Variété de Nakajima associée à un Carquois.

I. Introduction et Notations.

Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t))$ un carquois que l'on suppose fini, sans cycle orienté. On choisit : $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$.

On associe à Q une matrice de Cartan $C = (C_{ij})$, définie par :

$$\begin{aligned} i \neq j,\ -c_{ij} = -c_{ji} = &\text{ nombre de flèches entre } i \text{ et } j \\ c_{ii} = 2 & \end{aligned}$$

Soit $\overline{Q_1}$ l'ensemble des flèches du graphe de Q obtenues en inversant les flèches de Q_1. Soit $\Omega = Q_1 \cup \overline{Q_1}$.

A chaque $a \in \Omega$, on associe $\overline{a} \in \Omega$ défini par :

$$s(\overline{a}) = t(a),\ s(a) = t(\overline{a})$$

Soit $R_Q(v)$ l'espace des représentations de Q de vecteur dimension v.

Etant donné $V = (V_i)_{i \in Q_0}$, de vecteur dimension v, on a :

$$R_Q(v) = \bigoplus_{a \in Q_1} Hom(V_{s(a)}, V_{t(a)}) = \bigoplus_{a \in Q_1} Hom(\mathbb{C}^{s(a)}, \mathbb{C}^{t(a)})$$

On définit de même :

$$\overline{R}_Q(v) = \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1} Hom(V_{s(a)}, V_{t(a)}) = \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1} Hom(\mathbb{C}^{s(a)}, \mathbb{C}^{t(a)})$$

$$\mathcal{R}_Q(v) = R_Q(v) \oplus \overline{R}_Q(v)$$

On pose, ensuite, pour $D \in \mathcal{R}_Q(d), V \in \mathcal{R}_Q(v)$:

$$L(d, v) = Hom(D, V) = \bigoplus_{i \in Q_0} Hom(\mathbb{C}^{d_i}, \mathbb{C}^{v_i})$$

On considère enfin le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M(d, v)$ défini par :

$$M(d, v) = \mathcal{R}_q(v) \oplus L(d, v) \oplus L(v, d)$$

On constate, alors, que :

$$\begin{aligned} \dim M(d, v) &= 2 \sum_{a \in Q_1} v_{s(a)}.v_{t(a)} + 2 \sum_{i \in Q_0} v_i d_i \\ &= {}^t v(2d + (2I - C)v) \end{aligned}$$

On va définir maintenant un produit dans $\mathcal{R}_Q(v)$, de la manière suivante :

Soit $V = (V_i)_{i \in Q_0}$, de vecteur dimension v ; on considère l'application de $\mathcal{R}_Q(v) \times \mathcal{R}_Q(v)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(V)$ qui, à un couple (B, B'), associe le "produit" $B.B'$ défini par :

$$\forall i \in Q_0, (B.B')_i = \sum_{a \in \Omega, t(a) = i} B_a \circ B'_{\overline{a}}$$

On notera, par ailleurs $Tr(f) = \sum_{i \in Q_0} Tr(f_i)$ la trace d'un élément $f \in \mathcal{L}(V)$.

Définition : *Soit $V = (V_i)_{i\in Q_0}$ de vecteur dimension v. Pour tout $i \in Q_0$, soit S_i un sous-espace de V_i, soit $S = (S_i)_{i\in Q_0}$ et $B \in \mathcal{R}_Q(v)$. On dit que S est B-invariant si :*

$$\forall a \in \Omega, B_a(S_{s(a)}) \subset S_{t(a)}$$

Par ailleurs, on définit une orientation ε sur Ω par :

$$\varepsilon(a) = 1, \forall a \in Q_1, \quad \varepsilon(a) = -1, \forall a \in \overline{Q}_1$$

Par définition, si $B \in \mathcal{R}_Q(v), \varepsilon B$ désignera l'élément de $\mathcal{R}_Q(v)$ défini par :

$$\forall a \in \Omega, (\varepsilon B)_a = \varepsilon(a) B_a$$

II. Forme symplectique sur $M(d, v)$ et première variété de Nakajima.

On considère l'espace vectoriel $M(d, v)$ défini précédemment. On définit sur cet espace une forme bilinéaire w par :

$$\forall (B, f, g), (B', f', g') \in M(d, v), w((B, f, g), (B', f', g')) = Tr((\varepsilon B).B' + f'g - fg')$$

Il est facile de voir que cette forme est non dégénérée. Elle est aussi alternée car :

$$\begin{aligned}
Tr((\varepsilon B).B') &= \sum_{i\in Q_0} Tr((\varepsilon B).B')_i \\
&= \sum_{i\in Q_0} \sum_{a\in\Omega, t(a)=i} \varepsilon(a) Tr(B_a.B'_{\overline{a}}) \\
&= \sum_{i\in Q_0} \sum_{a\in\Omega, t(a)=i} \varepsilon(a) Tr(B'_{\overline{a}}.B_a) \\
&= \sum_{i\in Q_0} \sum_{a\in\Omega, t(a)=i} \varepsilon(\overline{a}) Tr(B'_a.B_{\overline{a}}) \\
&= -\sum_{i\in Q_0} \sum_{a\in\Omega, t(a)=i} \varepsilon(a) Tr(B'_a.B_{\overline{a}}) \\
&= -Tr((\varepsilon B').B)
\end{aligned}$$

Le résultat s'en suit et, donc, w est une forme symplectiques sur $M(d, v)$.

On introduit maintenant le groupe $G = \prod_{i\in Q_0} GL(v_i)$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(V)$.

G agit sur $M(d, v)$ par :

$$\forall x = (x_i) \in G, \forall (B, f, g) \in M(d, v), x.(B, f, g) = (xBx^{-1}, xf, gx^{-1})$$

où :

xBx^{-1} est défini par : $\forall a \in \Omega, (xBx^{-1})_a = x_{t(a)} B_a x^{-1}_{s(a)}$.

xf et gx^{-1} sont définis par la composition usuelle.

Il est clair que w est une forme symplectique G-invariante.

En fait, on peut considérer les deux sous-espaces :

$$L_Q(d, v) = R_Q(v) \oplus L(d, v), \ \overline{L_Q}(d, v) = \overline{R_Q}(d, v) \oplus L(v, d)$$

On vérifie qu'il s'agit de deux sous-espaces Lagrangiens de $M(d, v)$, en dualité par rapport à la forme symplectique w. On a donc l'identification :

$$M(d, v) \simeq T^* L_Q(d, v)$$

La G-action hamiltonienne sur le G-espace symplectique $M(d,v)$ est alors donnée par l'application-moment $\mu_Q : M(d,v) \longrightarrow \mathfrak{g}$, définie par :

$$\mu_Q(B,f,g) = (\varepsilon B).B + i.j$$

Et on vérifie également facilement que μ_Q est une application G-équivariante.

On pose enfin :

$$\mathcal{F} = \mu_Q^{-1}(0) = \{(B,f,g) \in M(d,v) \ / \ (\varepsilon B).B + f.g = 0\}$$
$$\mathcal{M}_0(d,v) = \mathcal{F}//G$$

Soit $R(\mathcal{F})$ l'espace des fonctions lisses sur $\mathcal{F}$.

