SUR LA STRUCTURE DE POISSON TRANSVERSE A UNE ORBITE ADJOINTE D'UNE ALGEBRE DE LIE SEMI-SIMPLE

Strasbourg 06 Janvier 2006

Deux questions

On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, G son groupe adjoint et $\mathcal{N}$ le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. Soit $e \in \mathcal{N}$. On considère la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(e) \oplus \mathfrak{n},$$

$\mathfrak{n}$ supplémentaire quelconque de $\mathfrak{g}(e)$ dans $\mathfrak{g}$.

Définition : *On dit que e est "conormale" (ou l'orbite $G.e$ est conormale) s'il existe un supplémentaire $\mathfrak{n}$ qui est une algèbre de Lie.*

Question 1 : *Peut-on déterminer toutes les orbites nilpotentes adjointes conormales ?*

Soit $\mathfrak{g}^*$ le dual d'une algèbre de Lie complexe quelconque.

- C'est une variété de Poisson (structure de Lie-Poisson).
- Feuilles symplectiques = Orbites coadjointes.
- A chaque feuille symplectique $\longleftrightarrow$ structure de Poisson transverse (A.Weinstein).

Question 2 : *Etudier la structure de Poisson transverse à une orbite nilpotente adjointe lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple.*

Structure de Poisson transverse.

Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson, de bivecteur de Poisson Λ et m un point de M. Soit $N \subset M$ une sous-variété contenant m :

- transverse en m à la feuille symplectique S_m,
- de dimension la codimension de S_m.

On a donc :

$$T_m(M) = T_m(S_m) \oplus T_m(N)$$

A.Weinstein montre que :

- on peut munir N d'une structure de Poisson,
- deux telles sous-variétés sont nécessairement (localement) Poisson-isomorphes.

$\Longrightarrow$ structure de Poisson transverse à S_m.

Structure de Poisson transverse.

Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson, de bivecteur de Poisson Λ et m un point de M. Soit $N \subset M$ une sous-variété contenant m :

- transverse en m à la feuille symplectique S_m,
- de dimension la codimension de S_m.

On a donc :

$$T_m(M) = T_m(S_m) \oplus T_m(N)$$

A.Weinstein montre que :

- on peut munir N d'une structure de Poisson,
- deux telles sous-variétés sont nécessairement (localement) Poisson-isomorphes.

$\Longrightarrow$ structure de Poisson transverse à S_m.

Le "Splitting" théorème de Weinstein.

Théorème : *Soit* $(M, \{\})$ *une variété de Poisson,* $m \in M$*. On suppose que* $rg_m(M) = 2r$*. Il existe un voisinage* U *de* m *dans* M*, un système de coordonnées locales* $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1, \ldots, z_s)$ *sur* U *tel que :*

$$\{,\}_U = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,k<l}^{k,l=s} \phi_{k,l}(z) \frac{\partial}{\partial z_k} \wedge \frac{\partial}{\partial z_l}$$

où les $\phi_{k,l}$ *sont des fonctions lisses, ne dépendant que de* $z_1, \ldots z_s$ *et s'annulant en m.*

Dans ce cas :

- $N \cap U = \{x \in U, p_i(x) = p_i(m), q_i(x) = q_i(m)\}$,
- $x \longrightarrow (z_1(x), \ldots, z_s(x))$ est une carte locale de N
- la matrice de la structure de Poisson transverse est :

$$\Lambda_N(x) = (\{z_i, z_j\}(x)) = (\phi_{i,j}(x))$$

Soit $M = \mathfrak{g}^*$ le dual d'une algèbre de Lie complexe, muni de la structure de Lie-Poisson :

$$\forall \mu \in \mathfrak{g}^*, \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \Lambda_\mu(X, Y) = \mu([X, Y])$$

La feuille symplectique passant par μ est donc l'orbite $G.\mu$.

