La proposition suivante est une application du théorème de Liouville.

Proposition VI.2.1. *Les seules fonctions holomorphes sur* $\mathbf{C}$ *telles que*

$$f(z+\lambda) = f(z) \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \forall\, \lambda \in \Lambda$$

sont les constantes.

Démonstration. Sur le parallélogramme engendré par u et v, c'est-à-dire sur le compact

$$\{xu + yv \mid x \in [0,1], y \in [0,1]\}$$

la fonction f est bornée. De la périodicité, on déduit qu'elle est bornée sur $\mathbf{C}$: tout point z de $\mathbf{C}$ se ramène à un point du parallélogramme en lui appliquant une translation du réseau. Donc f est entière et bornée, donc f est constante. □

(1) En anglais *lattice*, mot responsable de la notation Λ, en allemand *Gitter*, d'où le Γ que l'on trouve aussi.

Il n'y a donc pas de fonctions holomorphes « bi-périodiques » vraiment intéressantes. Par contre, il y a des fonctions méromorphes, comme celle que nous allons définir maintenant.

Proposition VI.2.2. *La série*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C} - \Lambda$ *et définit une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

Lemme VI.2.3. *La série* $\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}} \dfrac{1}{|\lambda|^3}$ *est convergente.*

Démonstration du lemme. Pour tout entier n, on considère

$$P_n = \{xu + yv \mid \sup\{|x|, |y|\} = n\}.$$

Sur le parallélogramme P_n, il y a $8n (= 4 \times 2n)$ points de Λ. Si d est la plus petite distance des points de P_1 à 0, on a pour $\lambda \in P_n$, $|\lambda| \geq dn$. Ainsi

$$\sum_{\lambda\in P_n} \frac{1}{|\lambda|^3} \leq \frac{8n}{d^3n^3} = \frac{8}{d^3n^2}$$

d'où l'on déduit la convergence de la série. □

Démonstration de la proposition. On montre que la série converge uniformément sur tous les disques $|z| \leq R$. Le réseau est discret, son intersection avec tous les disques est finie, en particulier, on a $|\lambda| \geq 2R$ pour tous les λ sauf un nombre fini.

Pour tous ces λ et pour tout z dans le disque de rayon R,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right| &= \left|\frac{\lambda^2 - (z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| \\ &= \left|\frac{2\lambda z - z^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| \\ &= \frac{\left|z\left(2 - \dfrac{z}{\lambda}\right)\right|}{|\lambda|^3\left|1 - \dfrac{z}{\lambda}\right|^2} \\ &\leq 10\frac{R}{|\lambda|^3}\end{aligned}$$

qui converge grâce au lemme.

On a utilisé les inégalités

$$\left|2 - \frac{z}{\lambda}\right| \leq \frac{5}{2} \text{ et } \left|1 - \frac{z}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{2}$$

qui viennent des positions relatives de z et λ : comme $|z| \leq |\lambda|/2$,

– l'inégalité triangulaire donne

$$\left|\lambda - \frac{z}{2}\right| \leq \left|\frac{z}{2}\right| + |\lambda| \leq \frac{5}{4}|\lambda|$$

d'où la première inégalité

– et de même
$$|\lambda - z| \geq |\lambda| - |z| \geq \frac{|\lambda|}{2}$$
pour la deuxième.

On a maintenant une série de fonctions méromorphes qui converge uniformément sur les compacts. Sa somme est méromorphe sur $\mathbf{C}$ (en application du théorème de Morera, voir la démonstration du corollaire III.3.10). De plus, la série des dérivées converge uniformément sur les compacts vers la dérivée de la somme, ce qu'on va utiliser tout de suite. □

On note $\wp$ (et on appelle « la fonction $\wp$ de Weierstrass ») la somme de cette série. Elle dépend du réseau choisi et devrait être (est souvent) notée $\wp_\Lambda$.

La fonction $\wp$ a un pôle (double) en chaque point du réseau Λ : on fixe un point λ et on écrit
$$\wp(z) = \frac{1}{(z-\lambda)^2} + g(z)$$
où g est holomorphe au voisinage de λ.

Elle est paire :
$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \left(\frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{z^2} \right)$$
expression dans laquelle il suffit de changer λ en $-\lambda$ pour voir qu'elle vaut aussi $\wp(z)$.

Sa dérivée est la somme de la série des dérivées, comme on l'a déjà mentionné, donc
$$\wp'(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$
En particulier, il est clair que
$$\wp'(z+\lambda) = \wp'(z) \quad \forall\, z \in \mathbf{C}, \forall\, \lambda \in \Lambda.$$
Donc $\wp'$ est bi-périodique, de plus elle est impaire.

Proposition VI.2.4. *La fonction $\wp$ est bi-périodique.*

Démonstration. On montre que
$$\wp(z+u) = \wp(z) \text{ et } \wp(z+v) = \wp(z).$$
Comme $\wp'$ est bi-périodique, on a
$$\frac{d}{dz}\left(\wp(z+u) - \wp(z)\right) = 0$$
donc $\wp(z+u) - \wp(z)$ est constante. On calcule la constante en évaluant en $z = -u/2$ (qui n'est pas un pôle), on trouve
$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) - \wp\left(-\frac{u}{2}\right)$$
qui est nul puisque $\wp$ est paire. On procède de même avec v. □

Les figures 2 et 3 ont été dessinées par Olivier Elchinger (avec l'aide de *mathematica*). Elles représentent les paysages analytiques des fonctions $\wp$ et $\wp'$ associées au réseau engendré par 1 et $2i$). On résume les propriétés de $\wp$ dans une proposition :

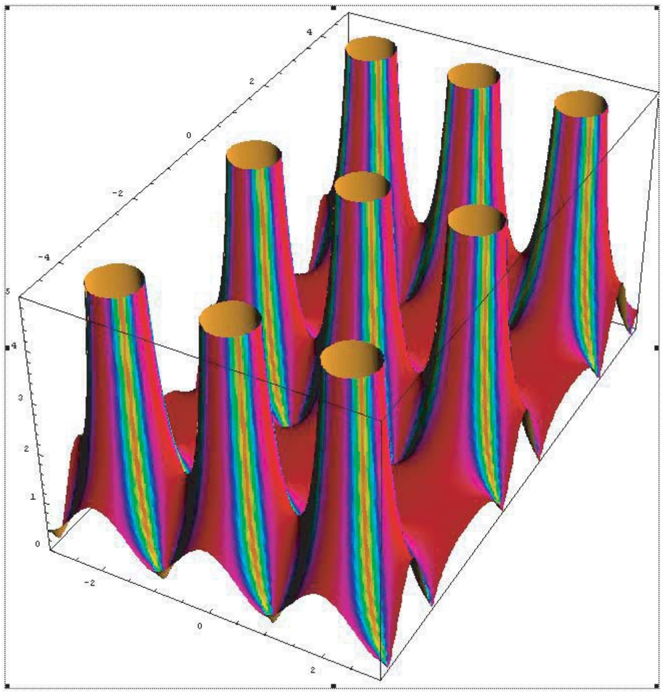


FIGURE 2. Paysage analytique de la fonction $\mathcal{P}$

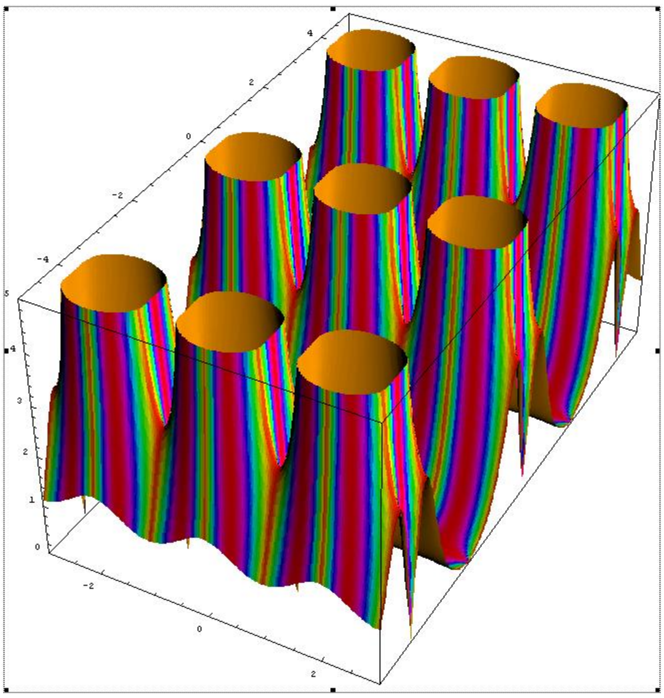


FIGURE 3. Paysage analytique de la fonction $\mathcal{P}'$

Proposition VI.2.5. *La fonction $\wp$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, paire et bi-périodique. Ses pôles sont les points du réseau Λ. En plus, $\wp$ vérifie la relation*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

où g_2 et g_3 sont des constantes définies par le réseau Λ.

Démonstration. Seule la relation est à démontrer. On développe $\wp$ en série de Laurent sur un voisinage épointé de 0. Le développement a la forme

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + b_2 z^2 + b_4 z^4 + \cdots$$

parce que $\wp$ est paire et que

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\lambda \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) = g(z),$$

avec $g(0) = 0$. La fonction g permet de calculer les premiers coefficients du développement (en dérivant terme à terme) :

$$b_2 = 3 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^4}, \quad b_4 = 5 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda^6}.$$

On dérive terme à terme le développement de $\wp$ pour obtenir

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2b_2 z + 4b_4 z^3 + \cdots,$$

relation qu'on élève au carré :

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = \frac{4}{z^6} - 8\frac{b_2}{z^2} - 16b_4 + \cdots.$$

On a ainsi

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp(z)^3 = -20\frac{b_2}{z^2} - 28b_4 + \cdots,$$

ce qui fait que la fonction

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp(z)^3 + 20b_2\wp(z) + 28b_4$$

est holomorphe au voisinage de 0 et nulle en 0. Mais elle est bi-périodique, donc elle est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et donc constante, et donc, enfin, nulle. □

Remarque VI.2.6. Le fait que $\wp$ satisfasse une équation différentielle algébrique

$$(y')^2 = P(y)$$

pour un polynôme P de degré 3 fait qu'elle intervient dans la solution de nombreux problèmes de mécanique, comme par exemple la description du mouvement d'une toupie (comme on le savait déjà avant de faire de l'analyse complexe) ou plus généralement d'un solide (comme cela a brillamment été démontré, en utilisant l'analyse complexe, par Kowalevskaya).

Remarque VI.2.7. La courbe C d'équation $y^2 = 4x^3 + a_2 x + a_4$ (dans $\mathbf{C}^2$) est une *courbe elliptique*. Les fonctions $\wp$ et $\wp'$ permettent de la paramétrer

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\longrightarrow C \\ z &\longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

(pour bien faire, on ajoute un point à l'infini à C et on envoie les points du réseau sur ce point à l'infini). Cette application passe au quotient en un isomorphisme (analytique)

$$\mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow C.$$

Comme $\mathbf{C}/\Lambda$ est un tore (homéomorphe à $S^1 \times S^1$), eh bien C aussi. Et comme $\mathbf{C}/\Lambda$ est un groupe, eh bien C aussi. On peut construire cette structure de groupe en regardant les intersections de C avec les droites de $\mathbf{C}^2$ (voir les exercices VI.6, VI.7, VI.8 et VI.9 ou [**Rey90**]), c'est très joli.

Les courbes elliptiques sont des objets omniprésents en mathématiques. On a mentionné la mécanique et les équations différentielles algébriques, mais il y a aussi, par exemple, l'arithmétique. Leur intervention décisive dans la démonstration du grand théorème de Fermat, par exemple, est célèbre.

VI.3. Produits infinis

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. On veut considérer le « produit infini »

$$\prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z),$$

c'est-à-dire la limite, si elle existe, de la suite des produits finis p_n, où

$$p_n(z) = \prod_{i=0}^{n} f_i(z).$$

On dit que *le produit infini* $\prod_n f_n$ *converge normalement* sur une partie K de U si

- on a $\lim_{n\to+\infty} f_n = 1$ uniformément sur K,
- si $a_n = f_n - 1$, la série $\sum a_n$ converge normalement sur K.

Remarque VI.3.1. De l'inégalité

$$1 + x \leq e^x \quad \forall\, x > 0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

on déduit que, pour toute suite (u_n) de nombres complexes, on a

$$\prod_{i=0}^{n}(1 + |u_i|) \leq \exp\left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right).$$

Donc, si la série (a_n) converge normalement sur K, la suite (p_n) converge en norme sur K.