On rappelle que $\mathcal{F}//G$ est le quotient géométrique de $\mathcal{F}$ par le groupe réductif G, c'est-à-dire la variété algébrique affine définie par :

$$\mathcal{F}//G = Specmax(R(\mathcal{F})^G)$$

Cette variété est caractérisée par le fait que : $R(\mathcal{F})^G = R(\mathcal{F}//G)$.

Enfin, si l'on considère la projection canonique $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}//G$, on rappelle que $\forall x \in \mathcal{F}, \pi^{-1}(\pi(x))$ contient une et une seule orbite fermée, notée O_x. Plus précisément, on peut écrire : $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{p \in \mathcal{F}, O_x \subset \overline{G.p}\}$. On pourra donc identifier $\mathcal{M}_0(d,v)$ à l'ensemble des G-orbites fermées de $\mathcal{F}$.

Citons enfin un critère usuel permettant de décrire les fibres d'un tel quotient, dans le cas d'un groupe réductif.

Critère de Hilbert-Mumford :(voir [BR], Théorème 3.3) *Soit G un groupe réductif opérant dans une variété affine X. Soit $x \in X$ et O l'orbite fermée contenue dans l'adhérence de $G.x$. Alors, Il existe un sous-groupe à un paramètre λ de G tel que : $\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).x$ existe et appartient à O.*

La variété affine $\mathcal{M}_0(d,v)$ sera appelée "première variété de Nakajima" associée au carquois Q.

III. Elements semi-stables et seconde variété de Nakajima.

On introduit maintenant le caractère χ de G défini par :

$$\forall x = (x_i)_{i \in Q_0} \in G, \chi(x) = \prod_{i \in Q_0} \det x_i^{-1}$$

Soit $L = \mathcal{F} \times \mathbb{C}$, le fibré en droite trivial muni de l'action de G suivante :

$$\forall (B,f,g,z) \in L, \forall x \in G, x.(B,f,g,z) = (x.B.x^{-1}, x.f, g.x^{-1}, \chi(x)^{-1}z)$$

Définition : *Soit $v \in \mathcal{F}$. v est dit semi-stable si l'on a :*

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{G.(v,z)} \cap (\mathcal{F} \times \{0\}) = \emptyset$$

v sera dit stable si, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, l'orbite $G.(v,z)$ est fermée et de dimension $\dim G$.

On notera $\mathcal{F}^s$ l'ensemble des points semi-stables de $\mathcal{F}$ et on constate que cet ensemble est G-stable.

On définit ensuite une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}^s$ par :

$$\forall v, w \in \mathcal{F}^s, v \sim w \Longleftrightarrow \overline{G.v} \cap \overline{G.w} \neq \emptyset$$

(Il s'agit ici de l'adhérence dans $\mathcal{F}^s$.)

On pose :

$$\mathcal{M}(d,v) = \mathcal{F}^s / \sim$$

Remarque : Il existe une interprétation de cet espace en “théorie géométrique des invariants”, que l'on donnera ici à titre indicatif.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut considérer le fibré-produit L^n. Une "section invariante" de L^n est alors une fonction $\varphi : L \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\varphi(v,z) = f(v).z^n, v \in \mathcal{F}, z \in \mathbb{C}$ où f est un semi-invariant de poids χ^n de $R(\mathcal{F})$, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall x \in G, \forall v \in \mathcal{F}, f(x.v) = \chi(x)^n f(v)$$

On notera $R(\mathcal{F})^{\chi^n,G}$ l'ensemble des semi-invariants de poids χ^n.

Posons : $R^G = \bigoplus_{n\geq 0} R(\mathcal{F})^{\chi^n,G}$. R^G a une structure d'algèbre graduée et on peut donc définir la variété :

$$\widetilde{\mathcal{F}} = Proj(R^G)$$

On rappelle que, si R^+ désigne l'idéal-augmentation de R^G, on considère l'ensemble des idéaux premiers homogènes de R^G qui ne contiennent pas R^+. Cet ensemble est muni d'une structure de schéma. $Proj\, R^G$ sera alors la variété formée des points fermés de ce schéma.

La “théorie géométrique des invariants” (voir [SES], Proposition 9) permet d'interpréter les objets précédents de la manière suivante :

- Un élément semi-stable est un élément $v \in \mathcal{F}$ tel qu'il existe $f \in R(\mathcal{F})^{\chi^n,G}$ avec $n \geq 1$ et $f(x) \neq 0$. Cela est conséquence du fait que tout groupe réductif est géométriquement réductif.

- On a un isomorphisme de variétés de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur le quotient $\mathcal{F}^s / \sim$.

Notre but est maintenant de caractériser un peu plus précisément cette variété, que l'on appelle "seconde variété de Nakajima", associée au carquois Q et que l'on notera : $\mathcal{M}(d,v)$.

Proposition 1 : *Soit $(B,f,g) \in \mathcal{F}$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) (B,f,g) est semi-stable.

- (ii) Si $S \subset V$ est B-invariant et tel que : $S \subset \ker g$, alors : $S = 0$.

• Soit $\lambda : \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ un sous-groupe à un paramètre fixé, défini sur le groupe réductif G. On peut décomposer chaque espace $V_k, k \in Q_0$, en sous-espaces-poids sous l'action de λ, soit :

$$V_k = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_k^m$$

où : $\forall v \in V_k^m, \forall t \in \mathbb{C}^*, \lambda(t).v = t^m v$.

On notera p_m^k la projection canonique de V_k sur V_k^m et i_m^k l'injection canonique de V_k^m dans V_k.

Soit $B = (B_a)_{a\in\Omega} \in \mathcal{R}_Q(v)$. Pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ et tout $a \in \Omega$, on définit l'application $B_a^{m,n} : V_{s(a)}^n \longrightarrow V_{t(a)}^m$ par :

$$B_a^{m,n} = p_m^{t(a)} \circ B_a \circ i_n^{s(a)}$$

On écrira dorénavant la représentation B sous la forme : $B_a = (B_a^{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.

On vérifie ensuite que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, (\lambda(t).B)_a^{m,n}(v) = t^{m-n}.v, \forall v \in V_{s(a)}^n$$

Il s'en suit que :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).B \text{ existe } \iff B^{m,n} = 0, \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, m < n$$

Posons : $V^{(n)} = \bigoplus_{m \geq n} V^m$. De ce qui précède, on déduit que, si $\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).B$ existe, alors :$\forall n \in \mathbb{Z}, V^{(n)}$ est B-invariant.

Ainsi, tout sous-groupe à un paramètre λ, pour lequel $\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).B$ existe, détermine une filtration de V, $\{0\} \subset \cdots \subset V^{(n+1)} \subset V^{(n)} \subset \cdots \subset V$ de sous-espaces B-invariants telle que :

$$V^{(n)} = V, \forall n << 0, \; V^{(n)} = \{0\}, \forall n >> 0$$

De manière similaire, on considère $f \in Hom(D,V), g \in Hom(V,D)$ et on pose :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, f^m = p_m \circ f, g^m = g \circ i_m, f = (f^m)_{m \in \mathbb{Z}}, g = (g^m)_{m \in \mathbb{Z}}$$

On voit que :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).f \text{ existe } \iff f^m = 0, \forall m < 0$$
$$\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).g \text{ existe } \iff g^m = 0, \forall m > 0$$

• **Preuve de la proposition.**

On suppose, tout d'abord, que (B,f,g) n'est pas semi-stable, ce qui signifie que $\overline{G.(B,f,g,z)} \cap \mathcal{F} \times \{0\}$ est non vide, pour un $z \in \mathbb{C}^*$.