Structure de Poisson transverse N_μ à $G.\mu$ donnée par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}(\mu) \oplus \mathfrak{n} \\ \mathfrak{g}^* &= \mathfrak{g}(\mu)^\perp \oplus \mathfrak{n}^\perp \\ T_\mu(\mathfrak{g}^*) &= T_\mu(G.\mu) \oplus \mathfrak{n}^\perp \\ T_\mu(\mathfrak{g}^*) &= T_\mu(G.\mu) \oplus T_\mu(N_\mu). \end{aligned}$$

$$N_\mu = \mu + \mathfrak{n}^\perp.$$

De plus, deux supplémentaires quelconques de $\mathfrak{g}(\mu)$ donnent des structures de Poisson transverses isomorphes.

Soit $M = \mathfrak{g}^*$ le dual d'une algèbre de Lie complexe, muni de la structure de Lie-Poisson :

$$\forall \mu \in \mathfrak{g}^*, \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \Lambda_\mu(X, Y) = \mu([X, Y])$$

La feuille symplectique passant par μ est donc l'orbite $G.\mu$.

Structure de Poisson transverse N_μ à $G.\mu$ donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{g}(\mu) \oplus \mathfrak{n} \\
\mathfrak{g}^* &= \mathfrak{g}(\mu)^\perp \oplus \mathfrak{n}^\perp \\
T_\mu(\mathfrak{g}^*) &= T_\mu(G.\mu) \oplus \mathfrak{n}^\perp \\
T_\mu(\mathfrak{g}^*) &= T_\mu(G.\mu) \oplus T_\mu(N_\mu).
\end{aligned}$$

$$N_\mu = \mu + \mathfrak{n}^\perp.$$

De plus, deux supplémentaires quelconques de $\mathfrak{g}(\mu)$ donnent des structures de Poisson transverses isomorphes.

Soit $M = \mathfrak{g}^*$ le dual d'une algèbre de Lie complexe, muni de la structure de Lie-Poisson :

$$\forall \mu \in \mathfrak{g}^*, \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \Lambda_\mu(X, Y) = \mu([X, Y])$$

La feuille symplectique passant par μ est donc l'orbite $G.\mu$.

Structure de Poisson transverse N_μ à $G.\mu$ donnée par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}(\mu) \oplus \mathfrak{n} \\ \mathfrak{g}^* &= \mathfrak{g}(\mu)^\perp \oplus \mathfrak{n}^\perp \\ T_\mu(\mathfrak{g}^*) &= T_\mu(G.\mu) \oplus \mathfrak{n}^\perp \\ T_\mu(\mathfrak{g}^*) &= T_\mu(G.\mu) \oplus T_\mu(N_\mu). \end{aligned}$$

$$N_\mu = \mu + \mathfrak{n}^\perp.$$

De plus, deux supplémentaires quelconques de $\mathfrak{g}(\mu)$ donnent des structures de Poisson transverses isomorphes.

La formule des contraintes de Dirac.

On suppose maintenant que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathcal{K}$ la forme de Killing ($\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$).

Soit $x \in \mathfrak{g}, \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(x) \oplus \mathfrak{n}$.

$$N_x = x + \mathfrak{n}^{\perp} \text{ (orthogonal } /\mathcal{K})$$

On choisit :

- Une base $(Z_i)_{1 \leq i \leq k}$ de $\mathfrak{g}(x)$,
- Une base $(X_j)_{1 \leq j \leq p}$ de $\mathfrak{n}$,
- La base duale $(\overline{Z_i}, \overline{X_j})$ (relativement à $\mathcal{K}$).

$$q = (q_1, \ldots, q_k) \longrightarrow \sum_{i=1}^{i=k} q_i \overline{Z_i}$$

définit alors un système de coordonnées linéaires pour N_x.

On pose ensuite :

$$C_N(q)_{l,m} = \mathcal{K}(x + \sum_{s=1}^{s=k} q_s \overline{Z_s}, [X_l, X_m])$$

$$D_N(q)_{l,j} = \sum_{s=1}^{s=k} q_s \mathcal{K}(\overline{Z_s}, [X_l, Z_j])$$

$$A_N(q)_{i,j} = \sum_{s=1}^{s=k} q_s \mathcal{K}(\overline{Z_s}, [Z_i, Z_j])$$

$C_N(q)$ est inversible en $q = 0$, donc dans un voisinage V de 0.
Soit $\Lambda_N(q)$ la matrice de la structure de Poisson sur N_x. $\forall q \in V$,

$$\Lambda_N(q) = A_N(q) + {}^t D_N(q) C_N(q)^{-1} D_N(q) \quad (1)$$

$\Longrightarrow$ Chaque crochet de Poisson $\{q_i, q_j\}$ de la structure transverse est rationnel en $(q_1, \ldots, q_k)$.