Proposition VI.3.2. *Si les fonctions f_n sont holomorphes sur U et si le produit infini $\prod_n f_n$ converge normalement sur tous les compacts de U, alors la limite $f = \prod_n f_n$ est holomorphe dans U. De plus, on a*

- $f = f_0 f_1 \cdots f_p \left(\prod_{n>p} f_n\right)$,
- *L'ensemble des zéros de f est la réunion de l'ensemble des zéros des f_n, l'ordre de multiplicité d'un zéro de f étant la somme des ordres de multiplicité de ce zéro pour chacune des fonctions f_n.*

Remarque VI.3.3. Le fait qu'un produit infini de termes ne s'annule que si l'un des termes s'annule n'a rien d'évident. C'est même faux en général (sans nos hypothèses). Par exemple le produit infini $\prod_{n\geq 1} \exp(-\frac{1}{n})$ est nul... alors qu'aucun des facteurs n'est nul. Je laisse la vérification de cette propriété en exercice, elle est bien sûr liée au fait que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Démonstration. Les produits finis sont holomorphes, donc la fonction f est limite (uniformément sur tout compact) d'une suite de fonctions holomorphes. Elle est aussi holomorphe en application du théorème de Morera.

La formule d'associativité est claire.

Montrons maintenant l'assertion sur les zéros de f. Fixons un nombre réel $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ et montrons qu'il existe un entier N tel que

$$m > n > N \Rightarrow |p_m - p_n| < 2\,|p_n|\,\varepsilon.$$

On a en effet, pour $m > n$

$$p_m - p_n = p_n \left(\prod_{k=n+1}^{m} f_k - 1 \right) = p_n \left(\prod_{k=n+1}^{m} (a_k + 1) - 1 \right),$$

ce qui permet de majorer

$$|p_m - p_n| = |p_n| \left| \prod_{k=n+1}^{m} (a_k + 1) - 1 \right| \leq |p_n| \left(\prod_{k=n+1}^{m} (1 + |a_k|) - 1 \right)$$

(la dernière inégalité grâce au lemme VI.3.4 ci-dessous).

Maintenant, comme la série $\sum a_n$ converge normalement, il existe N tel que pour $n > N$, le reste $\sum_{k \geq n+1} |a_k|$ soit majoré par ε. On a alors, en utilisant les inégalités de la remarque VI.3.1,

$$\text{pour } n > N, \qquad \prod_{k=n+1}^{m} (1 + |a_k|) \leq \exp \left(\sum_{k>n} |a_k| \right) < e^{\varepsilon}.$$

Enfin, en utilisant le fait que $e^{\varepsilon} < 1 + 2\varepsilon$, on obtient l'inégalité désirée :

$$|p_m - p_n| \leq |p_n| (e^{\varepsilon} - 1) < 2 |p_n| \varepsilon.$$

On en déduit sans mal que, pour $m > n > N$,

$$|p_m| \geq (1 - 2\varepsilon) |p_n|$$

et donc aussi que, pour $n > N$

$$|f(z)| \geq (1 - 2\varepsilon) |p_n(z)|.$$

Finalement, f ne peut s'annuler que si le produit fini p_n s'annule. $\square$

Lemme VI.3.4

$$\left| \prod_{k=1}^{N} (1 + b_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^{N} (1 + |b_k|) - 1.$$

Démonstration. C'est une récurrence sur le nombre N de facteurs du produit. Pour $N = 1$, l'inégalité est simplement $|b_1| \leq |b_1|$. Ensuite on a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{N+1} (1 + b_k) - 1 &= (1 + b_{N+1}) \prod_{k=1}^{N} (1 + b_k) - 1 \\
&= \left(\prod_{k=1}^{N} (1 + b_k) - 1 \right) (1 + b_{N+1}) + 1 + b_{N+1} - 1 \\
&= \left(\prod_{k=1}^{N} (1 + b_k) - 1 \right) (1 + b_{N+1}) + b_{N+1},
\end{aligned}$$

d'où la majoration

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{N+1}(1+b_k)-1\right| &\leq \left|\prod_{k=1}^{N}(1+b_k)-1\right|(1+|b_{N+1}|)+|b_{N+1}| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^{N}(1+|b_k|)-1\right)(1+|b_{N+1}|)+|b_{N+1}| \\ &\quad\text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \prod_{k=1}^{N+1}(1+|b_k|)-1-|b_{N+1}|+|b_{N+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{N+1}(1+|b_k|)-1. \end{aligned}$$

□

On s'intéresse maintenant à la dérivée de f et plus exactement, comme f est un produit, à sa dérivée logarithmique.

Proposition VI.3.5*. Si les fonctions f_n sont holomorphes sur U et si le produit infini $f = \prod_n f_n$ converge normalement sur tous les compacts de U, alors la série de fonctions méromorphes $\sum f_n'/f_n$ converge normalement sur tous les compacts de U vers la dérivée logarithmique f'/f de f.*

Démonstration. Fixons un entier n et posons

$$g_m(z) = \prod_{k=n+1}^{m} f_k(z).$$

Ainsi,

$$\frac{g_m'(z)}{g_m(z)} = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{f_k'(z)}{f_k(z)} \text{ ou } g_m'(z) = g_m(z)\sum_{k=n+1}^{m}\frac{f_k'(z)}{f_k(z)}.$$

Si on fait tendre m vers l'infini, la limite g des g_m est une fonction holomorphe et sa dérivée g' est la limite des g_m' en application du théorème de Morera III.3.9. On a

$$\frac{g'}{g} = \sum_{k\geq n+1}\frac{f_k'}{f_k}$$

et

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=0}^{n}\frac{f_k'}{f_k} + \frac{g'}{g} = \sum_{k\geq 0}\frac{f_k'}{f_k}.$$

On a donc bien, sur l'intérieur de K,

$$\frac{f'}{f} = \sum_n \frac{f_n'}{f_n}$$

avec convergence normale sur les compacts de l'intérieur de K et ceci pour tout K compact de U. □

Exemple, développement de la fonction sinus. L'exemple le plus simple qu'on puisse imaginer est celui du produit infini

$$f(z) = z\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

En effet, ce produit converge normalement sur tous les compacts puisque la série numérique $\sum 1/n^2$ est convergente.

En application des résultats précédents (proposition VI.3.2), la fonction f est entière et elle a pour zéros (simples) toutes les valeurs entières de z.

On calcule sa dérivée logarithmique en utilisant la proposition VI.3.5 :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Nous avons déjà remarqué (remarque VI.1.6) l'identité

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

On a alors, en posant $g(z) = \sin(\pi z)$, les égalités

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Donc $f(z) = C \sin \pi z$ et il ne reste plus qu'à déterminer la constante C. Par définition de f, on a

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = 1.$$

Comme $\sin \pi z/z$ tend vers π, on en déduit que $C = \dfrac{1}{\pi}$. En conclusion, on a obtenu la formule

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \qquad \square$$

La fonction zêta de Riemann. Décrivons maintenant la fonction zêta de Riemann comme un produit infini. On la prolongera en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\text{Ré}(z) > 0$ et on montrera qu'elle ne s'annule pas sur la droite $\text{Ré}(z) = 1$. Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Théorème VI.3.6. *Le produit*

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

converge normalement et uniformément sur les compacts de $\text{Ré}(s) \geq 1 + \delta$ *(pour tout* $\delta > 0$*) et on a*

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Démonstration. On a la convergence

– uniforme sur tout compact de $1 - \dfrac{1}{p^s}$ vers 1,

– normale sur tout compact de $\sum_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{p^s}$,

d'où la convergence du produit. On écrit

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots.$$

De sorte que, en appelant, pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\mathcal{E}(N)$ l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers sont $\leq N$, on a

$$\prod_{p\leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathcal{E}(N)} \frac{1}{n^s},$$

puis, comme $\mathcal{E}(N) \supset \{1, \ldots, N\}$,

$$\left|\zeta(s) - \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^{\text{Ré}(s)}},$$

on fait tendre N vers $+\infty$. D'où le fait que le produit en question converge vers $\zeta(s)$. □

Corollaire VI.3.7. *Si* $\text{Ré}(s) > 1$, $\zeta(s) \neq 0$. □

Maintenant, on prolonge ζ en une fonction méromorphe.

Proposition VI.3.8. *La fonction*

$$f(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

est holomorphe sur $\text{Ré}(s) > 0$.

Démonstration. D'abord, si $\text{Ré}(s) > 1$, on a

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$$

donc

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx. \end{aligned}$$

Posons donc, pour tout s,

$$\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx.$$

La fonction φ_n est définie et holomorphe pour $\text{Ré}(s) > 0$. Sur ce demi-plan, on a

$$\begin{aligned} |\varphi_n(s)| &= \left|\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx\right| \\ &\leq \sup_{n \leq x \leq n+1} \left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right| \\ &\leq \sup_{n \leq x \leq n+1} \left|\frac{s}{x^{s+1}}\right| \\ &\quad \text{par la formule des accroissements finis} \\ &\leq \frac{|s|}{n^{\text{Ré}(s)+1}}. \end{aligned}$$

Donc la série des φ_n est convergente pour $\text{Ré}(s) > 0$ et elle converge vers une fonction holomorphe, la fonction f. □

On démontre maintenant que la fonction ζ n'a pas de zéro sur la droite $\text{Ré}(s) = 1$. On pose

$$\Phi(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^s},$$

une fonction bien définie et holomorphe pour $\text{Ré}(s) > 1$.

Proposition VI.3.9. *La fonction* Φ *est méromorphe pour* $\mathrm{Ré}(s) > \frac{1}{2}$, *de plus*

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$$

n'a pas de pôle pour $\mathrm{Ré}(s) \geq 1$.

Démonstration. On sait que

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} f_p(s).$$

On applique la proposition VI.3.5, qui donne

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{f_p'(s)}{f_p(s)} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^s\left(1-\frac{1}{p^s}\right)} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^s - 1}$$

(puisque $f_p(s) = 1 - e^{-s\ln p}$, $f_p'(s) = e^{-s\ln p}\ln p$). Mais on a aussi

$$\frac{1}{p^s-1} = \frac{1}{p^s}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right) = \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$$

donc

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^s} + \sum_{p\in\mathcal{P}} h_p(s)$$

avec

$$h_p(s) = \frac{1}{p^{2s}}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots\right)$$

et

$$|h_p(s)| \leq \frac{\ln p}{|p^{2s}|}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{p^s}\right|} \leq 2\frac{\ln p}{|p^{2s}|}$$

(en minorant brutalement $|p^s|$ par 2). La série des h_p converge donc absolument pour $\mathrm{Ré}(2s) \geq 1+\delta$, donc Φ est méromorphe pour $\mathrm{Ré}(s) > \frac{1}{2}$, a un pôle en 1 et d'autres aux zéros de ζ (mais pas d'autre pôle dans $\mathrm{Ré}(s) > \frac{1}{2}$). □

Proposition VI.3.10. *La fonction* ζ *n'a pas de zéro sur la droite* $\mathrm{Ré}(s) = 1$.

Démonstration. Supposons qu'elle ait un zéro d'ordre m en $1+ib$ pour un $b \neq 0$ et soit n l'ordre de son zéro en $1+2ib$ (rien n'empêche n d'être nul). Comme on a

$$\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)},$$

$1-ib$ est un zéro de ζ d'ordre m, de même l'éventuel zéro de ζ en $1-2ib$ est d'ordre n. L'expression de la dérivée logarithmique de ζ à l'aide de Φ dans la démonstration précédente montre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm ib) = -m, \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm 2ib) = -n$$

(ordre du pôle de ζ en 1, ordre du zéro de ζ en $1\pm ib$, en $1\pm 2ib$), puisque

$$\Phi(s) = \frac{1}{s-1} + f(s) \text{ avec } f \text{ holomorphe en } 1$$

donc

$$\varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \varepsilon f(\varepsilon) \to 1,$$

que

$$\Phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + g(s) = -\frac{m}{s-(1\pm ib)} + g(s) \text{ avec } g \text{ holomorphe en } 1 \pm ib$$

donc
$$\varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm ib) = -\frac{\varepsilon m}{\varepsilon} + \varepsilon g(1+\varepsilon\pm ib) \to -m$$
(et de même en $1 \pm 2ib$). Maintenant on considère
$$\left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}}\right)^4,$$
un réel positif, de sorte que, pour $s = 1+\varepsilon > 1$,
$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^s}\left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}}\right)^4 \geq 0.$$
En développant la puissance 4 par la formule du binôme, on trouve que ce réel positif est
$$\Phi(1+\varepsilon+2ib) + 4\Phi(1+\varepsilon+ib) + 6\Phi(1+\varepsilon) + 4\Phi(1+\varepsilon-ib) + \Phi(1+\varepsilon-2ib).$$
On multiplie par ε et on fait tendre celui-ci vers 0, on obtient
$$-2n - 8m + 6 \geq 0,$$
ce qui, avec m et n entiers naturels, force m à être nul, ce que nous voulions démontrer. □

Remarque VI.3.11. La position des zéros de la fonction ζ fait l'objet d'une célèbre conjecture de Riemann, dite « hypothèse de Riemann » par ignorance de l'allemand. Celle-ci affirme que tous ces zéros ont une partie réelle égale à $1/2$. Ce problème irrésolu est un des problèmes ouverts les plus célèbres des mathématiques.