D'après le critère de Hilbert-Mumford, Il existe donc un sous-groupe à un paramètre λ tel que :$\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).(B,f,g,z) = (B_0, f_0, g_0, 0), (B_0, f_0, g_0) \in \mathcal{F}$. On peut associer à λ la filtration $V^{(n)}$, comme indiqué précedemment. Posons :

$$S = V^{(1)} = \bigoplus_{m > 0} V^m$$

On sait que S est B-invariant.

D'autre part, comme par hypothèse $\lim_{t \longrightarrow 0} g \circ \lambda(t)^{-1}$ existe, on déduit de ce qui précéde que :

$$S \subset \ker g$$

Supposons : $S = 0$, c'est-à-dire $V^m = 0, \forall m > 0$. Alors, $\chi^{-1}(\lambda(t)).z = t^p.z, p \leq 0$. Ceci implique que : $\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).z \neq 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc, $S \neq 0$. On a montré : $(ii) \Longrightarrow (i)$.

Réciproquement, supposons l'existence de $S \subset V$ tel que : $S \neq 0, S$ B-invariant et $S \subset \ker g$. Pour chaque $S_i, i \in Q_0$, on choisit un supplémentaire S_i' de S_i dans V_i et on définit $\lambda : \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ par :

$$\begin{aligned} \forall i \in Q_0, \lambda(t) &= t \text{ sur } S_i \\ &= 1 \text{ sur } S_i' \end{aligned}$$

On définit bien ainsi un sous-groupe à un paramètre de G.

On vérifie, tout d'abord, que : $\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).z = 0, \forall z \in \mathbb{C}^*$.

Soit $a \in \Omega, B_a : S_{s(a)} \oplus S'_{s(a)} \longrightarrow S_{t(a)} \oplus S'_{t(a)}$. On note respectivement i_a, i'_a, p_a, p'_a les applications canoniques de $S_{s(a)}$ (resp. $S'_{s(a)}$) dans $V_{s(a)}$ et de $V_{t(a)}$ dans $S_{t(a)}$ (resp. $S'_{t(a)}$). On voit que, compte-tenu des propriétés de S, on a :

$$B_a = p_a \circ B_a \circ i_a + p_a \circ B_a \circ i'_a + p'_a \circ B_a \circ i'_a$$

On constate enfin, en le vérifiant sur chaque composante de cette somme, que : $\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).B_a$ existe.

Il est clair, ensuite, que $\lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).f$ existe.

Enfin, $\forall v \in V, \lim_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).g(v) = \lim_{t \longrightarrow 0} g(\lambda(t)^{-1}.v) = g(v)$, car $S \subset \ker g$.

Ainsi, $\overline{G.(B,f,g,z)} \cap \mathcal{F} \times \{0\} \neq \emptyset$, ce qui montre bien que : $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Proposition 2 : *On suppose que $(B,f,g) \in \mathcal{F}^s$. Alors, on a :*

1) $G^{(B,f,g)} = \{1\}$.

2) La différentielle $d\mu_Q : M(d,v) \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ de μ en (B,f,g) est surjective; $\mathcal{F}^s$ est une sous-variété de dimension ${}^t v(2d + (I - C)d)$.

Preuve : Soit $x \in G^{(B,f,g)}$ et, pour tout $i \in Q_0$, soit $S_i = Im(x_i - Id_{V_i})$.

1) Soit $a \in \Omega, v = x_{s(a)}(w) - w \in S_{s(a)}, w \in V_{s(a)}$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} B_a(v) &= B_a x_{s(a)}(w) - B_a(w) \\ &= x_{t(a)} B_a(w) - B_a(w), \ \in S_{t(a)} \end{aligned}$$

D'où : S est B-invariant.

D'autre part, $g_i(x_i^{-1}(y)) = g_i(y)$ implique que : $g_i(v) = 0$, d'où : $S \subset \ker g$. De la proposition précédente, on déduit que : $S = 0$ et, donc, $x = 1$.

2) Soit $X = (B,f,g)$ et $d\mu_X : M(d,v) \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ la différentielle en X de μ_Q, donnée par la formule :

$$d\mu_X(B', f', g') = (\varepsilon B').B + (\varepsilon B).B' + f.g' + f'.g$$

Sur $\mathcal{L}(V)$, on a la forme bilinéaire $< >$ donnée par la trace. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ un élément de l'orthogonal de $Imd\mu_X$ pour $< >$. En écrivant que : $< d\mu_X(B', f', g'), u >= 0, \forall (B', f', g')$, on en déduit les égalités :

$$g.{}^t u = {}^t u.f = 0, \quad {}^t u.B = B.{}^t u$$

Soit $S = Im^t u$. De ce qui précède, on déduit que : S est B-invariant et $S \subset \ker g$. D'où : $S = 0$, ce qui démontre la surjectivité de $d\mu_X$.

On utilise ensuite le résultat suivant ([SP], th.4.3.6) : *Soit $\theta : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre deux variétés irréductibles. On suppose qu'il existe un point simple dont l'image par θ est simple et tel que la différentielle de θ en ce point soit surjective. Alors, θ est dominant.*

On déduit de ceci l'égalité :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{F}^s &= \dim M(d,v) - \dim \mathcal{L}(V) \\ &= {}^t v(2d + (2I - C)v) - {}^t vv \\ &= {}^t v(2d + (I - C)v) \end{aligned}$$

Corollaire 3 : *Toute G-orbite de $\mathcal{F}^s$ est fermée dans $\mathcal{F}^s$. En conséquence, on a :*

$$\mathcal{M}(d,v) \simeq \mathcal{F}^s / G$$

c'est une variété non singulière de dimension ${}^t v(2d - Cv)$.

Preuve : Soit (B, f, g) un élément semi-stable. De ce qui précède, on déduit que :

$$\dim G.(B, f, g) = \dim G$$

Ceci implique qu'une G-orbite quelconque dans $\mathcal{F}^s$ ne peut pas être contenue dans l'adhérence d'une autre orbite. Ceci veut dire que : $(B, f, g) \sim (B', f', g')$ si et seulement si (B, f, g) et (B', f', g') sont dans la même G-orbite. De plus, Comme toute adhérence d'orbite contient une orbite fermée, le résultat s'en déduit immédiatement.

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(d, v) &= \dim \mathcal{F}^s - \dim G \\ &= {}^t v(2d + (I - C)v) - {}^t vv \\ &= {}^t v(2d - Cv) \end{aligned}$$

Remarques :

- On constate que, dans ce cas, les notions de semi-stabilité et de stabilité coincident.

- Un procédé de réduction symplectique dû à Weinstein et Marsden permet de construire, à partir de w, une structure symplectique sur la variété-quotient $\mathcal{M}(d, v)$.

Soit $G.(B, f, g)$ un élément de $\mathcal{M}(d, v)$ et $\overline{G.(B, f, g)}$ l'adhérence de l'orbite correspondante dans $\mathcal{F}$. Cette adhérence contient une et une seule orbite fermée dans $\mathcal{M}_0(d, v)$, que nous notons : $G.(B_F, f_F, g_F)$.

