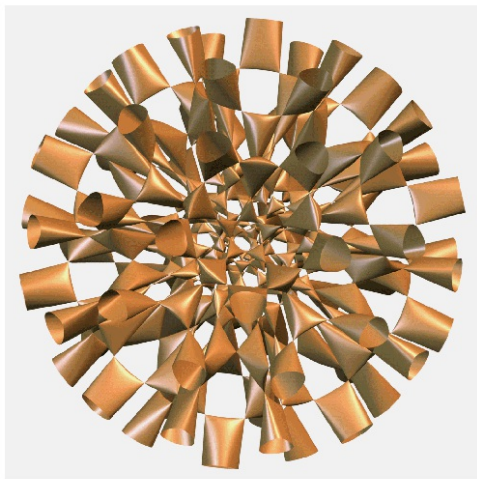


Complex reflection groups and K3 surfaces

(joint w. C. Bonnafe)



→ sy 12

Symmetries
de $I \times I$

Introduction

Nous sommes intéressés aux surfaces $K3$,
soit une généralisation des courbes elliptiques.

Def Surface $K3$ est surface compacte complexe X
t.f.

① $\pi_1(X) = \{1\}$. (sing. courbe)
(escalatoire).

② $\exists!$ 2-forme holomorphe globale ω_X

$$(H^0(X, \Omega_X^2) = \mathbb{C} \cdot \omega_X)$$

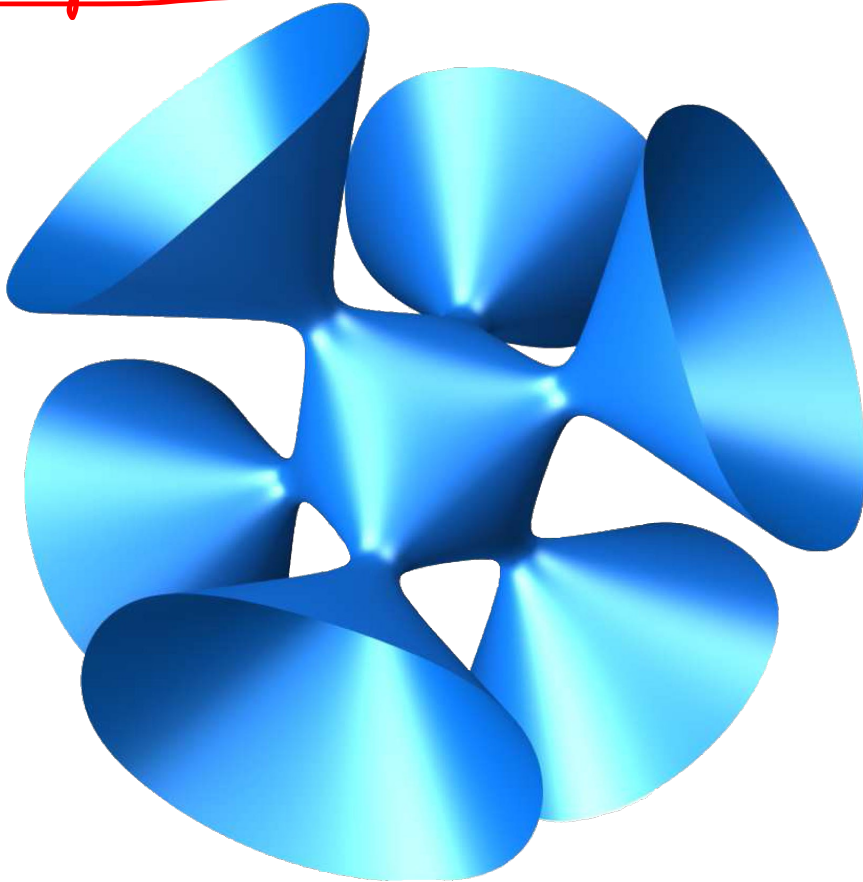
$\Rightarrow K_X \sim 0$
Exemple plus simple

← holomorphe de degré 4

$$\{ f_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

Ex $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$
FERNAT.

Surfco H^3 quartique



D'autres exemples

(1) K3 qui sont des plans doubles
 $X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{C}^6$ ramifié sur une
sextique l.s.e.

(2) intersections complètes :

$$(4) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

$$(2, 3) \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$$

↑
↑
pentagone cubique.

$$(2, 2, 2) \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$$

↑
3 pentagones

Bien de l'exposé :
Construction des surfaces
K3.

Motivation

Vient d'un travail avec W. Barth. en 2003

$$G \subset SO(4) \quad G \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$$

$G =$ groupe bipléochore : $G \cong T \times T, O \times O,$
 $\{\pm \text{id}\} \quad I \times I$

$T, O, I =$ groupes des rotations des axes
de Platon (Tétracède, Octaèdre, Icosaèdre)

Mais avons obtenu des pinces (= feu. 1. de lin).

de surfaces G -invariante : $\{X_G\}_2 \quad 2 \in \mathbb{P}_2$

Thm (Barth-S. 2003)

La résolution minimale $Y_{\lambda}^G \rightarrow X_{\lambda}^G / G$ est
une surface $K3$:

$$\rho(Y_{\lambda}^G) = \text{rk Pic}(Y_{\lambda}^G) \in \{19, 20\}$$

Cas intéressant

$$\frac{G}{\langle \pm \text{id} \rangle} = I \times I, \quad |G| = 7200$$

On le note G_{12}

$$\left\{ X_{\lambda}^{G_{12}} \right\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$$

Contient une surface avec 600
nœuds = $\text{sing } A_1 = \mathcal{P}$

645 = nombre max de sig A_1 pour sig de sig 12
sous IP_3 (Boue de Nijaka)

600 = meilleur exemple connu!