VI.4. Le théorème des nombres premiers

La description de ζ comme un produit infini montre le lien de cette fonction avec la répartition des nombres premiers parmi les entiers. C'est d'ailleurs dans un mémoire sur la répartition des nombres premiers que Riemann a étudié la fonction zêta (et formulé sa conjecture). Le théorème des nombres premiers a une longue histoire, conjecturé depuis le XVII^e siècle, une forme faible démontrée par Chebyschev en 1848, un programme de preuve par Riemann en 1851, démontré indépendamment par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896, il en existe aujourd'hui de nombreuses démonstrations. La plus élégante est sans doute celle expliquée par Kahane [**Kah96**], que l'on trouvera détaillée par Bost dans [**SB03**]. Elle utilise la théorie des distributions, ce pourquoi je ne l'ai pas choisie pour ce cours de magistère 1ère année (L3). Celle que je propose vient de [**New80**] (voir aussi [**Lan93**]). Comme les démonstrations originelles, elle utilise les propriétés des fonctions analytiques que nous avons exposées dans ces notes. Elle en est donc une conclusion naturelle. Trêve de bavardage, voici l'énoncé :

Théorème VI.4.1. *Pour $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. On a*
$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \text{ quand } x \to +\infty.$$

Même si la démonstration proposée ici est « courte », elle va prendre un peu de place. On commence par considérer la fonction
$$\varphi(x) = \sum_{p\leq x} \ln p.$$
C'est une fonction réelle de variable réelle, une fonction en escalier, positive et croissante. Une des étapes de la démonstration est de montrer que $\varphi(x)$ est équivalente à x quand x tend vers l'infini. On commence doucement par :

Lemme VI.4.2. *La fonction $\varphi(x)/x$ est bornée.*

Démonstration. On écrit

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \geq C_{2n}^n \geq \prod_{n<p\leq 2n} p,$$

(parce que tous les nombres premiers compris entre $n+1$ et $2n$ divisent C_{2n}^n) puis on prend les logarithmes des deux membres, obtenant

$$\varphi(2n) - \varphi(n) = \ln \prod_{n<p\leq 2n} p \leq 2n \ln 2$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si $x \in \mathbf{R}$, et $n \leq x < n+1$, on a

$$\varphi(2n) \leq \varphi(2x) \leq \varphi(2n) + \ln(2x+1)$$
$$\varphi(n) \leq \varphi(x) \leq \varphi(n) + \ln(x+1).$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi(2x) - \varphi(x) &\leq \varphi(2n) - \varphi(n) + \ln(2x+1)\\ &\leq 2n\ln 2 + \ln(2x+1)\\ &\leq 2x\ln 2 + \ln(2x+1).\end{aligned}$$

La fonction $\ln(2x+1)/x$ est bornée supérieurement par un $M \geq 0$, donc on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(2x) - \varphi(x) \leq 2Cx$$

pour une certaine constante $C > \ln 2$. Enfin,

$$\begin{aligned}\varphi(u) - \varphi\left(\frac{u}{2}\right) &\leq Cu\\ \varphi\left(\frac{u}{2}\right) - \varphi\left(\frac{u}{4}\right) &\leq C\frac{u}{2}\\ \cdots &\leq \cdots\\ \varphi\left(\frac{u}{2^k}\right) - \varphi\left(\frac{u}{2^{k+1}}\right) &\leq C\frac{u}{2^k}\end{aligned}$$

et donc

$$\varphi(u) - \varphi\left(\frac{u}{2^{k+1}}\right) \leq C(u + \frac{u}{2} + \cdots) \leq 2Cu.$$

On en déduit que $\varphi(x) \leq 2Cx$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. □

On utilise ensuite un lemme sur la « transformée de Laplace »

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt.$$

Lemme VI.4.3. *Soit f une fonction bornée et continue par morceaux sur $\mathbf{R}^+$. On suppose que la fonction*

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt, \text{ définie pour } \mathrm{Ré}(z) > 0$$

se prolonge en une fonction analytique sur $\mathrm{Ré}(z) \geq 0$. Alors

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ existe et vaut } g(0).$$

Ce lemme sera démontré plus bas (page 115). Utilisons le pour démontrer

Lemme VI.4.4. *L'intégrale*
$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)-x}{x^2}\,dx$$
est convergente.

Démonstration. On pose $f(t) = \varphi(e^t)e^{-t} - 1$. C'est une fonction continue par morceaux (comme φ) et elle est bornée puisque $\varphi(x)/x$ l'est (lemme VI.4.2). Le changement de variable $x = e^t$ donne
$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)-x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt,$$
il suffit donc de montrer que la transformée de Laplace de f est analytique sur $\mathrm{Ré}(z) \geq 0$ et d'appliquer le lemme VI.4.3. On calcule donc
$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt = \int_0^{+\infty} (\varphi(e^t)e^{-t} - 1)e^{-zt}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)-x}{x^{z+2}}\,dx.$$
Mais on a, en décomposant sur les intervalles d'un premier p au suivant p^+ sur lesquels φ est constante égale à $C_p = \sum_{q \leq p} \ln p$ (de sorte que $C_{p^+} = C_p + \ln p^+$),
$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\,dx &= \sum_{p\in\mathcal{P}} \int_p^{p^+} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\,dx \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}} C_p \int_p^{p^+} \frac{dx}{x^{s+1}} \\
&= -\frac{1}{s}\sum_{p\in\mathcal{P}} C_p \left(\frac{1}{(p^+)^s} - \frac{1}{p^s}\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{C_p}{p^s} - \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{C_{p^+} - \ln p}{(p^+)^s}\right) \\
&= \frac{1}{s}\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln p}{p^s} \\
&= \frac{\Phi(s)}{s}.
\end{aligned}$$
Donc ici
$$g(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{z+2}}\,dx - \frac{dx}{x^{z+1}} = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$
Nous savons (proposition VI.3.9) que $h(s) = \Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ est holomorphe pour $\mathrm{Ré}(s) \geq 1$, donc
$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z(z+1)} = \frac{h(z+1)}{z+1}$$
est holomorphe sur $\mathrm{Ré}(z) \geq 0$ et il en est de même de
$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z+1} + \frac{h(z+1)}{z+1},$$
c'est-à-dire de $g(z)$. On peut donc appliquer le lemme VI.4.3. □

On en arrive ainsi à l'équivalence annoncée de $\varphi(x)$ avec x.

Proposition VI.4.5. *On a $\varphi(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$.*

Démonstration. On montre que

(1) Pour tout $\lambda > 1$, $\{x \mid \varphi(x) \geq \lambda x\}$ est borné,

(2) pour tout $\mu < 1$, $\{x \mid \varphi(x) \leq \mu x\}$ est borné.

Ainsi, pour $x \geq M$, on n'a ni $\dfrac{\varphi(x)}{x} \geq \lambda > 1$ ni $\dfrac{\varphi(x)}{x} \leq \mu < 1$, donc $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Montrons d'abord (1). Sinon, il existerait un $\lambda > 1$ et un $M > 0$ pour lesquels

$$x \geq M \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} \geq \lambda.$$

Mais alors, pour $x \geq M$,

$$\begin{aligned}\int_x^{\lambda x} \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt &\geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,dt \text{ (φ est croissante)}\\ &= \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - u}{u^2}\,du \text{ en posant } t = ux\\ &> 0 \text{ et indépendant de } x,\end{aligned}$$

ce qui empêche l'intégrale de converger. Pour (2), supposons de même qu'il existe un $\lambda > 1$ et un $M > 0$ tels que

$$x \geq M \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Notons que la constante obtenue dans la démonstration du lemme VI.4.2 est supérieure à $2\ln 2$ et en particulier à 1 (pas de contradiction à ce niveau !). On écrit de même

$$\int_{x/\lambda}^{x} \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt \leq \int_{x/\lambda}^{x} \frac{\frac{x}{\lambda}-t}{t^2}\,dt = \int_{1/\lambda}^{1} \frac{\frac{1}{\lambda}-u}{u}\,du,$$

donc

$$\left|\int_{x/\lambda}^{x} \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt\right| = \int_{x/\lambda}^{x} \frac{t-\varphi(t)}{t^2}\,dt \geq \int_{1/\lambda}^{1} \frac{u-\frac{1}{\lambda}}{u}\,du > 0$$

et indépendant de x, ce qui, à nouveau, empêche l'intégrale de converger. □

Démontrons enfin le théorème des nombres premiers.

Démonstration du théorème VI.4.1. On vient de voir que $x \sim \varphi(x)$ à l'infini, il suffit donc de montrer, ce que nous allons faire, que $\pi(x) \sim \dfrac{\varphi(x)}{\ln x}$. Remarquons d'abord que

$$\varphi(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \leq \sum_{p \leq x} \ln x = \pi(x) \ln x.$$

En plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\varphi(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} \ln p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} (1-\varepsilon) \ln x,$$

et donc

$$\varphi(x) \geq (1-\varepsilon)\ln x(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) \geq (1-\varepsilon)\pi(x)\ln x \left(1 - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)}\right).$$

En utilisant le fait que $\pi(x^{1-\varepsilon}) \leq x^{1-\varepsilon}$ et (ce que nous venons de remarquer) que $\pi(x) \geq \varphi(x)/\ln x$, on voit que

$$\frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)} \leq \frac{x^{1-\varepsilon}\ln x}{\varphi(x)}.$$

Comme $\varphi(x) \sim x$, le rapport $\pi(x^{1-\varepsilon})/\pi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et donc, pour $x \geq M$, disons, on a $\pi(x^{1-\varepsilon})/\pi(x) \leq \varepsilon$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe un M tel que, pour $x \geq M$, on ait

$$(1-\varepsilon)^2 \leq (1-\varepsilon)\left(1 - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})}{\pi(x)}\right) \leq \frac{\varphi(x)}{\pi(x)\ln x} \leq 1,$$

ce qui donne le fait que $\varphi(x)/\pi(x)\ln x$ tend vers 1 et l'équivalence voulue. □

Il reste à démontrer le lemme sur la transformée de Laplace.

Démonstration du lemme VI.4.3. Remarquons d'abord que, comme f est bornée et continue par morceaux sur $\mathbf{R}^+$, lorsque $\text{Ré}(z) > 0$, l'intégrale définissant g est convergente et définit bien une fonction analytique de z. De même, pour $T > 0$, la fonction

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt$$

est une fonction entière. Nous voulons montrer, sous l'hypothèse faite sur g, que $g_T(0)$ a une limite quand $T \to +\infty$ et que cette limite est $g(0)$. L'hypothèse sur g est que celle-ci se prolonge en une fonction analytique sur $\text{Ré}(z) \geq 0$. On peut donc choisir $\delta > 0$ assez petit pour que g soit analytique au voisinage du chemin C (dépendant de $R > 0$ et de δ) composé de

- l'arc du cercle $|z| = R$ défini par le demi-plan $\text{Ré}(z) \geq -\delta$,
- la corde $\text{Ré}(z) = -\delta$ de ce cercle.