On en déduit une application $\Pi_{d,v} : \mathcal{M}(d, v) \longrightarrow \mathcal{M}_0(d, v)$, définie par :

$$\Pi_{d,v}(G.(B, f, g)) = G.(B_F, f_F, g_F)$$

On peut déterminer l'élément (B_F, f_F, g_F) en fonction de (B, f, g). Pour cela, on reprend les notations de la démonstration de la proposition 1. On sait que, d'après le critère de Hilbert-Mumford, on a : $(B_F, f_F, g_F) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \lambda(t).(B, f, g)$, pour un certain sous-groupe à un paramètre λ de G. Comme cette limite existe, on en déduit que : $B = (B^{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}^2}, B^{m,n} = 0, \forall (m, n), m < n$ et, si $m \geq n$, $\forall v \in V^n_{s(a)}, B^{m,n}_a(v) = t^{m-n}.v$. Il s'en suit que :

$$B^{m,n}_F = 0, \forall (m, n), m \neq n,\ B^{m,m}_F = B^{m,m}$$

Selon des arguments totalement analogues, on obtient :

$$f^m_F = 0, \forall m \neq 0,\ f^0_F = f^0$$
$$g^m_F = 0, \forall m \neq 0,\ g^0_F = g^0$$

Il en découle, en particulier, des propriétés relatives aux suites $(f^m), (g^m)$ le résultat suivant :

Lemme 4 : *On a toujours :* $g_F \circ f_F = g \circ f$.

Par ailleurs, il résulte de propriétés classiques relatives aux schémas que le morphisme $\Pi_{d,v}$ est propre, ce qui implique que $\mathcal{M}_1(d, v)$ est une sous-variété fermée de $\mathcal{M}_0(d, v)$.

IV. Application à certaines variétés Nilpotentes de type (A).

On se place dorénavant dans la situation où Q est un carquois de type (A_{n-1}). On peut dans ce cas représenter les éléments de $M(d, v)$ de la manière suivante : Etant donné $V = (V_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ une représentation de Q,de vecteur dimension v et $D = (D_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ une représentation de Q de vecteur dimension d, on note (A, B, f, g) un élément quelconque de $M(d, v)$, où : $A = (A_i)_{1 \leq i \leq n-1}, A_i \in Hom(V_i, V_{i+1})$, $B = (B_i)_{1 \leq i \leq n-1}, B_i \in Hom(V_{i+1}, V_i), f \in Hom(D, V), g \in Hom(V, D)$.

Etant donné un espace vectoriel W de dimension N, on note $\mathfrak{h} = gl(W), H = GL(W)$ et $\mathcal{N}$ la variété des éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$. On va tout d'abord rappeler quelques propriétés relatives à la variété $\mathcal{N}$.

IV.1.Le slice de Slodowy associé à une orbite nilpotente adjointe.

Soit $e \in \mathcal{N}, (h, e, f)$ un sl_2-triplet associé, dans $\mathfrak{h}$, $O_e = H.e$ la H-orbite nilpotente correspondante. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{h}(e) \oplus Im\,\mathrm{ad}\, f \\ &= Im\,\mathrm{ad}\, e \oplus \mathfrak{h}(f) \end{aligned}$$

On a donc la formule :

$$T_e(\mathfrak{h}) \simeq Im\,\mathrm{ad}\, e \oplus \mathfrak{h}(f) = T_e(O_e) \oplus \mathfrak{h}(f)$$

On pose : $S_e = e + \mathfrak{h}(f)$. On sait que cette variété affine peut-être munie d'une structure de Poisson, appelée structure transverse à l'orbite $H.e$. On appelle aussi S_e "le slice transverse " ou " slice de Slodowy" associé à O_e.

On définit sur S_e une action de $\mathbb{C}^*$ de la manière suivante :

Le sl_2-triplet (h, e, f) engendre une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ isomorphe à $sl_2(\mathbb{C})$. On note $\gamma : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow H$ l'homomorphisme de groupes correspondant, via l'application exponentielle. Soit $\delta : \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \delta(t) = \gamma(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix})$$

Considérons, par ailleurs, la décomposition de $\mathfrak{h}$ en sous-espaces propres suivant l'action de $\mathrm{ad}\, h$, soit :

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}(i)$$

On définit une action "tordue" ρ de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathfrak{h}$ par :

$$\forall X \in \mathfrak{h}, \forall t \in \mathbb{C}^*, \rho(t).X = t^2.\,\mathrm{Ad}\,\delta(t)^{-1}.X$$

Cette action, sur $\mathfrak{h}(i)$, puis sur S_e, est alors donnée par :

$$\forall X \in \mathfrak{h}(i), \forall t \in \mathbb{C}^*, \rho(t).X = t^{2-i}X$$

$$\forall e + X \in S_e, \forall t \in \mathbb{C}^*, \rho(t).(e + X) = t^2.\,\mathrm{Ad}\,\delta(t)^{-1}(e + X) = e + t^2.\,\mathrm{ad}\,\delta(t)^{-1}(X)$$

Soit O une G-orbite nilpotente et supposons que $O \cap S_e \neq \emptyset$. Comme O est nilpotente, $\mathbb{C}^*$ agit sur O au moyen de ρ. Soit $z = e + X \in O \cap S_e$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{C}^*, \rho(t).z = e + \rho(t).X \in O \cap S_e$. Comme $X \in \ker \mathrm{ad}\, f$, $\lim_{t \longrightarrow 0} \rho(t).X = 0$.

D'où : $e = \lim_{t \longrightarrow 0} \rho(t).z$ et, donc, $e \in \overline{O}$.Ainsi, on a le résultat suivant :

Proposition 5 : *S_e rencontre seulement les H-orbites nilpotentes dont l'adhérence contient l'orbite $H.e$.*

IV.2. Drapeaux partiels et variété de Slodowy associée.

• **Définition :** *Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_n, a_1 \geq a_2 \cdots \geq a_n$ une partition de l'entier N. On appelle drapeau partiel de type a, une suite $\{0\} = F_0 \subset F_1 \cdots \subset F_n = W$ de sous-espaces vectoriels de W tels que : $\forall i, 1 \leq i \leq n, \dim F_i - \dim F_{i-1} = a_i$. L'ensemble des drapeaux partiels de type a est H-homogène. On le notera $\mathcal{F}_a$.*

Soit $\widetilde{\mathcal{N}_a} = \{(u, F)/u \in \mathcal{N}, \forall i, u(F_i) \subset F_{i-1}\}$. Soit enfin : $\mu_a : \widetilde{\mathcal{N}_a} \longrightarrow \mathcal{N}$ la projection sur la première composante.

Il y a en fait une autre manière d'interpréter $\mathcal{F}_a$. On se donne donc une partition a de N et on note $(e_1, \ldots, e_N)$ la base canonique de W.On pose :

$$\forall 1 \leq i \leq n, F_i = \bigoplus_{k=1}^{k=s_i} \mathbb{C}.e_k,\ \ s_i = \sum_{j=1}^{j=i} a_j,\ \ s_0 = 0$$

On obtient ainsi un drapeau partiel de type a, que l'on note F_a. Soit maintenant P_a le sous-groupe de H qui stabilise ce drapeau, soit :

$$P_a = \{g \in H / g.F_i \subset F_i, \forall i\}$$

On sait que P_a est un sous-groupe parabolique de H, on note $\mathfrak{p}_a$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{n}_a$ le radical unipotent de $\mathfrak{p}_a$.Ainsi, on a :

$$\mathfrak{p}_a = \{X \in \mathfrak{h} / X(F_i) \subset F_i, \forall i\}$$

$$\mathfrak{n}_a = \{X \in \mathfrak{h} / X(F_i) \subset F_{i-1}, \forall i\}$$

On sait alors que l'application $\overline{x} \longrightarrow x.F_a$ est un isomorphisme de H/P_a sur $\mathcal{F}_a$ qui nous permet d'identifier ces deux espaces H-homogènes.