Beaucoup d'autres groupes : 2/3 G_{12} = sous-groupe

d'un groupe de réflexions complexes!

Def $W \subseteq GL_{\mathbb{C}}(V)$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$

$Ref(W) = \{ s \in W \mid \dim V^s = n-1 \}$

$V^s = \{ x \in V \mid s(x) = x \}$

W fini

Si $W = \langle Ref(W) \rangle$
on dit que W
est un
groupe de réflexions
complexes

Remarque On assume V irréductible
(la représentation $V \subset GL_{\mathbb{C}}(V)$ est irréductible)

Il existe une classification des groupes de réflexions complexes (Shepard-Todt, 1954).

\exists une famille finie de 34 groupes exceptionnels :

$$G_4, \dots, G_{37}$$

Bonafé : $G_{12} = G_{30}^{SL} = G_{30} \cap SL_{\mathbb{C}}$

$G_{30} = W(H_4) =$ groupe de Coxeter de type $H_4 =$ groupe d'isométries du DODÉCAÈDRE

DO DECAPLEX = poly topologie en 4 dimensions.
(600 Sommes)

Shephard-Todd / Chevalley / Serre :

$\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_m]$ $f_i =$ homogene de deg d_i
 $\dim V = n$
 \uparrow
 polynomes inv.
 par l'action de W

Pour G_{30} $\mathbb{C}[V]^{G_{30}} = \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$

$\dim V = 4$ $d_i = 2 \quad 12 \quad 20 \quad 30$

Prouver $\left\{ X_1^{G_{30}} \right\} \subset \mathbb{C}P^2$ est defini par $\left\{ f_1^6 + \lambda f_2 = 0 \right\}$

Q : Est-ce que on peut trouver d'autres
groupes de réflexion complexes qui
permettent de construire des surfaces K3 ?

REPONSE : Oui

Nous trouvons 7 groupes de réflexion complexes.
 W t.f. pour certains $\Gamma \subset W$ on a
 X/Γ est une surface K3 ($\Gamma \subset X$
 $X \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$)

6 Résultat principal

$W < GL_{\mathbb{C}}(V)$ groupe refl. sym., $W = \langle \text{Ref}(W) \rangle$
 $\dim V = 4$, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$, deg $f_i = d_i$.

Théorème 1 (Bonnafant - S. 2021)

Supposons :

- (a) $S \in \text{Ref}(W) = P \circ \sigma(S) = \mathcal{Q}$

- (b) $W \subset V$ irréductible

groupe div. o.

- (c) σ_i est "bien choisit"

- (d) $\Gamma = W^{SC} = W \cap SL_{\mathbb{C}}$ ou $\Gamma = W' = D(W)$

- (e) $Z(f_i) = \{x \in \mathbb{P}(V) \mid f_i(x) = 0\}$ et seulement des sing ADE

$$\Rightarrow \frac{Z(f_i)}{\Gamma}$$

est Surface K3 avec ADE.

Remarque

(2) : on n'a pu trouver ces exemples
ou $\sigma(s) \neq 2$!

plus importantes $\left[\begin{array}{l} (c) \\ + \\ (d) \end{array} \right]$ important pour le caractère trivial.
mais peut se trouver une \mathbb{K}^3

Au exemple du théorème 2

$$W = G_{30} \quad \Gamma = G_{30}^{\mathbb{Z}} = G_{30} \cap SL_4 \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}[V]^{G_{30}} = \mathbb{Z}[f_1, \textcircled{f_2}, f_3, f_4] \quad \deg = 2, \underline{12}, 20, 30$$

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}[V] \longrightarrow \mathbb{P}(2, 12, 20, 30) = \frac{\mathbb{P}[V]}{G_{30}}$$
$$P \longmapsto (f_2(P) : : f_4(P))$$

$f_2 \in \mathbb{C}[x, y]^n$, $\deg f_2 = 12$

$$\mathbb{Z}(f_2) \cong \mathbb{P}(d_2, d_3, d_4) = \mathbb{P}(2, 20, 30) =$$

$$G_{30} = \mathbb{W}$$

$$\Gamma = \mathbb{P}(1, 2, 3)$$

On peut $\mathbb{W}^{SL} = G_{30}^{SL} \subset \mathbb{W}^{SL} = G_{10}^{SL}$ avec indice 2

$$\frac{\mathbb{Z}(f_2)}{G_{30}^{SL}}$$

$$\xrightarrow{2:1} \frac{\mathbb{Z}(f_2)}{G_{30}} = \mathbb{P}(1, 2, 3)$$

$$\pi: \frac{Z(\mathbb{P}^2)}{S_2} \xrightarrow{2:1} (P^{1,2,3}).$$

p des nombres premiers

$$\frac{Z(\mathbb{P}^2)}{S_2} \text{ est une ADE}$$

on utilise le lemme suivant:

Lemme: X surface avec ADE $G \subset \mathbb{P}^2$ fini

$\frac{X}{G}$ lisse, $\Gamma < G$, $[G:\Gamma] = 2 \Rightarrow \frac{X}{\Gamma}$ est une surface ADE

Donc prête au lemme ou soit étudier ce qui se passe au-dessous des pts $020; 002$ ← LEHRER-SPRINGER