On écrit la formule de Cauchy pour les valeurs en 0 des fonctions analytiques g et de g_T légèrement modifiées par multiplication par une fonction qui vaut 1 en 0,

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_C (g(z) - g_T(z))\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}.$$

Appelons B un majorant de $|f|$ sur $\mathbf{R}^+$. On a pour $\text{Ré}(z) > 0$,

$$|g(z) - g_T(z)| = \left|\int_T^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt\right| \leq B\int_T^{+\infty}\left|e^{-zt}\right|\,dt = \frac{Be^{-T\,\text{Ré}(z)}}{\text{Ré}(z)}.$$

D'autre part, si $z = Re^{i\theta}$, on a

$$\left|e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = \frac{e^{T\,\text{Ré}(z)}}{R}\left|\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right| = \frac{e^{T\,\text{Ré}(z)}}{R}2\cos\theta = \frac{2e^{T\,\text{Ré}(z)}\,\text{Ré}(z)}{R^2}.$$

Ainsi, si C^+ désigne le demi-cercle ($|z| = R$, $\text{Ré}(z) \geq 0$), on a

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+}(g(z) - g_T(z))\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq \frac{\pi R}{2\pi}\,\frac{Be^{-T\,\text{Ré}(z)}}{\text{Ré}(z)}\,\frac{2e^{T\,\text{Ré}(z)}\,\text{Ré}(z)}{R^2} = \frac{B}{R}.$$

Désignons par C^- le « reste » du chemin C (la partie sur laquelle $\text{Ré}(z) < 0$). On écrit d'abord, pour $\text{Ré}(z) < 0$,

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq B\int_0^T e^{-\,\text{Ré}(z)t}\,dt \leq \frac{Be^{-\,\text{Ré}(z)T}}{-\,\text{Ré}(z)}.$$

De plus, comme g_T est entière, elle n'a pas de pôle du tout et son intégrale sur C^- est égale à son intégrale sur le demi-cercle S^- ($|z| = R$, $\text{Ré}(z) < 0$). Sur ce demi-cercle, la majoration ci-dessus pour l'autre facteur dans l'intégrale donne

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C^-} g_T(z)e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq \frac{B}{R}.$$

Posons $h(z) = \dfrac{g(z)}{z}\left(1+\dfrac{z^2}{R^2}\right)$, une fonction holomorphe sur $(\text{Ré}(z) > 0) \cap C$, indépendante de T. Sur tout compact de notre demi-plan $\text{Ré}(z) < 0$, e^{Tz} tend vers 0 (quand T tend vers l'infini) de même que son produit avec h, on a donc

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{C^-} h(z)e^{Tz}\,dz = 0.$$

On rassemble toutes ces estimations et on les emballe. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R > 0$ assez grand pour que $\dfrac{B}{R} < \varepsilon$ et soit T assez grand pour que (notre dernière estimation)

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C^-} g(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| < \varepsilon.$$

On a alors

$$|g(0) - g_T(0)| < 3\varepsilon$$

donc $g_T(0)$ tend bien vers $g(0)$ comme annoncé. □

Exercices

Exercice VI.1. Quel est le développement en série de Fourier de $1/\cos z$ pour $\text{Im}(z) > 0$? Celui de $\operatorname{cotan} z$ pour $\text{Im}(z) > 0$? pour $\text{Im}(z) < 0$?

Exercice VI.2. On a montré (remarque VI.1.6) que

$$\pi \operatorname{cotan} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

On développe ici en série de Laurent, sur le disque épointé de centre 0 et de rayon 1, la fonction

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} q_{2n} z^{2n-1}.$$

Vérifier que

$$q_{2n} = 2\zeta(2n)\left(= 2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2n}}\right).$$

En déduire la formule d'Euler

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$$

(les B_i sont les nombres de Bernoulli introduits dans l'exercice I.44) et, en utilisant les valeurs des B_{2i} obtenues dans ce même exercice I.44, en déduire les valeurs de $\zeta(2)$ (encore...), $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

La fonction cotangente est solution de l'équation différentielle

$$y' = -1 - y^2$$

donc la série

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

est solution de

$$y' = -y^2 - \pi^2.$$

En déduire (toujours...) que $\zeta(2) = \pi^2/6$ et, pour $n \geq 2$, la formule « récursive »

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2n) = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k)\zeta(2n-2k)$$

qui permet de calculer, de proche en proche les $\zeta(2n)$ à partir de $\zeta(2)$.

Exercice VI.3. Montrer que

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - z^2}$$

En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

***Exercice VI.4* (La fonction ϑ)**. Soit τ un nombre complexe tel que $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ et soit $q = e^{\pi i \tau}$. Montrer que la série

$$\sum_{-\infty \leq n \leq +\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi n i z}$$

converge uniformément sur tout compact[(2)] de $\mathbf{C}$.

On désigne par ϑ la somme de cette série. Montrer que

$$\begin{aligned}\vartheta(z+1) &= \vartheta(z),\\ \vartheta(z+\tau) &= -q^{-1}e^{-2i\pi z}\vartheta(z).\end{aligned}$$

Montrer que ϑ n'est pas identiquement nulle. On pourra montrer par exemple que

$$\int_0^1 |\vartheta(x)|^2\, dx = 1 + 2\sum_{n\geq 1} |q|^{2n^2}.$$

Montrer que les nombres $m + \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$ sont des zéros de ϑ. En évaluant l'intégrale de la fonction ϑ'/ϑ sur le contour d'un parallélogramme de périodes bien choisi, montrer que ϑ n'a pas d'autre zéro. Voir aussi l'exercice VI.17.

Exercice VI.5. Montrer que si

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots$$

est le développement de Laurent de la fonction $\wp$ à l'origine, l'équation différentielle vérifiée par $\wp$ permet de déterminer par récurrence les coefficients a_{2n} avec $n \geq 3$ comme polynômes en a_2 et a_4. Déterminer effectivement a_6 et a_8.

***Exercice VI.6* (Zéros et pôles, ordre d'une fonction elliptique)**. On donne un réseau Λ, engendré par u et v. On appelle *parallélogramme de périodes* tout parallélogramme de sommets t, $t+u$, $t+u+v$, $t+v$ (pour $t \in \mathbf{C}$). Soit f une fonction méromorphe bipériodique par rapport à ce réseau, non identiquement nulle (ce qu'on appelle une *fonction elliptique*[(3)]).

(1) Montrer que f a un nombre fini de pôles dans chaque parallélogramme de période et, de même, qu'elle y a un nombre fini de zéros.
(2) Montrer que la somme des résidus de f en ses pôles d'un même parallélogramme de périodes est nulle.

[(2)] C'est aussi une série de Fourier.

[(3)] On trouvera de nombreux résultats et exercices sur les fonctions elliptiques, par exemple dans [**WW96**], une bonne occasion de faire de la publicité pour cet immortel ouvrage.

(3) Soit $c \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que le nombre de solutions de l'équation $f(z) = c$ dans un parallélogramme de périodes est indépendant de c. On appelle ce nombre l'*ordre* de la fonction elliptique f. Montrer que l'ordre d'une fonction elliptique est toujours au moins égal à 2. Quel est l'ordre de $\wp$? de $\wp'$?

(4) Soit C le contour bord d'un parallélogramme de périodes (parcouru dans le sens direct) choisi[4] tel qu'aucun zéro ni pôle de f ne soit sur C. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz \in \Lambda.$$
En déduire que la différence entre la somme des zéros et la somme des pôles de f dans un parallélogramme de périodes est un élément du réseau Λ. Combien la fonction $\wp$ a-t-elle de zéros dans un parallélogramme de périodes ? Que vaut la somme de ces zéros ?

Exercice VI.7 **(Les racines de $4X^3 - g_2X - g_3$)**. Cet exercice est la suite du précédent, dont il utilise les notations et les résultats. On pose
$$\omega_1 = \frac{u}{2}, \quad \omega_2 = \frac{v}{2}, \quad \omega_3 = -\omega_1 - \omega_2 \quad \text{et } e_i = \wp(\omega_i) \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$
Montrer que $\wp'(\omega_i) = 0$. Combien $\wp'$ a-t-elle de zéros dans un parallélogramme de périodes ? Quels sont ces zéros ?

Montrer que $\wp(z) - e_i$ a un zéro double en $z = \omega_i$. Quels sont les zéros de $\wp(z) - e_i$? Montrer que e_1, e_2 et e_3 sont trois nombres distincts et que ce sont les trois racines du polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ (celles-ci sont donc simples).

Exercice VI.8 **(La formule d'addition)**. Cet exercice utilise les notations et les résultats de l'exercice VI.6. Soient x et y deux nombres complexes. Montrer que le système linéaire
$$\begin{cases} \wp'(x) = A\wp(x) + B \\ \wp'(y) = A\wp(y) + B \end{cases}$$
détermine uniquement deux nombres complexes A et B (dépendant de a et y) pourvu que $x \not\equiv y$ et $-y \mod \Lambda$. Montrer qu'alors, la fonction
$$z \longmapsto \wp'(z) - A\wp(z) - B$$
a exactement trois zéros dans un parallélogramme de périodes et que ceux-ci sont congruents à x, y et $-x-y$ modulo Λ. On a donc
$$\wp'(-x-y) = A\wp(-x-y) + B.$$
En éliminant A et B, montrer que
$$\begin{vmatrix} \wp(x) & \wp'(x) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(x+y) & -\wp'(x+y) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice VI.9 **(Loi de groupe sur une cubique)**. Soit $\mathbf{K}$ un des trois corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (que l'on considérera comme un sous-corps de $\mathbf{C}$ lorsque ce sera nécessaire) et soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré 3 sans racine multiple. On considère la courbe
$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbf{K}^2 \mid y^2 = P(x)\right\}.$$

[4] Cette précaution vaut dès que nécessaire sans qu'elle soit toujours explicitement mentionnée.

Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ (non symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des x). Montrer que la droite AB (la tangente à $\mathcal{C}$ en A si $A = B$) coupe $\mathcal{C}$ en un troisième point C'. On appelle C le symétrique[(5)] de C' par rapport à l'axe des $\mathcal{C}$ et on pose

$$A + B = C.$$

Pour prolonger cette loi en une loi de composition interne sur $\mathcal{C}$, on convient d'ajouter un unique point « à l'infini » à $\mathcal{C}$, qui est aussi sur toutes les droites parallèles à l'axe des y. On note ce point 0.

Montrer que $+$ est une loi de composition interne sur $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{0\}$, qu'elle est commutative, possède un élément neutre et que tout élément possède un inverse. Remarquer aussi que l'on a

$$A + B + C = 0 \Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

En admettant que $+$ est aussi associative, on a ainsi une loi de groupe commutative sur la « cubique » $\widetilde{\mathcal{C}}$. Déterminer les éléments d'ordre 2, d'ordre 3.

On considère maintenant $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$ et on suppose que

$$P(X) = 4X^3 - g_2X - g_3$$

est le polynôme associé à un réseau Λ de $\mathbf{C}$. Ainsi on a une application

$$(\wp, \wp') : \mathbf{C} - \Lambda \longrightarrow \mathcal{C}$$

que l'on prolonge en envoyant les points de Λ sur le point $0 \in \widetilde{\mathcal{C}}$. Montrer qu'on a ainsi défini une bijection

$$\Phi : \mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}.$$

En utilisant les formules d'addition (exercice VI.8), montrer que

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

En déduire que la loi $+$ définie sur $\widetilde{\mathcal{C}}$ est associative.

Question subsidiaire. Combien y a-t-il de points d'inflexion sur $\widetilde{\mathcal{C}}$?

***Exercice VI.10* (La fonction $\wp$ comme fonction de variable réelle).** Montrer que le réseau Λ engendré par 1 et τ (avec $\operatorname{Im} \tau > 0$) est invariant par conjugaison complexe si et seulement si $\text{Ré}\, \tau \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Vérifier qu'alors le polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$ est réel et déterminer, suivant que $\text{Ré}\, \tau \in \mathbf{Z}$ ou pas, le nombre de racines réelles de ce polynôme. Dessiner le graphe de la fonction $t \mapsto \wp(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ et, si $\text{Ré}\, \tau \in \mathbf{Z}$, celui de $t \mapsto \wp(\frac{\tau}{2} + t)$. Vérifier vos résultats en contemplant les figures 2 et 3 où $\tau = 2i$ et où, comme on le voit sur la couverture de ce cours, la couleur représente l'argument de la fonction, rouge $\equiv 0 \mod 2\pi$, *etc.*

***Exercice VI.11* (Une application du théorème des résidus).** Soit f une fonction entière dont tous les zéros $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ sont simples. On les range de façon que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_k| \leq \cdots$$

et on suppose que

$$\lim_{k \to \infty} |a_k| = +\infty.$$

(1) Montrer que $g = f'/f$ a un pôle simple avec résidu 1 en chacun des a_k (et n'a pas d'autre pôle).

---

(5) On est prié de faire une figure dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

(2) On suppose qu'il existe une suite de nombres positifs R_m tendant vers $+\infty$ telle que le cercle C_m de centre 0 et de rayon R_m ne passe pas aucun des points a_k et telle que $|g|$ est bornée sur C_m par une constante indépendante de m. Soit $u \in \mathbf{C}$, $u \neq a_k$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_m} \frac{g(z)}{z-u}\,dz = \begin{cases} g(u) + \sum_{|a_k|<R_m} \dfrac{1}{a_k - u} & \text{d'une part} \\ g(0) + \sum_{|a_k|<R_m} \dfrac{1}{a_k} + \dfrac{u}{2i\pi}\displaystyle\int_{C_m} \frac{g(z)}{z(z-u)}\,dz & \text{de l'autre} \end{cases}$$

(en supposant g analytique au voisinage de 0). En déduire que

$$g(u) = g(0) + \sum_{k\in\mathbf{N}} \left(\frac{1}{u-a_k} + \frac{1}{a_k}\right).$$

(3) Montrer que

$$f(u) = f(0)\exp\left(z\frac{f'(0)}{f(0)}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{u}{a_k}\right)e^{u/a_k}\right).$$

(4) Montrer que

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{z/n\pi}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-z/n\pi}\right\}.$$

***Exercice VI.12* (La fonction Γ).** Pour chaque entier n, on considère la fonction holomorphe g_n définie par

$$g_n(z) = z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)n^{-z}.$$

On pose

$$f_n(z) = \frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)}.$$

Soit log la détermination principale du logarithme.