Moyennant l'identification précédente, on peut écrire :

$$\widetilde{\mathcal{N}_a} = \{(n, g.P_a) \in \mathcal{N} \times H/P_a,\ /g^{-1}.n \in \mathfrak{n}_a\}$$

En fait, l'espace $\widetilde{\mathcal{N}_a}$ peut s'identifier de manière naturelle au fibré cotangent $T^*(\mathcal{F}_a) \simeq T^*(H/P_a)$. En effet, on considère l'application : $(g, n) \longrightarrow (g.n, g.P_a)$ du fibré vectoriel $H \times_{P_a} \mathfrak{n}_a$ dans $\widetilde{\mathcal{N}_a}$. Cette application est clairement un isomorphisme de fibrés. Soit, d'autre part, le morphisme surjectif de fibrés $\alpha : H \times_{P_a} \mathfrak{h} \longrightarrow T(H/P_a)$ défini par :

$$\alpha(g, X) = (\mathrm{Ad}\, g.X)_{g.P_a}$$

Comme on a : $(g, X) \in \ker \alpha \Longleftrightarrow X \in \mathfrak{p}_a$, on en déduit un isomorphisme de fibrés : $\widetilde{\alpha} : H \times_{P_a} (\mathfrak{h}/\mathfrak{p}_a) \longrightarrow T(H/P_a)$. En considérant l'isomorphisme dual et en utilisant le fait que : $(\mathfrak{h}/\mathfrak{p}_a)^* \simeq \mathfrak{n}_a$, on en déduit le résultat annoncé.

En particulier, on constate que $\widetilde{\mathcal{N}_a}$ est une variété lisse de dimension $2 \dim \mathfrak{n}_a$.

On constate enfin que l'on peut munir $\widetilde{\mathcal{N}_a}$ d'une structure naturelle de H-module et que l'application μ_a est clairement H-équivariante.

• **Orbite de Richardson.** On va rappeler brièvement ce qu'est l'orbite de Richardson associée au sous-groupe parabolique P_a, a étant une partition donnée de l'entier N. On peut écrire :

$$\mathfrak{n}_a = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} \mathfrak{n}_a \cap H.n$$

On sait, d'autre part, qu'il n'existe qu'un nombre fini d'orbites nilpotentes dans $\mathfrak{h}$. Il s'en suit qu'il existe une orbite nilpotente O_a telle que $O_a \cap \mathfrak{n}_a$ soit dense dans $\mathfrak{n}_a$. Toute autre orbite nilpotente O' est telle que $O' \cap \mathfrak{n}_a \subset \mathfrak{n}_a \backslash O_a \cap \mathfrak{n}_a$, ce qui implique que O_a est l'unique orbite nilpotente telle que $O_a \cap \mathfrak{n}_a$ soit dense dans $\mathfrak{n}_a$. Par définition, on appelle cette orbite "l'orbite de Richardson" associée à la partition a.

On sait de plus que $O_a \cap \mathfrak{n}_a$ est une P_a-orbite et que si $X \in O_a \cap \mathfrak{n}_a$, alors :

$$(H^X)^0 \subset P_a^X \subset H^X$$

Ceci implique en particulier que $\dim O_a = 2 \dim \mathfrak{n}_a$.

Il existe, dans le cas du type (A), un moyen de déterminer la partition de N correspondant à l'orbite de Richardson.C'est ce que nous allons expliquer maintenant.

On rappelle tout d'abord quelques faits sur les partitions de l'entier N. A chaque partition d, on fait correspondre l'orbite nilpotente $H.X_d$, les d_i étant les tailles respectives des blocs de Jordan de X_d. On définit ensuite une relation d'ordre sur l'ensemble des partitions par :

$$d \leq d' \Longleftrightarrow \forall i, \sum_{k=1}^{k=i} d_k \leq \sum_{k=1}^{k=i} d'_k$$

Selon des résultats classiques dus, entre autres, à Gerstenhaber, ([CM], ch.6)on sait alors que :

$$d \leq d' \Longleftrightarrow \forall i, Rg(X_d^i) \leq Rg(X_{d'}^i) \tag{1}$$

$$d \leq d' \Longleftrightarrow \overline{H.X_d} \subset \overline{H.X_{d'}} \tag{2}$$

On considère ensuite la partition “duale” de $d = (d_1, \ldots, d_n)$, notée d^t et définie par :

$$d^t = (d_1^t, \ldots, d_n^t),\ \forall i, d_i^t = |\{j / d_j \geq i\}|$$

On a les propriétés suivantes ([CM], ch.6) :

$$d \leq d' \Longleftrightarrow d'^t \leq d^t \tag{3}$$

$$\forall i, \dim \ker X_d^i = \sum_{k=1}^{k=i} d_k^t \tag{4}$$

Soit donc la partition a et le drapeau partiel F_a définis précédemment. Soit $X \in \mathfrak{n}_a$. Il est clair que, pour tout $i, X^i(F_i) = 0$, ce qui implique que :

$$Rg(X^i) \leq N - \sum_{k=1}^{k=i} a_k \tag{5}$$

Posons :

$$G_i = \bigoplus_{j=s_{i-1}+1}^{j=s_i} \mathbb{C}.e_j$$

On vérifie que : $W = \oplus_i G_i$ et $\dim G_i = a_i$, ce qui implique que : $\dim G_i \geq \dim G_{i+1}$.

On considère une base $(x_k^i), 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq a_i$ de W telle que : $(x_k^i), 1 \leq k \leq a_i$ soit une base de G_i. Soit $X_a \in \mathfrak{h}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall i, 1 \leq i \leq n, \forall k, 2 \leq k \leq a_i, X_a(x_k^i) &= x_k^{i-1} \\ X_a(x_k^1) &= 0 \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que :

$$\begin{aligned} &X_a(G_1) = 0 \\ &X_a(G_i) \subset G_{i-1} \\ &\ker X_a^i = \bigoplus_{k=1}^{k=i} G_k, \dim \ker X_a^i = \sum_{k=1}^{k=i} a_k \end{aligned}$$

Ainsi, $X_a \in \mathfrak{n}_a$ et on déduit donc de (1) (4) et (5) que :

- L'orbite $H.X_a$ correspond à la partition a^t de N.

- Toute H-orbite $H.X$ rencontrant $\mathfrak{n}_a$ a une partition $d_X \leq a^t$.

Ceci implique que : $\overline{H.X} \subset \overline{H.X_a}$, d'après (2).

Il résulte de ceci que $H.X_a = O_a$ est l'orbite de Richardson associée à a.