D'où les questions suivantes :

- Dans quels cas, cette structure est-elle polynomiale ?
- La nature " polynomiale" de la structure, lorsqu'elle existe, dépend-elle du supplémentaire choisi pour décrire cette structure ?
- Dans le cas où cette structure est polynomiale, peut-on définir une notion de "degré" de la structure, évidemment indépendant du choix du supplémentaire ?

Ces questions ont déjà été abordées par certains auteurs : M.Saint-Germain, P.Damianou, R.Cushman et M.Roberts.

$\Longrightarrow$ Chaque crochet de Poisson $\{q_i, q_j\}$ de la structure transverse est rationnel en $(q_1, \ldots, q_k)$.

D'où les questions suivantes :

- Dans quels cas, cette structure est-elle polynomiale ?
- La nature " polynomiale" de la structure, lorsqu'elle existe, dépend-elle du supplémentaire choisi pour décrire cette structure ?
- Dans le cas où cette structure est polynomiale, peut-on définir une notion de "degré" de la structure, évidemment indépendant du choix du supplémentaire ?

Ces questions ont déjà été abordées par certains auteurs : M.Saint-Germain, P.Damianou, R.Cushman et M.Roberts.

$\Longrightarrow$ Chaque crochet de Poisson $\{q_i, q_j\}$ de la structure transverse est rationnel en $(q_1, \ldots, q_k)$.

D'où les questions suivantes :

- Dans quels cas, cette structure est-elle polynomiale ?
- La nature " polynomiale" de la structure, lorsqu'elle existe, dépend-elle du supplémentaire choisi pour décrire cette structure ?
- Dans le cas où cette structure est polynomiale, peut-on définir une notion de "degré" de la structure, évidemment indépendant du choix du supplémentaire ?

Ces questions ont déjà été abordées par certains auteurs : M.Saint-Germain, P.Damianou, R.Cushman et M.Roberts.

$\Longrightarrow$ Chaque crochet de Poisson $\{q_i, q_j\}$ de la structure transverse est rationnel en $(q_1, \dots, q_k)$.

D'où les questions suivantes :

- Dans quels cas, cette structure est-elle polynomiale ?
- La nature " polynomiale" de la structure, lorsqu'elle existe, dépend-elle du supplémentaire choisi pour décrire cette structure ?
- Dans le cas où cette structure est polynomiale, peut-on définir une notion de "degré" de la structure, évidemment indépendant du choix du supplémentaire ?

Ces questions ont déjà été abordées par certains auteurs : M.Saint-Germain, P.Damianou, R.Cushman et M.Roberts.

Le cas des orbites nilpotentes adjointes.

Soit :
- $O = G.e, e \in \mathcal{N}$,
- $(h, e, f) = sl_2$-triplet associé, (h caractéristique de O),
- $\mathfrak{s} =< h, e, f >$.

Il existe deux décompositions de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i) = \bigoplus_{k} E_{n_k} \tag{2}$$

- $\mathfrak{g}(i)$ est l'espace propre associé au poids entier i, sous l'action de ad h.
- E_{n_k} est la composante irréductible, suivant l'action de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$, de plus haut poids n_k, $\mathfrak{g}(e)$ étant alors engendré par les vecteurs de plus haut poids des E_{n_k}.

On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des supplémentaires ad h-invariants de $\mathfrak{g}(e)$ dans $\mathfrak{g}$.