(1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\log f_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$.
(2) En déduire que la suite de fonctions g_n converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers une fonction holomorphe $g(z)$.
(3) La fonction Γ est définie par $\Gamma(z) = \dfrac{1}{g(z)}$. Montrer qu'elle est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Déterminer ses pôles et leur ordre.
(4) Montrer que

$$\begin{cases}\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ \Gamma(1) = 1\end{cases}$$

et calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

***Exercice VI.13* (La fonction Γ (suite)).** On rappelle que la suite $(1+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n)$ converge vers une limite finie, la *constante d'Euler*, notée γ. Montrer que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{z/n}.$$

En déduire que

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}, \text{ puis que } \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

***Exercice VI.14* (La fonction Γ (suite)).** Montrer que, pour $\text{Ré}\, z > 0$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

***Exercice VI.15* (La fonction Γ (suite)).** Montrer la relation fonctionnelle

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z).$$

On pourra considérer la fonction

$$F(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} - 2\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}$$

et montrer qu'elle est constante.

***Exercice VI.16*.** On cherche à déterminer toutes les fonctions holomorphes g sur $\mathbf{C}$ ayant $-\mathbf{N}$ comme ensemble de zéros simples, vérifiant $g(1) = 1$ et telles que

$$\sqrt{\pi} g(z) g\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{2z-1} g(2z).$$

Soient g_1 et g_2 deux telles fonctions. Montrer que le rapport $h = g_1/g_2$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et vérifie

$$h(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad h(z)h\left(z+\frac{1}{2}\right) = h(2z).$$

Montrer que h ne s'annule pas. En déduire qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbf{C}$ telle que

$$h = e^f \qquad \text{et} \qquad f(1) = 0.$$

En déduire les relations fonctionnelles vérifiées par f, puis par f'. Montrer que f' est constante, en déduire f, h et résoudre le problème.

***Exercice VI.17* (La fonction ϑ (suite)).** On utilise les notations de l'exercice VI.4. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n\geq 1} \left(\left(1-q^{2n-1}e^{2i\pi u}\right)\left(1-q^{2n-1}e^{-2i\pi u}\right)\right)$$

définit une fonction $f(u)$ holomorphe dans le plan de la variable complexe u. Quels sont les zéros de f ? Montrer que f/ϑ est doublement périodique et entière. En déduire que

$$f(u) = c \cdot \vartheta(u)$$

où c est une constante.

***Exercice VI.18* (Un théorème de Weierstrass).** Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. On se demande s'il existe une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ dont les zéros sont les λ_k.

(1) On suppose la suite (λ_k) bornée. Le problème a-t-il une solution ?
(2) Pensez-vous que la formule $\prod(z-\lambda_k)$ donne une solution ?
(3) On suppose maintenant que

$$\lim_{k\to+\infty} |\lambda_k| = +\infty$$

et que tous les λ_k sont différents de 0. Pour tout $k \geq 1$, on considère la fonction E_k définie par

$$E_k(z) = \exp\left[\frac{z}{\lambda_k} + \frac{z^2}{2\lambda_k^2} + \cdots + \frac{z^k}{k\lambda_k^k}\right].$$

Supposons que z vérifie $|z| \leq R$. Montrer que, si k est assez grand, on a $|\lambda_k| > 2|z|$ et, en appelant log la détermination principale du logarithme, que la fonction

$$\log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)\right]$$

est bien définie. Montrer la majoration

$$\left|\log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)\right]\right| \leq \left|\frac{z}{\lambda_k}\right|^k.$$

En déduire que la série

$$\sum \log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)\right]$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}$. Que peut-on dire du produit infini

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)E_k(z)?$$

Résoudre le problème pour une suite générale (λ_k) tendant en module vers l'infini (et dont peut-être certains termes sont nuls).

(4) On a construit une fonction entière[6] f avec un zéro en chaque λ_k. Pensez-vous que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$? méromorphe sur $\widehat{\mathbf{C}}$?

Exercice VI.19. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 et telle que, pour tout n tel que $1/n \in U$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}.$$

[6] Cette démonstration vient du livre de Rudin [Rud75].

NOTICES BIOGRAPHIQUES

La plupart de ces notices biographiques sont extraites de l'*Encyclopædia Universalis* dont je remercie les auteurs pour leur contribution à ces notes... Je n'ai aucune responsabilité dans le style grandiloquent de certaines d'entre elles (« Gauss nous apparaît comme le flambeau qui a montré la route à de nombreuses générations de mathématiciens et illuminé l'avenir comme nul autre ne l'a fait » — une belle métaphore filée, mais, chacun son style !). Dans le genre hagiographique, on pourra aussi consulter [**Rem91**], dont on lira avec profit l'introduction et les nombreuses remarques historiques, et dans lequel j'ai puisé et copié certains renseignements utiles.

Niels Henrik Abel, 1802-1829

À l'aube du XIXe siècle, le mathématicien norvégien N. H. Abel allait révolutionner sa science, et Hermite a pu déclarer : « Il a laissé aux mathématiciens de quoi s'occuper pendant cinq cents ans. » D'abord algébriste, il établit l'impossibilité de résolution par radicaux des équations algébriques de degré ≥ 5 et sa méthode ouvrait la voie aux travaux de Galois sur les groupes de substitution des racines d'une équation. En analyse, il est le fondateur, avec Jacobi, de la théorie des fonctions elliptiques, et son nom figure, aux côtés de ceux de Gauss et de Cauchy, parmi les législateurs du calcul infinitésimal qui ont assis ce dernier sur des bases solides et rigoureuses(7). [Jean-Luc Verley]

Archimède, 287 av. notre ère-212 av. notre ère

Lorsque, en 212 avant notre ère, les troupes de Marcellus entrèrent par surprise dans Syracuse, le siège de la ville durait depuis trois ans. La supériorité technique de Syracuse en imposait, ce qui explique en partie la longueur du siège. Elle se concrétisait pour les Romains en un seul nom, celui de l'ingénieur prestigieux chargé depuis longtemps de la direction des travaux portuaires, navals et militaires : Archimède.

On comprend les consignes sévères du consul, qui tenait à l'avoir vivant et respecté. Le concours d'un tel homme eût été un secours précieux dans la lutte contre Hannibal toujours menaçant. Mais un gros nigaud de village, encore tout apeuré, termina d'un coup d'épée la vie d'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. [René Taton]

(7) Il est aussi l'auteur de la toute première version du principe des zéros isolés. [MA]

Jakob Bernoulli, 1654-1705

Originaire d'Anvers, mais fixée à Bâle depuis la fin du XVIe siècle, l'illustre famille des Bernoulli a donné en moins de trois générations une pléiade de mathématiciens. Adeptes enthousiastes du calcul infinitésimal alors en pleine élaboration, les frères Jakob et Jean ont joué un rôle de premier plan(8) dans la clarification et la diffusion de ce nouveau calcul qui allait atteindre sa plus grande puissance entre les mains de leur élève L. Euler. Leur correspondance avec les plus grands mathématiciens de l'Europe constitue un extraordinaire panorama de l'activité scientifique à l'aube du XVIIIe siècle. Daniel Bernoulli, fils de Jean, est surtout célèbre pour avoir appliqué avec succès à la physique le calcul infinitésimal et le calcul des probabilités élaborés par son père et son oncle.

Friedrich Bessel, 1784-1846

Né à Minden en Westphalie, Bessel commença à travailler très jeune comme commis. Attiré par la navigation maritime, il s'intéressa aux observations nautiques, construisant lui-même son sextant et étudiant l'astronomie à ses heures de liberté. Il calcula la trajectoire de la comète de Halley, résultat qui fut immédiatement publié et lui permit d'obtenir, en 1806, un emploi d'assistant à l'observatoire de Lilienthal. En 1810, il devint directeur du nouvel observatoire de Königsberg, tout en poursuivant des études mathématiques. Il dut enseigner les mathématiques à ses étudiants en astronomie jusqu'en 1825 (date à laquelle Jacobi vint enseigner cette matière à Königsberg). Pour mieux connaître la position des étoiles, il classifia les observations que J. Bradley avait faites à Greenwich, calculant les positions de 3 222 étoiles et il établit en 1830 un système de classification. Toute sa vie fut consacrée à l'astronomie (il écrivit plus de 350 articles) et, peu avant sa mort, il commença l'étude du mouvement d'Uranus, problème qui devait aboutir à la découverte de Neptune.

En mathématiques, Bessel est connu pour avoir introduit les fonctions qui portent son nom, les utilisant pour la première fois, en 1817, lors de l'étude d'un problème de Kepler, et les employant plus complètement sept ans plus tard pour étudier les perturbations planétaires. [Jacques Meyer]

Bernard Bolzano, 1781-1848

Bernard Bolzano, né à Prague, est de langue et de culture allemandes. Après des études de théologie, de philosophie et de mathématiques, il est ordonné prêtre en 1805 et nommé professeur de science de la religion à l'université de sa ville natale. Son enseignement et sa prédication trouvent un profond écho parmi ses auditeurs. Ses remarques critiques sur l'organisation de la société apparaîtront comme menaçant l'ordre établi dans l'Empire d'Autriche ; en 1820, Bolzano sera destitué de ses fonctions de professeur. Le gouvernement lui interdira toute activité publique, y compris la publication de textes scientifiques, et le fera surveiller par la police. Bolzano passera une vingtaine d'années à l'écart de la vie scientifique et travaillera à ses grandes œuvres : *Wissenschaftslehre* (Théorie de la science), qui paraîtra en Allemagne en 1837, et *Grössenlehre* (Théorie de la grandeur). Pendant les dernières années de sa vie, il fera paraître des mémoires de physique et d'esthétique. Il laissera une très grande partie de son œuvre manuscrite, dont seules les *Paradoxien des Unendlichen* (Paradoxes de l'infini) seront

(8)Les nombres de Bernoulli sont apparus dans l'œuvre de Jakob Bernoulli via des sommes de puissances, dans des cas particuliers de la formule

$$1^k + 2^k \cdots + n^k = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \sum_{j=2}^{k} \frac{B_j}{j} C_{j-1}^k n^{k-j+1}.$$

[MA]

publiées dès 1851. Son utopie *Von dem besten Staate* (Du meilleur État) et sa *Functionenlehre* (Théorie des fonctions) ne verront le jour que dans les années 1930 ; la *Grössenlehre* et le très important journal mathématique *Miscellanea mathematica* sont actuellement en cours de publication.

Mathématicien, il innove dans plusieurs domaines ; mais bon nombre de ses découvertes restent trop longtemps inédites. Avec Gauss, Abel et Cauchy, il participe à la réforme de l'analyse dans le premier tiers du XIXe siècle. Il s'efforce de construire une première théorie des nombres réels et est, avec Weierstrass, l'un des créateurs de la théorie des fonctions réelles. Par sa doctrine des ensembles et ses recherches sur l'infini, il ouvre aux mathématiques un champ nouveau que sauront exploiter Cantor et Dedekind, mais il ne parvient pas à le constituer en une théorie cohérente.

En somme, Bolzano peut être considéré comme le premier mathématicien et logicien qui s'est consacré à la recherche des fondements au sens moderne du terme. [Jean Sebestik]

Émile Borel, 1871-1956

Né à Saint-Affrique (Aveyron), reçu à dix-huit ans premier à la fois à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure, Émile Borel opte pour cette dernière qui lui permettait mieux de se livrer à la recherche fondamentale. Il y rencontre le mathématicien Paul Appel, dont il épousera la fille. Les relations de Borel et de sa femme avec les milieux scientifiques et universitaires les amenaient à connaître et à fréquenter l'intelligentsia de l'époque : c'est ainsi qu'il déjeuna régulièrement, pendant plusieurs années, en tête à tête avec Paul Valéry, pour parler de mathématiques ; d'autre part, l'amitié de Borel avec le mathématicien Paul Painlevé, futur président du Conseil, contribua à l'orienter vers la politique.

Grand mathématicien, mais aussi homme politique et philosophe, Émile Borel laisse une œuvre scientifique très variée. Son talent s'exprime dans l'art d'ouvrir des voies nouvelles, d'y faire des premiers pas, assez importants pour attirer l'attention de nombreux chercheurs et les inciter à s'y engager à leur tour. Les recherches de Borel se sont déroulées successivement dans deux domaines différents : jusqu'à la Première Guerre mondiale, il s'intéresse surtout à la théorie des fonctions ; les problèmes scientifiques posés par la guerre l'amenèrent, pendant la seconde partie de sa vie, à s'intéresser au calcul des probabilités et à la physique mathématique. Toutefois, le passage d'un domaine à l'autre a été graduel. [Maurice Fréchet]

Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857

Parisien de naissance, Augustin-Louis Cauchy est remarqué pour sa précocité par Lagrange et Laplace, amis de sa famille.