D'où :

Proposition 6 : *L'orbite de Richardson O_a, associée à la partition a, a pour partition la partition duale a^t.*

• Notre but est maintenant d'étudier l'image de l'application μ_a, a étant une partition donnée de N. On sait que : $\mu_a : \widetilde{\mathcal{N}_a} \longrightarrow \mathcal{N}$ est définie par : $\mu_a(n, g.P_a) = n \in \operatorname{Ad} H.\mathfrak{n}_a$. μ_a est donc une surjection de $\widetilde{\mathcal{N}_a}$ sur $\operatorname{Ad} H.\mathfrak{n}_a$.

Il est clair que l'orbite de Richardson O_a associée à a est contenue dans $\operatorname{Ad} H.\mathfrak{n}_a$ qui est fermée dans $\mathcal{N}$ et qui est irréductible.D'où :

$$\mu_a(\widetilde{\mathcal{N}_a}) = \overline{O_a}$$

Proposition 7 : *Le morphisme μ_a est un morphisme surjectif de $\widetilde{\mathcal{N}_a}$ sur $\overline{O_a}$.*

• **Variété de Slodowy.** Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{h}$ et $a = (a_1, \ldots, a_n)$ une partition de N. On pose :

$$S_{a,e} = S_e \cap \overline{O_a}$$
$$\widetilde{S_{a,e}} = \mu_a^{-1}(S_{a,e})$$

Définition : *La variété $\widetilde{S_{a,e}}$ est appelée Variété de Slodowy associée au couple (a, e).*

Proposition 8 :

1) On a : $\widetilde{S_{a,e}} \neq \emptyset \Longleftrightarrow e \in \overline{O_a}$.

2) Si $\widetilde{S_{a,e}}$ est non vide, c'est une variété lisse de dimension $\dim O_a - \dim O_e$.

Preuve :

1) Si $e \in \overline{O_a}$, alors le résultat est dû à la proposition 8. Réciproquement, si $\widetilde{S_{a,e}}$ est non vide,le résultat est conséquence immédiate de la proposition 5.

2) On rappelle que : $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(e) \oplus Im \operatorname{ad} f$. En prenant l'image, par l'application exponentielle, d'un voisinage de 0 dans $Im \operatorname{ad} f$ on obtient une sous-variété localement fermée P de H contenant 1 et isomorphe à un voisinage de e dans l'orbite O_e.

Comme d'autre part, on a : $T_e(\mathfrak{h}) = T_e(O_e) \oplus T_e(S_e)$, la différentielle en 0 de l'application $(g, x) \longrightarrow g.x$ de $P \times S_e$ sur $\mathfrak{h}$ est bijective. En restreignant au besoin P, on peut donc trouver un voisinage S_V de e dans S_e et un voisinage U_e de e dans $\mathfrak{h}$ tels que l'application précédente soit un isomorphisme de $P \times S_V$ sur U_e. Notons f cet isomorphisme.

Soit $U_a = U_e \cap \overline{O_a}, S_{a,e}(V) = S_V \cap \overline{O_a}$. On vérifie facilement que f induit un isomorphisme f_a de $P \times S_{a,e}(V)$ sur U_a.

Posons ensuite : $\widetilde{U_a} = \mu_a^{-1}(U_a), \widetilde{S_{a,e}(V)} = \mu_a^{-1}(S_{a,e}(V))$. La H-équivariance de μ_a implique que l'application $(g, \widetilde{x}) \longrightarrow g.\widetilde{x}$ est bien un morphisme de $P \times \widetilde{S_{a,e}(V)}$ dans $\widetilde{U_a}$. Notons $\widetilde{f_a}$ ce morphisme.

Soit $\widetilde{u} \in \widetilde{U_a}$ et $\mu_a(\widetilde{u}) = g.x, g \in P, x \in S_{a,e}(V)$. Comme $\mu_a(g^{-1}.\widetilde{u}) = x \ \in S_{a,e}(V)$, il s'en suit que $g^{-1}.\widetilde{u} \in \widetilde{S_{a,e}(V)}$. On peut ainsi définir un morphisme $a : \widetilde{U_a} \longrightarrow P$ par :

$$\forall \widetilde{u} \in \widetilde{U_a}, a(\widetilde{u}) = p_1 \circ f_a^{-1} \circ \mu_a(\widetilde{u})$$

où p_1 désigne la première projection de $P \times S_{a,e}(V) \longrightarrow P$.

On considère alors l'application $\varphi_a : \widetilde{U_a} \longrightarrow P \times \widetilde{S_{a,e}(V)}$ donnée par :

$$\forall \widetilde{u} \in \widetilde{U_a}, \varphi_a(\widetilde{u}) = (a(\widetilde{u}), a(\widetilde{u})^{-1}.\widetilde{u})$$

On vérifie facilement que φ_a est l'application inverse de $\widetilde{f}_a$, ce qui permet d'affirmer que ce morphisme est bijectif.

Comme $\widetilde{U_a}$ est un ouvert de $\widetilde{\mathcal{N}_a}$ qui est une variété lisse, c'est aussi une variété lisse. On en déduit immédiatement que $\widetilde{S_{a,e}}$ est lisse.

Enfin, de l'isomorphisme précédent, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\dim \widetilde{S_{a,e}} &= \dim \widetilde{\mathcal{N}_a} - \dim P \\
&= \dim \widetilde{\mathcal{N}_a} - \dim O_e \\
&= 2 \dim \mathcal{F}_a - \dim O_e \\
&= 2 \dim (H/P_a) - \dim O_e \\
&= \dim O_a - \dim O_e
\end{aligned}$$

IV.3. Variété de Nakajima et Variété de Slodowy. On considère maintenant deux n-uplets $d = (d_1, \dots, d_{n-1})$ et $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$. On rappelle que $\mathcal{M}(d,v), \mathcal{M}_0(d,v)$ sont les deux variétés de Nakajima associés, $\Pi_{d,v}$ est la projection canonique de $\mathcal{M}_0(d,v)$ sur $\mathcal{M}(d,v)$ et $\mathcal{M}_1(d,v)$ l'image de cette projection. On rappelle que $G = \prod_{i=1}^{i=n-1} GL(v_i)$ est le groupe de Lie qui sert à la définition des variétés de Nakajima et que $\mathfrak{g}$ est son algèbre de Lie.

Posons :

$$N = \sum_{j=1}^{j=n-1} j d_j, \ \forall i, \lambda_i = \sum_{j=i}^{j=n} d_j, \ (d_n = 0)$$

On considère : $\mathfrak{h} = gl(N)$ et on définit l'élément nilpotent e de $\mathfrak{h}$ correspondant à la partition duale λ^t. En fait, on a :

$$e = ((n-1)^{d_{n-1}}, \dots, 1^{d_1})$$

On pose ensuite :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, a_i = v_{n-1} + \sum_{j=n-i+1}^{j=n} (d - Cv)_j, \ ((d-Cv)_n = 0)$$

Ceci nous donne :
$a(d,v) = (a_1, \dots, a_n)$ où les (a_i) sont définis par :

$$\begin{aligned}
a_1 &= v_{n-1} \\
a_i &= d_{n-i+1} + \dots d_{n-1} - v_{n-i+1} + v_{n-i}, \forall i, 2 \leq i \leq n-1 \\
a_n &= d_1 + \dots d_{n-1} - v_1
\end{aligned}$$

On vérifie enfin que : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{j=1}^{j=n-1} j d_j = N$.