Proposition : *Pour tout* $(q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{C}^k$ *et tout complexe non nul* t*, on a :*

$$\begin{gathered} \forall i,j,\ \exists \nu_i, \nu_j \in \mathbb{N}, \\ C_N(t^{2+n_1}q_1, \ldots, t^{2+n_k}q_k)_{i,j} = t^{2+\nu_i+\nu_j} C_N(q_1, \ldots, q_k)_{i,j}, \\ \Delta_N(t^{2+n_1}q_1, \ldots, t^{2+n_k}q_k) = \Delta_N(q_1, \ldots, q_k) \end{gathered}$$

où $\Delta_N(q)$ *désigne le déterminant de* $C_N(q)$*.*

Théorème : *Soit* $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_h$*,* $N_e = e + \mathfrak{n}^\perp$ *la structure de Poisson transverse à G.e associée à* $\mathfrak{n}$*. La matrice* $\Lambda_N(q)$ *du bivecteur de Poisson de* N_e *est à coefficients polynômiaux en la variable* q*.*

On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des supplémentaires ad h-invariants de $\mathfrak{g}(e)$ dans $\mathfrak{g}$.

Proposition : *Pour tout* $(q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{C}^k$ *et tout complexe non nul* t*, on a :*

$$\begin{gathered} \forall i, j,\ \exists \nu_i, \nu_j \in \mathbb{N}, \\ C_N(t^{2+n_1}q_1, \ldots, t^{2+n_k}q_k)_{i,j} = t^{2+\nu_i+\nu_j} C_N(q_1, \ldots, q_k)_{i,j}, \\ \Delta_N(t^{2+n_1}q_1, \ldots, t^{2+n_k}q_k) = \Delta_N(q_1, \ldots, q_k) \end{gathered}$$

où $\Delta_N(q)$ *désigne le déterminant de* $C_N(q)$*.*

Théorème : *Soit* $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_h$*,* $N_e = e + \mathfrak{n}^\perp$ *la structure de Poisson transverse à G.e associée à* $\mathfrak{n}$*. La matrice* $\Lambda_N(q)$ *du bivecteur de Poisson de* N_e *est à coefficients polynômiaux en la variable* q*.*

On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des supplémentaires ad h-invariants de $\mathfrak{g}(e)$ dans $\mathfrak{g}$.

Proposition : *Pour tout* $(q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{C}^k$ *et tout complexe non nul* t*, on a :*

$$\begin{gathered} \forall i, j, \ \exists \nu_i, \nu_j \in \mathbb{N}, \\ C_N(t^{2+n_1} q_1, \ldots, t^{2+n_k} q_k)_{i,j} = t^{2+\nu_i+\nu_j} C_N(q_1, \ldots, q_k)_{i,j}, \\ \Delta_N(t^{2+n_1} q_1, \ldots, t^{2+n_k} q_k) = \Delta_N(q_1, \ldots, q_k) \end{gathered}$$

où $\Delta_N(q)$ *désigne le déterminant de* $C_N(q)$*.*

Théorème : *Soit* $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_h$*,* $N_e = e + \mathfrak{n}^\perp$ *la structure de Poisson transverse à* $G.e$ *associée à* $\mathfrak{n}$*. La matrice* $\Lambda_N(q)$ *du bivecteur de Poisson de* N_e *est à coefficients polynômiaux en la variable* q*.*

Quelques réponses.

- La structure transverse $N_e = e + \mathfrak{n}^{\perp}$ n'est plus nécessairement polynomiale si $\mathfrak{n} \notin \mathcal{N}_h$. (exemple de l'orbite sous-régulière de sl_4).
- Le degré de cette structure dépend fortement du choix du supplémentaire.
- La proposition 3 suggère de penser plutôt à définir une notion de "Quasi-degré".

Quelques réponses.

- La structure transverse $N_e = e + \mathfrak{n}^{\perp}$ n'est plus nécessairement polynomiale si $\mathfrak{n} \notin \mathcal{N}_h$. (exemple de l'orbite sous-régulière de sl_4).
- Le degré de cette structure dépend fortement du choix du supplémentaire.
- La proposition 3 suggère de penser plutôt à définir une notion de “Quasi-degré”.

Quelques réponses.

- La structure transverse $N_e = e + \mathfrak{n}^{\perp}$ n'est plus nécessairement polynomiale si $\mathfrak{n} \notin \mathcal{N}_h$. (exemple de l'orbite sous-régulière de sl_4).
- Le degré de cette structure dépend fortement du choix du supplémentaire.
- La proposition 3 suggère de penser plutôt à définir une notion de "Quasi-degré".

Quelques réponses.