D'abord élève à l'École polytechnique, puis pendant quelques années ingénieur des Ponts et Chaussées, il se consacre entièrement aux mathématiques pures à partir de 1813. Professeur à l'École polytechnique et à la Sorbonne, membre de l'Académie des sciences depuis 1816, Cauchy, légitimiste convaincu, refusa de prêter serment à Louis-Philippe en 1830 et s'exila d'abord à Turin, où fut créée pour lui une chaire de physique mathématique ; il fut ensuite appelé pendant quelque temps à donner des leçons au duc de Bordeaux, prétendant légitimiste au trône, avant de regagner enfin Paris en 1838, où on lui permit, en le dispensant du serment, de reprendre sa chaire à l'École polytechnique ; il y enseigna jusqu'à sa mort. [Jean Dieudonné]

Felice Casorati, 1835-1890

Professeur à Padoue.

Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783

L'un des mathématiciens et physiciens les plus importants du XVIII^{e} siècle, d'Alembert fut aussi un philosophe marquant des Lumières. Dans les sciences aussi bien qu'en philosophie, il incorpora la tradition du rationalisme cartésien aux conceptions newtoniennes, ouvrant la voie du rationalisme scientifique moderne, du moins dans sa direction physico-mathématique. Il développa le calcul différentiel et intégral (calcul aux dérivées partielles), généralisa et étendit la mécanique newtonienne et ses applications (principe de d'Alembert, hydrodynamique, problème des trois corps) : son œuvre représente une étape décisive avant celles de Lagrange et de Laplace. Ses analyses épistémologiques originales constituent une véritable philosophie des sciences liée à une théorie de la connaissance tributaire de Locke et Condillac et annoncent, par leur modernité, bien des développements ultérieurs. Codirecteur avec Diderot de l'Encyclopédie, dont il rédigea beaucoup d'articles, ami de Voltaire, membre de nombreuses académies, il fut un des protagonistes les plus éminents de la lutte des Lumières contre l'absolutisme religieux et politique. [Michel Paty]

Charles Jean Gustave Nicolas baron de la Vallée Poussin, 1866-1962

Mathématicien belge, né à Louvain et mort à Bruxelles. Charles de La Vallée-Poussin[9] enseigna à l'université de Louvain de 1891 jusqu'à sa retraite. Il fut membre de l'Académie belge (1909), membre associé étranger de l'Académie des sciences (1945), membre honoraire de la London Mathematical Society (1952), président honoraire de l'Union mathématique internationale.

La Vallée-Poussin est surtout connu pour avoir, en 1896, en même temps que Jacques Hadamard mais indépendamment de lui, trouvé la première démonstration du théorème des nombres premiers, objet de recherches depuis près d'un siècle (Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre de nombres premiers inférieurs à une limite donnée, 1896). On lui doit également des travaux sur l'approximation des fonctions par des polynômes et par des fonctions trigonométriques (Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, 1919), sur les séries trigonométriques (test de convergence, théorème d'unicité, méthode de sommation) et sur la théorie du potentiel (Le Potentiel logarithmique, 1949).

La Vallée-Poussin est l'auteur d'un célèbre traité, Cours d'analyse, en deux volumes (1903 et 1906), qui fut suivi d'Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire (1916). [Jacques Meyer]

Leonhard Euler, 1707-1783

Avec Joseph-Louis Lagrange, son émule plus jeune, Leonhard Euler est l'un des deux géants mathématiques qui ont dominé la science du XVIII^{e} siècle. Ses travaux, d'une abondance inégalée, couvrent tout le champ des mathématiques, de la mécanique céleste et de la physique de son époque. Il a renouvelé l'articulation entre les secteurs mathématiques, fixé la plupart des notations du calcul infinitésimal que nous utilisons encore, développé la théorie des nombres de Fermat et systématisé la géométrie analytique de Descartes tout en l'étendant du plan à l'espace ; en mécanique et en élasticité, il a été le premier à pouvoir utiliser les développements contemporains de l'analyse (dont beaucoup lui

[9] Le « Poussin » de son nom vient d'une lointaine parenté par alliance avec le peintre Nicolas Poussin.

étaient dus) en les conjuguant avec les principes de la physique newtonienne sur des bases théoriques solides. [Christian Houzel et Jean Itard]

Leonardo Fibonacci, 1170 env.-env. 1250

Mathématicien italien, né et mort à Pise. Connu aussi sous le nom de Léonard de Pise, Leonardo Fibonacci fut éduqué en Afrique du Nord, où son père, marchand de la ville de Pise (l'un des plus grands centres commerciaux d'Italie, à l'époque, au même rang que Venise et Gênes), dirigeait une sorte de comptoir ; c'est ainsi qu'il eut l'occasion d'étudier les travaux algébriques d'al-Khuwarizmi. Par la suite, Fibonacci voyagea dans tout le monde méditerranéen, rencontrant de nombreux scientifiques et prenant connaissance des différents systèmes de calcul en usage chez les marchands de l'époque. De toutes les méthodes de calcul, il jugea celle des Arabes la plus avancée. Aussi, de retour à Pise, il publie en 1202 un ouvrage, *Liber abbaci*, où, le comparant au système romain, il expose le système de numération indo-arabe. Il est le premier grand mathématicien à l'adopter et à le vulgariser auprès des scientifiques. Son ouvrage contient également la plupart des résultats connus des Arabes en algèbre et en arithmétique (racines carrées, racines cubiques, équations du premier et du second degré). En 1220, il publie *Practica geometriae*, qui recense toutes les connaissances de l'époque en géométrie et en trigonométrie (écrits d'Euclide et des autres mathématiciens grecs, transmis par des manuscrits arabes ou traduits par des Italiens) ; en particulier, l'ouvrage contient la formule de Héron donnant l'aire du triangle en fonction des longueurs des trois côtés.

Mais Fibonacci ne se contenta pas de faire connaître les travaux des Anciens et d'être à l'origine de la renaissance des études mathématiques en Occident, il poursuivit aussi ses propres travaux. Sa réputation scientifique était telle que l'empereur Frédéric II s'arrêta à Pise pour le voir et lui poser des « colles » (cette sorte de compétition entre scientifiques devait se développer au XVI^{e} et au XVII^{e} siècle). La résolution de ces problèmes (les plus célèbres étant : trouver un nombre x tel que $x^2 + 5$ et $x^2 - 5$ soient tous deux des carrés ; résoudre l'équation du troisième degré $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$) ainsi que la résolution d'autres problèmes de même nature sont contenues dans *Liber quadratorum* (1225). Notons enfin que Fibonacci est à l'origine d'une suite récurrente qui porte son nom, suite dont les deux premiers termes sont 0 et 1 et dont le terme d'ordre $n + 1$ est égal à la somme des deux termes d'ordre n et $n - 1$ pour tout n supérieur ou égal à 2. [Jacques Meyer]

Joseph Fourier, 1768-1830

Issu d'un milieu pauvre d'Auxerre, Fourier demeure longtemps inconnu des milieux scientifiques parisiens. Lorsque, en 1789, il envoie à l'Académie un mémoire sur l'approximation des racines des équations polynomiales, la tourmente révolutionnaire voue à l'échec cette première tentative de faire connaître ses travaux. D'ailleurs, la Révolution faillit être très funeste à sa propre personne. Fourier s'éloigne de sa ville natale pour suivre les cours de l'École normale de l'an III. Il s'y fait remarquer de Monge, Laplace et Lagrange et, à la fondation de l'École polytechnique, il est nommé assistant de Lagrange ; il lui succédera en 1797. Ses recherches suivent la variété de ses enseignements : des équations numériques à la mécanique rationnelle. En 1798, il accompagne le corps expéditionnaire français en Egypte et manifeste un vif intérêt pour les monuments antiques et leur interprétation, pour le calcul des erreurs d'observations et pour la statistique. En août 1799, il devient administrateur civil de l'Egypte.

De retour en France en 1802, il est nommé par Napoléon préfet à Grenoble. Bon diplomate, Fourier réussit à harmoniser les différentes tendances politiques en présence. Mais le préfet consciencieux reste géomètre. En 1804, il prépare une publication de ses travaux sur les équations numériques qui ne paraîtra que plus tard. Peu après, il édifie sa théorie de la propagation de la chaleur et, en 1807, présente sur ce sujet un mémoire à l'Académie, mémoire que celle-ci couronnera en 1812. À la suite de son attitude ambiguë lors des événements de 1814-1815, il revient à Paris totalement démuni. Heureusement, nommé directeur du Bureau de la statistique du département de la Seine, il peut s'adonner plus librement à ses activités scientifiques. Ce n'est qu'alors qu'il commence à publier régulièrement : théorie de la chaleur, équations numériques, statistiques. En avril 1816, le roi refuse d'entériner son élection comme académicien libre. Il acceptera pourtant, le 21 mai 1817, d'entériner une nouvelle élection, nommant ainsi Fourier membre de la section de physique. Celui-ci fait alors partie de la communauté scientifique et, quelques mois après avoir publié son œuvre majeure, Théorie analytique de la chaleur, devient en 1822 secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Il meurt, le 16 mai 1830, laissant près de soixante publications dont une, inachevée, l'Analyse des équations déterminées.

C'est surtout grâce à la série et à l'intégrale qui portent son nom que le mathématicien français Joseph Fourier est connu du mathématicien et du physicien modernes ; mais il a aussi amélioré les techniques d'approximation des racines des équations polynomiales. En fait, ses intérêts furent des plus variés, allant de la physique expérimentale à l'égyptologie.

Jusqu'à l'âge de quarante-sept ans, il partage son temps entre de lourdes tâches administratives et son amour des sciences exactes. Il enseigne quelques années à l'École polytechnique, puis, vers la fin de sa vie, est secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Son influence est alors grande sur une génération de jeunes mathématiciens, tels Charles Sturm, Ostrogradski, Lejeune-Dirichlet et Liouville. [Louis Charbonneau]

Carl Friedrich Gauß, 1777-1855

L'œuvre du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (né à Brunswick, mort à Göttingen) est un monument d'une ampleur et d'une richesse sans égale : non seulement il y a Gauss mathématicien, mais il y a aussi le calculateur, le géodésien, l'astronome, et il ne faut pas oublier qu'il a pratiquement consacré les vingt dernières années de sa vie à l'étude du magnétisme.

Du vivant de Gauss déjà, son génie inspirait à ses contemporains une vénération un peu craintive, et nul n'aurait osé lui contester le titre de *princeps mathematicorum*[10] dont on le désignait communément. Il faut préciser que non seulement les découvertes de Gauss le mettent hors de pair, mais que leur position dans l'histoire des mathématiques est absolument unique. On peut dire sans exagération qu'il a, à lui seul, incarné toute la mathématique pendant un tiers de siècle, car, de tout ce qui s'est publié de 1797 à 1827 environ, il est peu de travaux qui ne lui soient dus ou qu'il n'ait anticipés et parfois (comme par exemple dans ses théorèmes sur la fonction modulaire) c'est presque de trois quarts de siècle qu'il a devancé son temps. Placé comme à point nommé à la jonction de deux grandes époques de la science, Gauss nous apparaît comme le flambeau qui a montré la route à de nombreuses générations de mathématiciens et illuminé l'avenir comme nul autre ne l'a fait. [Pierre Costabel et Jean Dieudonné]

[10] Ce qui veut évidemment dire « prince des mathématiciens ». [MA]

Jacques Hadamard, 1865-1963

Le mathématicien Jacques Hadamard (né à Versailles, mort à Paris) a eu une grande influence sur l'école française de mathématiques au début du siècle. S'il reste l'héritier de la grande tradition des analystes du XIXe siècle dans ses travaux sur les fonctions analytiques, dont il tire de belles conséquences arithmétiques[11], il apparaît aussi comme un précurseur dans la théorie des équations aux dérivées partielles, dont il est un des fondateurs sous sa forme moderne. [Jean-Luc Verley]

Camille Jordan, 1838-1921

Camille Jordan est né à Lyon, d'une famille aisée : son grand-père était l'homme politique royaliste dont il porte le prénom, son père était polytechnicien et sa mère était la sœur du peintre Puvis de Chavannes. En 1855, à dix-sept ans, il est reçu premier à l'École polytechnique et sort de l'École des mines en 1861 ; il sera, du moins en titre, ingénieur chargé de la surveillance des carrières de Paris jusqu'en 1885, ce qui n'empêchera pas une intense activité de recherche mathématique. Nommé examinateur à l'École polytechnique en 1873, puis professeur en 1876, il entre à l'Académie des sciences en 1881 puis succède à Joseph Liouville au Collège de France deux années plus tard. De 1885 à 1921, il assume la direction du Journal de mathématiques pures et appliquées fondé par Liouville.