Si, pour tout i, les a_i sont positifs, on peut définir l'orbite de Richardson O_a de partition $a(d,v)^t$, puis les variétés $S_{a,e}, \widetilde{S_{a,e}}, \widetilde{\mathcal{N}_a}$.

Si, pour un i, a_i est négatif, on pose, par convention : $S_{a,e} = \emptyset$.

Le théorème suivant, qui avait été conjecturé par Nakajima, vient d'être démontré par A.Maffei ([M]).

Théorème 9 : *Soit $d, v, a = a(d,v), e$ définis comme précédemment . Alors, il existe des isomorphismes de variétés algébriques $\phi : \mathcal{M}(d,v) \longrightarrow \widetilde{S_{a,e}}$ et $\psi : \mathcal{M}_1(d,v) \longrightarrow \mathcal{S}(a,e)$ tels que : $\psi \circ \Pi_{d,v} = \mu_a \circ \phi$. De plus, $\psi(0) = e$.*

Remarque : Dans [MV], I.Mirkovic et M.Vybornov donnent des expressions explicites des isomorphismes en question.

On envisage ici le cas particulier suivant, qui a été étudié par Nakajima : $d = (N, 0, 0, \ldots, 0), v = (v_1, \ldots, v_{n-1})$, avec $N \geq v_1 \geq \cdots \geq v_{n-1}$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} a_1 &= v_{n-1}, \\ a_i &= v_{n-i} - v_{n-i+1}, \forall i, 2 \leq i \leq n-1, \\ a_n &= N - v_1 \end{aligned}$$

De plus, on a : $D = D_1$ et $\dim D_1 = N$.

Dans ce cas, on a : $e = 0, S_{a,e} = \overline{O_a}, \widetilde{S_{a,e}} = \widetilde{\mathcal{N}_a}$.

On va maintenant définir explicitement les applications ϕ et ψ et montrer qu'il s'agit bien d'isomorphismes.

Etant donné $(A, B, f, g) \in M(d,v)$, on constate que, compte-tenu du choix de d, on a :

$$f_1 : D_1 \longrightarrow V_1, f_i = 0, \forall i \geq 2, \;\; g_1 : V_1 \longrightarrow D_1, g_i = 0, \forall i \geq 2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{(A,B,f,g) \in M(d,v) \; / \; B_1.A_1 &= f_1.g_1 \\ B_i.A_i &= A_{i-1}.B_{i-1}, \forall i, 2 \leq i \leq n-2 \\ A_{n-2}.B_{n-2} &= 0\} \end{aligned}$$

Soit donc $X = (A, B, f, g) \in \mathcal{F}^s$. Définissons le drapeau $F = (F_i)$ par :

$$\begin{aligned} F_0 &= \{0\}, \\ F_i &= Img_1 B_1 \ldots B_{n-i-1}, 1 \leq i \leq n-2, \\ F_{n-1} &= Img_1 \\ F_n &= D_1 \end{aligned}$$

Montrons que $(g_1 f_1, F) \in \widetilde{\mathcal{N}_a}$.

On a, $\forall i, 2 \leq i \leq n-2$:

$$\begin{aligned} g_1 f_1 g_1 B_1 \ldots B_{n-i-1} &= g_1 B_1 A_1 B_1 \ldots B_{n-i-1} \\ &= g_1 B_1 B_2 A_2 \ldots B_{n-i-1} \\ &\ldots \\ &= g_1 B_1 \ldots B_{n-i} A_{n-i} \end{aligned}$$

Ceci implique bien que : $g_1 f_1(F_i) \subset F_{i-1}$.

On montre de manière analogue que : $g_1 f_1(F_1) = 0$. Comme, de plus, $g_1 f_1(D_1) \subset Img_1 = F_{n-1}$, on en déduit que $g_1 f_1$ est un élément nilpotent de $gl(D_1)$.

Montrons que F est un drapeau partiel de type a. Considérons pour cela la famille de sous-espaces $S = (S_i)$ définie par :

$$S_1 = \ker g_1, S_i = \ker g_1 B_1 \ldots B_{i-1}, 2 \leq i \leq n-1$$

On vérifie que S est (A, B)-invariante et on constate que $S \subset \ker g$. Il s'en suit donc que $S = \{0\}$. Ainsi, les applications $g_1, g_1 B_1 \ldots B_{i-1}, 2 \leq i \leq n-1$ sont injectives.

On en déduit que : $\forall i, 1 \leq i \leq n-1, \dim F_i = v_{n-i}$, et $\dim F_n = N$, ce qui implique que F est un drapeau de type a.

Ainsi, le couple $(g_1 f_1, F)$ appartient à $\widetilde{\mathcal{N}_a}$.

Soit $\phi : \mathcal{F}^s \longrightarrow \widetilde{\mathcal{N}_a}$ définie par :

$$\phi(A, B, f, g) = (g_1 f_1, F)$$

Il est clair que ϕ est constante sur les G-orbites et se prolonge donc en une application ϕ_1 de $\mathcal{M}(d, v)$ dans $\widetilde{\mathcal{N}_a}$. Montrons que cette application est bijective.

Soit $(A, B, f, g), (A', B', f', g')$ tels que $\phi_1(A, B, f, g) = \phi_1(A', B', f', g')$, ce qui veut dire :

$$F = F'; g_1.f_1 = g'_1.f'_1$$

Les applications g_1 et g'_1 sont injectives et $Img_1 = Img'_1$. On pose donc :

$$x_1 = g_1^{'-1} \circ g_1 \in GL(v_1)$$

Ainsi, on a : $g'_1 = g_1 x_1^{-1}, f'_1 = x_1 f_1$, car g_1, g'_1 sont injectives.

On procède de la même façon avec les applications $g_1.B_1$ et $g'_1.B'_1$ qui sont aussi injectives et telles que : $Img_1 B_1 = Img'_1 B'_1$. On pose : $x_2 = (g'_1 B'_1)^{-1}.g_1 B_1$. Ceci implique que : $B'_1 = x_1 B_1 x_2^{-1}$. Par itération de ce procédé, on en déduit que B et B' sont dans la même G-orbite.

On a enfin :
$g_1 B_1 A_1 = g_1 f_1 g_1 = g'_1 f'_1 g'_1 x_1 = g'_1 B'_1 A'_1 x_1 = g_1 B_1 x_2^{-1} A'_1 x_1$. Comme $g_1 B_1$ est injective, on en déduit que : $A'_1 = x_2 A_1 x_1^{-1}$. Puis, par itération de ce procédé, on montre aussi que A et A' sont dans la même G-orbite.

L'application ϕ_1 est donc bien injective.

La surjectivité de cette application se démontre de manière tout à fait analogue.

En effet, soit $(x, F) \in \widetilde{\mathcal{N}_a}$. On sait que, $\forall i, \dim F_i = v_{n-i}$. Ainsi, il existe une bijection linéaire $g_1 : V_1 \longrightarrow F_{n-1}$. On pose alors : $f_1 = g_1^{-1} x$. Ceci implique que $x = g_1 f_1 \in \mathcal{N}$ et $F_{n-1} = Img_1$.

De même, il existe une bijection linéaire $g_2 : V_2 \longrightarrow F_{n-2}$ et on pose : $B_1 = g_1^{-1} g_2 : V_2 \longrightarrow V_1$. On obtient : $F_{n-2} = Img_1 B_1$.

Par construction, les applications linéaires $g_1, g_1 B_1$ sont injectives.

De proche en proche, on construit ainsi tous les B_i.

Enfin, on pose : $A_1 = (g_1 B_1)^{-1} g_1 f_1 g_1 : V_1 \longrightarrow V_2$, puis par récurrence : $A_i = (g_1 B_1 \ldots B_i)^{-1} g_1 B_1 \ldots B_{i-1} A_{i-1} B_{i-1}$.

Il résulte de tout ceci que $(A, B, f, g) \in \mathcal{F}$.

Soit $S \subset V, (A, B)$-invariant tel que : $S \subset \ker g$. Comme $S_1 \subset \ker g_1, S_1 = 0$. Comme $B_1 : S_2 \longrightarrow S_1$, alors : $g_1 B_1(S_2) = 0$ et donc : $S_2 = 0$. Par itération de ce procédé, on en déduit que : $S = 0$, ce qui implique que (A, B, f, g) est semi-stable et démontre la surjectivité de ϕ_1.

En utilisant ce qui précède, on peut, d'autre part, considérer l'application
$\psi : \mathcal{M}_0(d, v) \longrightarrow \mathfrak{h}$ définie par : $\psi(G.(A_F, B_F, f_F, g_F)) = g_F f_F$. Comme, d'après le lemme 4, on a : $\psi \circ \Pi_{d,v} = \mu_a \circ \phi_1$, la restriction ψ_1 de ψ à $\mathcal{M}_1(d, v)$ est un morphisme surjectif de $\mathcal{M}_1(d, v)$ sur $\overline{O_a}$. Il reste à montrer que ψ_1 est injective. Ceci repose sur le résultat suivant de théorie des invariants :

Théorème 10 ([VU]) : *Soit V, W deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, $G = GL(V)$, $E = Hom(V,W) \times Hom(W,V)$. G agit sur E par :*

$$x.(a,b) = (a.x^{-1}, x.b)$$

Soit $\pi : E \longrightarrow E//G$ la surjection canonique et $F : E \longrightarrow gl(W)$ définie par : $F(a,b) = a.b$. Alors, F induit un morphisme $\widetilde{F} : E//G \longrightarrow gl(W)$ tel que : $\widetilde{F} \circ \pi = F$.

$\widetilde{F}$ est un isomorphisme de variétés algébriques de $E//G$ sur le cône des éléments de $gl(W)$ dont le rang est inférieur ou égal à $\dim V$.

On va appliquer ce théorème à la situation suivante : $G = G_1 = GL(V_1), E = Hom(V_1, V_2 \times D_1) \times Hom(V_2 \times D_1, V_1)$. On considère l'application :

$$\theta_1 : M(d,v) \longrightarrow gl(V_2) \times \prod_{i=2}^{i=n-2} Hom(V_i, V_{i+1}) \times Hom(V_{i+1}, V_i) \times gl(D_1)$$
$$(A,B,f,g) \longrightarrow (A_1.B_1, A_2, B_2, \ldots, A_{n-2}, B_{n-2}, g_1.f_1)$$

Du théorème 10, on déduit que cette application passe au quotient par G_1 et nous fournit une application injective, qui est une immersion fermée, soit :

$$\widetilde{\theta_1} : M(d,v)//G_1 \longrightarrow gl(V_2) \times \prod_{i=2}^{i=n-2} Hom(V_i, V_{i+1}) \times Hom(V_{i+1}, V_i) \cdots \times gl(D_1)$$
$$(A,B,f,g) \longrightarrow (A_1.B_1, A_2, B_2, \ldots, A_{n-2}, B_{n-2}, g_1.f_1)$$

Comme $\mathcal{F}$ est fermée dans $M(d,v)$, la restriction de $\widetilde{\theta_1}$ à $\mathcal{F}//G_1$ est une immersion fermée injective, que nous noterons de la même façon.

Or, sur $\mathcal{F}$, on a l'égalité : $A_1 B_1 = B_2.A_2$. Il s'en suit que l'application $\widetilde{\theta_1}$ induit un morphisme injectif qui est une immersion fermée, soit :

$$\widetilde{\theta_2} : \mathcal{F}//G_1 \longrightarrow E_2 = \prod_{i=2}^{i=n-2} Hom(V_i, V_{i+1}) \times Hom(V_{i+1}, V_i) \times gl(D_1)$$
$$(A,B,f,g) \longrightarrow (A_2, B_2, \ldots, A_{n-2}, B_{n-2}, g_1.f_1)$$

En appliquant à nouveau le théorème 10 à E_2, pour le groupe $G_2 = GL(V_2)$, on obtient un morphisme injectif qui est une immersion fermée , soit :

$$\widetilde{\theta_3} : \mathcal{F}//G_1 \times G_2 \longrightarrow gl(V_3) \times \prod_{i=3}^{i=n-2} Hom(V_i, V_{i+1}) \times Hom(V_{i+1}, V_i) \times gl(D_1)$$
$$(A,B,f,g) \longrightarrow (A_2.B_2, A_3, B_3, \ldots, A_{n-2}, B_{n-2}, g_1.f_1)$$

En itérant ce procédé autant de fois que nécessaire, on en déduit un morphisme injectif :

$$\widetilde{\theta_n} : \mathcal{F}//G \longrightarrow gl(D_1)$$
$$(A,B,f,g) \longrightarrow g_1.f_1$$

ψ_1 est la restriction de $\widetilde{\theta_n}$ à $\mathcal{M}_1(d,v)$ et, donc, est injective. Il s'agit bien d'un isomorphisme de $\mathcal{M}_1(d,v)$ sur $\overline{O_a}$.

Références.

[BR] M.Brion. *Invariants et covariants des groupes algébriques réductifs.* Cours "CIMPA" Monastir- Tunisie, 1996.

[CM] D.H.Collingwood, W.M.Mc Govern *Nilpotent orbits in Semisimple algebras.* Van Nostrand Reinhold Math.series.

[KI] A.D.King. *Moduli of representations of finite dimensional algebras.* Quart.J.Math. Oxford (2), 45 (1994), 515-530

[KP] H.Kraft, C.Procesi. *Closures of conjugacy classes of Matrices are normal.* Inven.Math. 53 (1979), 227-247

[HA] W.J. Haboush. *Reductive groups are geometrically reductive.* Ann. of Math.102, (1975) 67-83

[HAR] R.Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate texts in Math. **[M]** A.Maffei. *Quiver Varieties of type (A)* preprint.

[MV] I.Mirkovic, M.Vybornov. *On quiver varieties and affine grassmannians of type (A).* preprint.

[N1] H.Nakajima. *Instantons on ALE spaces, quiver varieties and Kac-Moody Algebras.* Duke. Math.journal, 76,2, (1994) 365-416

[N2] H.Nakajima. *Quiver varieties and Kac-Moody Algebras.* Duke. Math.journal, 91,3, (1998) 515-560

[SES] C.S. Seshadri. *Geometric reductivity over arbitrary base.* Adv.in Math 26 (1977), 225-274.

[SP] T.A.Springer. *Linear algebraic groups.* Progress in Mathematics. Birkhauser.

[VU] T.Vust. *Sur la théorie des invariants des groupes classiques.* Ann.Inst.Fourier. Grenoble. 26,1 (1976) 1-31.