Il fut le spécialiste indiscuté de la théorie des groupes pendant toute la fin du XIXeăsiècle et on lui doit de très nombreux résultats, tant sur les groupes finis que sur les groupes dits classiques, dont il fut le premier à mesurer toute l'importance. Ses cours d'analyse contribuèrent au développement de la théorie des fonctions de variable réelle. [Jean-Luc Verley]

Sofia Kowalevskaya, 1850-1891

La mathématicienne russe Sofia Kowalevskaya est la première femme a avoir obtenu un doctorat de mathématiques (avec Weierstrass), la première femme à avoir été professeur d'université (à Stockholm), aussi une révolutionnaire, une romancière, une personnalité exceptionnelle, auteur d'une étude sur les anneaux de Saturne, d'un théorème sur les équations aux dérivées partielles démontré indépendamment par Cauchy (et qui s'appelle le théorème de Cauchy-Kowalevskaya) et surtout d'un remarquable travail sur le mouvement du solide. Dans celui-ci, elle a mis notamment en évidence un cas où le mouvement dudit solide est intégrable (au sens de Liouville) et que l'on appelle la toupie de Kowalevskaya. Elle est morte d'une pneumonie à quarante-et-un ans.

Pierre Simon de Laplace, 1749-1827

Fils d'un cultivateur, auquel l'étude fut ouverte, Laplace dut à des talents remarquables en mathématiques de s'imposer au monde savant dès les dernières années de l'Ancien Régime. Mais c'est à travers la Révolution, l'Empire et la Restauration, qui le fit pair et marquis, que se réalisa son ascension et qu'il finit par exercer sur le milieu scientifique français une autorité considérable et parfois pesante. On a pu lui reprocher le goût de la politique et l'habileté à composer pour profiter des changements de régime, mais il était de ces maîtres à penser qu'un gouvernement a toujours intérêt à se concilier, et son œuvre scientifique, d'une valeur et d'une ampleur exceptionnelles, avait une importance sociale.

[11] Le théorème des nombres premiers, pas moins... [MA].

Cette œuvre est essentiellement constituée par les applications de l'analyse mathématique dans deux directions principales : la mécanique céleste et la théorie des probabilités. Reprenant en un seul corps de doctrine tous les travaux effectués depuis Newton sur les conséquences de la gravitation universelle, Laplace s'est illustré dans l'étude des anomalies des mouvements de la Lune et des planètes et a assuré à son Exposition du système du monde la base positive qui justifie la célébrité de cet ouvrage. Il ne s'agit pas d'une simple remise à jour du vieux projet cosmologique, mais d'une élaboration de grande technicité qui est restée typique d'une science nouvelle. De même, les travaux de Laplace concernant les lois que la statistique est susceptible de révéler dans la mouvance de l'aléatoire, notamment à propos de la mortalité, ont ouvert des voies jusque-là inconnues. Ils ont permis de dépasser les discussions de principe où s'enlisait la notion de probabilité.

Mais on doit encore à Laplace des tentatives marquantes pour faire émerger de la formulation mathématique des éléments significatifs pour la physique, par exemple le rapport des chaleurs spécifiques des gaz (à volume constant et à pression constante) à propos de la vitesse du son ou les tensions susceptibles de rendre compte des phénomènes capillaires. Si les résultats de ces tentatives n'ont pas toujours été très heureux, la méthode qui les inspirait était appelée à un brillant avenir.

On a dit de ce fils du peuple, devenu membre de l'aristocratie, qu'il fut l'un des plus grands « géomètres » du début du XIXe siècle. Le terme, même bien entendu, n'exprime pas l'essentiel. Laplace, excellent mathématicien, est l'un de ceux qui ont fondé la physique mathématique de la manière la plus exemplaire. [Pierre Costabel]

Pierre Laurent, 1813-1854

Polytechnicien, officier pendant la conquête de l'Algérie, ingénieur de l'armée, il a aussi participé à la construction du port du Havre. Les séries de Laurent apparaissent dans un mémoire sur le calcul des variations publié à titre posthume.

Henri Lebesgue, 1875-1941

Le mathématicien Henri Lebesgue est l'un des fondateurs de l'analyse moderne. Presque tous ses travaux se rattachent à la théorie des fonctions de variables réelles. Sa conception de l'intégration et de la mesure renouvelle l'étude des problèmes classiques et ouvre les voies de l'analyse fonctionnelle moderne.

Associant la hardiesse du novateur à la conscience de l'évolution de la mathématique, Lebesgue eut une vue lucide de la place de son œuvre dans cette histoire des sciences dont l'étude fut pour lui occasion de mieux comprendre la nature des questions et source d'inspiration. [Lucienne Félix]

Joseph Liouville, 1809-1882

Joseph Liouville fut un bon artisan[12] des mathématiques, déployant une activité considérable dans l'enseignement et la diffusion des idées mathématiques de son temps ; il est le fondateur du Journal de

[12] Un qualificatif qui, dans la grande tradition française de méchanceté brillante, en dit plus long sur son auteur que sur l'objet d'un tel mépris. Liouville a été un spécialiste de théorie des nombres (il est le premier à avoir construit des nombres transcendants), de géométrie différentielle et de mécanique rationnelle, il est, entre autres (avec notamment Kowalevskaya), un des inventeurs de la théorie des systèmes intégrables, il a joué un rôle important dans le développement des fonctions elliptiques (comme la fonction $\wp$). Quant à son activité considérable dans l'enseignement, ne pas croire qu'il a été instituteur ou professeur dans le secondaire, il était quand même professeur au Collège de France. [MA]

mathématiques pures et appliquées appelé traditionnellement « Journal de Liouville ». Ses principaux travaux portent sur l'analyse et on lui doit un important théorème sur l'approximation des irrationnels algébriques. [Michel Hervé]

Gösta Mittag-Leffler, 1846-1927

Mathématicien suédois, né à Stockholm, dont les travaux portent principalement sur la théorie des équations linéaires homogènes et sur la théorie des fonctions analytiques. On lui doit notamment le célèbre théorème (qui porte son nom) sur la représentation des fonctions méromorphes par des séries de fractions rationnelles.

À la fois savant et diplomate[13], Gösta Mittag-Leffler fut conseiller de la cour et du gouvernement suédois. En 1882, il créa son journal, les *Acta mathematica*, de caractère tout à fait international, dont le premier volume contient le célèbre mémoire de Henri Poincaré sur la théorie des groupes fuchsiens.

À l'occasion de son soixante-dixième anniversaire, Mittag-Leffler fonda, par testament, l'institut Mittag-Leffler. D'après les statuts de la fondation, constituée en 1919, le but de cet institut est de maintenir et développer l'enseignement des mathématiques pures au Danemark, en Finlande, en Norvège et, particulièrement, en Suède. Gösta Mittag-Leffler est mort à Djursholm le 7 juillet 1927. [Jean-Luc Verley]

Giacinto Morera, 1856-1909

Professeur de mécanique analytique à Gênes, puis à Turin.

Émile Picard, 1856-1941

Le mathématicien français Charles Émile Picard fut un analyste profond et inspiré, un travailleur infatigable et un professeur captivant. Trois guerres le frappèrent durement, mais sa carrière ne compta que des succès rapides : agrégé et docteur la même année, à vingt et un ans ; professeur à la Sorbonne à vingt-cinq ans, membre de l'Académie des sciences à trente-trois ans ; secrétaire perpétuel de cette académie pendant près d'un quart de siècle, il connut encore, en 1924, l'honneur de représenter la science à l'Académie française.

Le plus célèbre théorème de Picard figure dans une note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences, datée du 19 mai 1879, sous sa forme primitive, et dans les Annales de l'École normale supérieure de 1880 sous la forme suivante : Si z_0 est point singulier essentiel isolé de la fonction f, celle-ci, dans un voisinage de z_0, ne peut omettre que deux valeurs au plus. La beauté du résultat, le meilleur possible comme le montre l'exemple simple $f\text{ă}(z) = \text{ă}\tanh \text{ă}z$, $z_0 = \infty$, est encore rehaussée par une démonstration savante et merveilleusement habile, où le but est atteint alors qu'il semble lointain. Aucun théorème sans doute ne fut plus stimulant pour la théorie des fonctions.

L'œuvre de Picard n'est dépassée en importance que par celle de son génial contemporain Henri Poincaré : la liste de ses publications dans les périodiques scientifiques compte plus de trois cents titres ; les résultats qu'il obtint lui-même et les recherches qu'il suscita sont également remarquables. [Michel Hervé]

[13] Il connaissait « tout le monde » en Europe, il a travaillé avec Weierstrass et créé l'école mathématique suédoise, il a fait instituer des prix pour les mathématiciens par le roi de Suède, il a réussi à faire nomméer Kowalevskaya (une femme !) à un poste à Stockholm, il est à l'origine de la création des congrès internationaux des mathématiciens, il a fondé un journal qui est toujours l'un des meilleurs au monde, un institut qui porte son nom... [note de MA].

Henri Poincaré, 1854-1912

Considéré comme le plus grand[14] mathématicien de son temps, Henri Poincaré est l'un des derniers représentants de cette science à en avoir eu une totale maîtrise dans l'ensemble des domaines, y compris dans ses applications en astronomie et en physique. Il y a apporté des contributions essentielles, ouvrant plusieurs champs nouveaux, insoupçonnés jusqu'alors, à partir de problèmes qu'il choisissait parce qu'ils s'imposaient à son esprit dans leur nécessité, et élaborant lui-même, dans une créativité exceptionnelle, les outils mathématiques dont il avait besoin pour leur résolution. C'est avant tout en mathématiques pures qu'il a donné la pleine mesure de son génie, renouvelant la théorie des équations différentielles et des fonctions avec la découverte des fonctions fuchsiennes[15]. Son œuvre en mécanique céleste, où il appliqua et développa ses résultats de la théorie des équations différentielles, a marqué une étape importante de cette discipline, apportant un nouveau jour sur le problème de la stabilité du système solaire, tout en ouvrant des perspectives de longue portée sur la théorie des systèmes dynamiques, qui sont à l'origine de nombreux travaux contemporains.

Ses études sur la physique mathématique embrassent la mécanique des solides et des fluides, la thermodynamique, l'optique et l'électromagnétisme. Ses travaux dans ces deux derniers domaines culminent avec son étude de 1905 « Sur la dynamique de l'électron », où il formule, en même temps qu'Einstein, la pleine prise en compte du principe de relativité pour l'électromagnétisme et développe une théorie relativiste (au sens restreint) de la gravitation.

Poincaré exerça, par son enseignement et le rayonnement de sa pensée, une influence considérable sur de nombreuses générations de mathématiciens et de physiciens, en France comme au niveau international. Il est en outre l'auteur d'une œuvre originale en philosophie des sciences, qui a été d'une grande importance pour le développement des idées au XXeăsiècle. [Christian Houzel et Michel Paty]

Bernhardt Riemann, 1826-1866

Après la mort de Georg Friedrich Bernhard Riemann, son œuvre fut publiée en un seul volume, y compris les fragments posthumes, et cette brièveté ne tient pas seulement à la fin précoce du mathématicien : d'une part, ses démonstrations sont très intuitives, souvent incomplètes, sinon absentes ; d'autre part, il publiait, à de longs intervalles, des mémoires patiemment mûris. La nouveauté des notions et des méthodes qu'on y trouvait et l'intuition géniale qui les animait donnèrent aux mathématiques un élan encore perceptible[16] aujourd'hui.

Riemann, comme la plupart des mathématiciens de son époque, s'intéressait aussi, et de façon suivie, à la physique, et publia des mémoires sur de nombreux sujets : lois de répartition de l'électricité statique, contribution à l'électrodynamique, propagation d'ondes atmosphériques planes, mécanique de l'oreille, etc.

Né dans un village du royaume de Hanovre, Riemann fit ses études supérieures et sa courte carrière universitaire à Göttingen. Il passa en Italie la plus grande partie de ses quatre dernières années : à

[14] Ce n'est pas le seul dans cette liste, ce qui prouve, s'il en était besoin, qu'il n'existe pas de relation d'ordre total parmi les mathématiciens [note de MA].

[15] Le demi-plan qui porte son nom est lié à ces fonctions fuchsiennes, il est aussi le lieu dans lequel Poincaré a pu démontrer que le postulat des parallèles est indépendant des autres axiomes d'Euclide [note de MA].

[16] Pour ceux qui aiment le concret de l'élan en question, la conjecture de Riemann sur les zéros de la fonction zêta est un problème à un million de dollars. Plus sérieusement, il y a une foule de théorèmes qui attendent que cette conjecture soit démontrée pour exister pleinement... et une foule de mathématiciens qui démontrent, chaque année, la conjecture. Sans succès jusqu'à maintenant. [MA].

l'époque, c'était le seul soulagement à la maladie pulmonaire qui le minait ; c'est ainsi qu'il repose dans un petit cimetière proche du lac Majeur. [Michel Hervé]

Eugène Rouché, 1832-1910

Professeur au lycée Charlemagne puis au Conservatoire des Arts-et-Métiers.

Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843-1823

Mathématicien allemand, à Halle, Zürich, Göttingen puis le successeur de Weierstrass à Berlin. Le lemme de Schwarz présenté ici comme un exercice a beaucoup d'applications récentes en géométrie analytique complexe et en géométrie riemannienne.

Karl Weierstraß, 1815-1897

La longue vie de Weierstrass fut entièrement consacrée à l'analyse mathématique et peu de savants exercèrent sur leur science une influence aussi profonde(17), durable et bienfaisante. D'abord professeur à l'Institut militaire prussien, Weierstrass passera en 1856 à l'université de Berlin, où il donnera régulièrement deux cours par an, hiver et été, jusqu'en 1890. La rédaction de ces cours par quelques auditeurs permit de publier, de 1902 à 1927, des leçons sur la théorie des transcendantes abéliennes, sur la théorie des fonctions elliptiques, sur les applications de celles-ci, sur le calcul des variations. Beaucoup de ses découvertes ne connurent d'autre publication que ces leçons ou des cours polycopiés.

Le reste de son œuvre comprend une cinquantaine de mémoires et articles originaux, de communications à l'Académie de Berlin (où il fut élu en 1857), le tout échelonné sur un demi-siècle. L'ensemble frappe aujourd'hui par la clarté et la rigueur que Weierstrass apporte à des questions obscures et imprécises pour ses contemporains, et aussi par l'unité de pensée qui y règne. On peut cependant distinguer les travaux sur les fonctions d'une variable complexe, sur les fonctions de plusieurs variables complexes, sur les fonctions de variables réelles et sur le calcul des variations. [Michel Hervé]

(17)Parmi ses élèves, entre autres, Kowalevskaya et Schwarz.

INDEX

Abel (Niels Henrik), 5, 123, 125
absolue
  convergence, 2
adhérence, 1
al-Khuwarizmi, 127
algèbre, 7
analyticité
  des fonctions holomorphes, 33
  des polynômes, 7
  des séries entières, 11
analytique
  fonction, 7
  paysage, 37, 42, 102
  prolongement, 7–9, 17, 21, 36, 37
Appel (Paul), 125
Archimède, 15, 123
argument d'un nombre complexe, 15
automorphisme, 44
automorphismes
  de **C**, 78
  de la sphère de Riemann, 76
  du demi-plan de Poincaré, 81
  du disque, 45

Baire (René-Louis), 126
Bernoulli
  nombres de, 26, 116
Bernoulli (Daniel), 124
Bernoulli (Jakob), 26, 116, 124
Bernoulli (Jean), 124
Bessel (Friedrich), 26, 80, 124
biholomorphe
  application, 63
Bolzano (Bernard), 2, 125
Bopp (Nicole), vii
bord, 51
Borel (Émile), 1, 125
Bost (Jean-Benoît), vii, 111
Bradley (James), 124

Cantor (Georg), 125
Carayol (Henri), vii
Cartan (Henri), vii
Casorati (Felice), 77, 126
Cauchy (Augustin-Louis), 1, 27, 30, 33–35, 123, 125, 129
cercle de convergence, 5, 34
chemin, 47
Colonna (Jean-François), 37
compact, 1
compactifié d'Alexandrov, 72
composante connexe, 2
Condillac (Étienne Bonnot de), 126
conjecture de Riemann, 111, 132
connexe, 2
  composante, 2
constante d'Euler, 120
continuité
  uniforme, 2
convergence
  absolue, 2
  normale, 2, 72, 105
  uniforme, 2, 72
convergente
  série entière, 6
cos, 13, 15, 22
courbe
  elliptique, 104
couronne, 1, 67
cubique, 119

d'Alembert (Jean Le Rond), 1, 29, 36, 64, 87, 92, 126
de la Vallée Poussin (Charles), 111, 126
Dedekind (Richard), 125
demi-plan
  de Poincaré, 42, 45, 81, 132
dérivabilité
  au sens complexe, 29
  des fonctions analytiques, 9
  des séries entières, 9
dérivée, 9
Descartes (René), 127
détermination
  de la racime m-ième, 19, 24
  du logarithme, 16
  principale, 18
Diderot (Denis), 126
différentielle
  équation, 25, 26, 104, 117, 132
disque
  épointé, 67
  de convergence, 5
  fermé, 1
  ouvert, 1
Dodane (Olivier), vii

Einstein (Albert), 132
Elchinger (Olivier), i, 102
elliptique
  courbe, 104
  fonction, 118
entière
  fonction, 36
  série, 5
épointé
  disque, 67
équation
  de Bessel, 26

différentielle, 25, 26, 104, 117, 132
fonctionnelle, 12, 23, 121
hypergéométrique, 26
équations
de Cauchy-Riemann, 30
espace
complet, 1
essentielle
singularité, 71, 76
estimation standard, 50
étoilé
ouvert, 42, 56
étoile de Mittag-Lefler, 42
Euclide, 127, 132
Euler (Leonhard), 94, 99, 116, 120, 124, 127
exponentielle, 12, 14, 15, 23, 74, 97

fermé, 1
Fermat (Pierre de), 105, 127
Fibonacci (Leonardo), 42, 127
fonction
analytique, 7
dérivable, 29
de Bessel, 26, 80
elliptique, 118
entière, 36
Gamma, 95, 120, 121
harmonique, 41
holomorphe, 29
hypergéométrique, 26
méromorphe, 71, 72
$\wp$ de Weierstrass, i, 97, 102
ϑ, 117, 121
zêta de Riemann, viii, 23, 26, 97, 100, 110, 111, 116
forme, 41, 59
formelle
série, 21
formule
d'addition, 118
d'Hadamard, 20
de Cauchy, 34
Fourier (Joseph), 97, 98, 116, 117, 128

Galois (Évariste), 123
Gamma
fonction, 95, 120, 121
Gauss (Carl Friedrich), 1, 29, 36, 45, 64, 87, 92, 123, 125, 128
globale
propriété, 52

Héron, 127
Hadamard (Jacques), 20, 22, 44, 111, 126, 129
Halley (Edmund), 124
Hannibal, 123
harmonique
fonction, 41
Hermite (Charles), 123
holomorphe
en ∞, 74
fonction, 29
homographie, 76, 80, 81
homotopie, 54
Huyghe (Christine), viii
hypergéométrique
équation, 26
fonction, 26
hypothèse de Riemann, 111, 132

inégalités
de Cauchy, 35
infini
produit, 105
intérieur, 1

Jacobi (Carl), 123, 124
Jordan (Camille), 89, 129

Kahane (Jean-Pierre), 111
Kepler (Johannes), 124
Kowalevskaya (Sofia), 104, 129–131, 133

lacet, 47
Lagrange (Joseph Louis), 125–127
Landau (Edmund), 13
Lang (Serge), vii
Laplace (Pierre Siméon de), 112, 113, 115, 125–127, 130
Laurent (Pierre), 67, 70, 84, 130
Lebesgue (Henri), 1, 126, 130
Lejeune-Dirichlet (Peter Gustav), 128
lemme
d'Abel, 5
de Jordan, 89
de Schwarz, 44
Liouville (Joseph), vii, 29, 36, 74, 82, 99, 100, 128, 129, 131
locale
propriété, 7, 52
Locke (John), 126
logarithme
complexe, 15
népérien, 14

loi de groupe sur une cubique, 119
Louis-Philippe, 125

Marcellus, 123
Melleray (Julien), viii
méromorphe
en ∞, 74
fonction, 71, 72
Mittag-Leffler (Gösta), 42, 131
Monge (Gaspard), 127
Morera (Giacinto), 57, 131
Mortier (Arnaud), 39
Muller (Iris), vii

Napoléon, 128
Newton (Isaac), 130
nombres de Bernoulli, 26, 116
normale
convergence, 2

ordre d'une fonction elliptique, 118
Ostrogradsky, 128
ouvert, 1

Painlevé (Paul), 125
paysage analytique, 37, 42, 102
π, 12, 15
Picard (Émile), 78, 131
Poincaré (Henri), 42, 45, 81, 131, 132
point singulier, 34, 71
pôle, 71
simple, 71
Poussin (Nicolas), 126
principale
détermination, 18
principe
de réflexion de Schwarz, 63
des zéros isolés, 7, 9, 23
du maximum, 29, 37, 38
du prolongement analytique, 7, 8, 17, 21, 36, 37
produit infini, 97, 105
projection stéréographique, 73
prolongement analytique, 7–9, 17, 21, 36, 37
propriété
globale, 52
locale, 52
Puvis de Chavannes (Pierre), 129

rayon de convergence, 5
Remmert (Reinhold), vii
Rémy (Bretrand), viii
réseau, 100

résidu, 83
Riemann
  surface de, viii
Riemann (Bernhardt), viii, 23, 30, 71, 72, 126, 133
Rouché (Eugène), 87, 133
Rouvière (François), vii
Rudin (Walter), vii

Sabbah (Claude), vii
Schwarz (Karl Hermann Amandus), 44, 63, 133
série, 2
  de Fourier, 97, 98, 116, 117
  de Laurent, 67, 68
  entière, 5
  formelle, 21
Silverman (Richard), vii
simple
  pôle, 71
sin, 13, 15, 22
singularité, 71
  essentielle, 71, 76
singulier
  point, 34, 71
Skandalis (Georges), vii
sphère de Riemann, 72, 74
stéréographique
  projection, 73
standard
  estimation, 50
Sturm (Charles), 128
suite
  de Cauchy, 1, 27
  de Fibonacci, 42
surface de Riemann, viii

Tauvel (Patrice), vii
théorème
  d'homotopie, 52
  d'inversion locale, 3, 39
  de Bolzano-Weierstrass, 2
  de Borel-Lebesgue, 1
  de Casorati-Weierstrass, 77
  de Cauchy, 33
  de d'Alembert-Gauss, 1, 29, 36, 64, 87, 92
  de Fermat, 105
  de Gauss, 45
  de l'application ouverte, 38, 45, 82
  de la représentation conforme, 79
  de Laurent, 68, 70, 84
  de Liouville, vii, 29, 36, 74, 99, 100
  de Liouville (un autre), 82
  de Morera, 57, 102, 107
  de Picard, 78
  de Rouché, 87
  de Weierstrass, 122
  des nombres premiers, 97, 111, 114, 126, 129
  des résidus, 84, 87, 120
  des trois cercles d'Hadamard, 44
  des valeurs intermédiaires, 36
tore, 104
toupie, 104
  de Kowalevskaya, 129
transformée
  de Laplace, 112, 113, 115

uniforme
  continuité, 2
  convergence, 2

Valéry (Paul), 125
valuation, 83
Verley (Jean-Luc), vii

Weierstrass (Karl Theodor Wilhelm), i, 2, 72, 77, 97, 102, 122, 125, 129, 131, 133

zêta
  fonction, viii, 23, 26, 97, 100, 110, 111, 116

BIBLIOGRAPHIE

[Aud04] M. Audin – *Topologie : Revêtements et groupe fondamental*, ULP, Strasbourg, 2004, Cours de Magistère 2e année, disponible sur http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/courstopalg.pdf.

[Aud06] ———, *Géométrie*, Edp-Sciences, 2006, deuxième édition.

[Bos97] J.-B. Bost – *Fonctions analytiques d'une variable complexe*, École polytechnique, 1997.

[Car61] H. Cartan – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

[Kah96] J.-P. Kahane – « Une formule de Fourier sur les nombres premiers », *Gaz. Math.* **67** (1996), p. 3–9.

[Lan93] S. Lang – *Complex analysis*, Graduate Texts in Math., vol. 103, Springer-Verlag, 1993, Troisième édition.

[New80] D. J. Newman – « Simple analytic proof of the prime number theorem », *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), p. 693–696.

[Rem91] R. Remmert – *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991, Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics.

[Rey90] E. Reyssat – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progress in Math., vol. 77, Birkhäuser, 1990.

[Rou03] F. Rouvière – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 2003, Deuxième édition revue et augmentée.

[Rud75] W. Rudin – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.

[SB03] C. Sabbah & N. Berline – *La fonction zêta*, Journées X-UPS 2002, Éditions de l'école polytechnique, 2003.

[Sil72] R. Silverman – *Introductory complex analysis*, Dover, 1972.

[Ska01] G. Skandalis – *Topologie et analyse*, Dunod, Paris, 2001.

[Tau99] P. Tauvel – *Analyse complexe*, Dunod, Paris, 1999, Exercices corrigés.

[Ver19] J.-L. Verley – « Fonctions analytiques », *Encyclopædia Universalis* (19 ? ?).

[WW96] E. T. Whittaker & G. N. Watson – *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions ; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.