- La structure transverse $N_e = e + \mathfrak{n}^{\perp}$ n'est plus nécessairement polynomiale si $\mathfrak{n} \notin \mathcal{N}_h$. (exemple de l'orbite sous-régulière de sl_4).
- Le degré de cette structure dépend fortement du choix du supplémentaire.
- La proposition 3 suggère de penser plutôt à définir une notion de "Quasi-degré".

Quelques résultats sur les orbites conormales.

On suppose qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{n}_0$ qui soit une algèbre de Lie (orbite conormale).
Soit $N_0 = e + \mathfrak{n}_0^{\perp}$.
Dans ce cas $C_{N_0}(q)$ ne dépend pas de q. Il s'en suit que :

- La structure transverse est polynomiale.
- Elle est aussi quadratique. ($deg_{N_0}(\Lambda) \leq 2$.)

Théorème : *Toute orbite nilpotente sphérique est conormale.*

Théorème : *Soit O une orbite nilpotente de $sl_n(\mathbb{C})$ de partition $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ telle que : polynomiale$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq s,\ |\lambda_i - \lambda_j| \leq 1$. Alors, O est conormale.*

Quelques résultats sur les orbites conormales.

On suppose qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{n}_0$ qui soit une algèbre de Lie (orbite conormale).
Soit $N_0 = e + \mathfrak{n}_0^{\perp}$.
Dans ce cas $C_{N_0}(q)$ ne dépend pas de q. Il s'en suit que :

- La structure transverse est polynomiale.
- Elle est aussi quadratique. ($deg_{N_0}(\Lambda) \leq 2$.)

Théorème : *Toute orbite nilpotente sphérique est conormale.*

Théorème : *Soit O une orbite nilpotente de $sl_n(\mathbb{C})$ de partition $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ telle que :
polynomiale$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq s, \ |\lambda_i - \lambda_j| \leq 1$. Alors, O est conormale.*

Quelques résultats sur les orbites conormales.

On suppose qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{n}_0$ qui soit une algèbre de Lie (orbite conormale).
Soit $N_0 = e + \mathfrak{n}_0^{\perp}$.
Dans ce cas $C_{N_0}(q)$ ne dépend pas de q. Il s'en suit que :

- La structure transverse est polynomiale.
- Elle est aussi quadratique. ($deg_{N_0}(\Lambda) \leq 2$.)

Théorème : *Toute orbite nilpotente sphérique est conormale.*

Théorème : *Soit O une orbite nilpotente de $sl_n(\mathbb{C})$ de partition $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ telle que :*
polynomiale$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq s,\ |\lambda_i - \lambda_j| \leq 1$. *Alors, O est conormale.*

Le cas général

Soit $x \in \mathfrak{g}$ un élément quelconque, $x = s + e$ sa décomposition de Jordan :

- s semi-simple, e nilpotent, $[s, e] = 0$.
- Il existe un sl_2-triplet (h, e, f) tel que : $[s, h] = [s, f] = 0$.
- $\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(e)$.
- l'algèbre $\mathfrak{g}(s)$ est réductive et contient (h, e, f).
- La restriction K_s de K à $\mathfrak{g}(s)$ est non dégénérée.

Soit :

- $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{g}(x) \oplus \mathfrak{n}_e$,
- $N_e = e + \mathfrak{n}_e^{\perp K_s}$

$\mathfrak{n}_e$ supplémentaire ad h-invariant. Ceci donne la structure de Poisson transverse à $G(s).e$ dans $\mathfrak{g}(s)$.

Le cas général

Soit $x \in \mathfrak{g}$ un élément quelconque, $x = s + e$ sa décomposition de Jordan :

- s semi-simple, e nilpotent, $[s, e] = 0$.
- Il existe un sl_2-triplet (h, e, f) tel que : $[s, h] = [s, f] = 0$.
- $\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(e)$.
- l'algèbre $\mathfrak{g}(s)$ est réductive et contient (h, e, f).
- La restriction K_s de K à $\mathfrak{g}(s)$ est non dégénérée.

Soit :

- $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{g}(x) \oplus \mathfrak{n}_e$,
- $N_e = e + \mathfrak{n}_e^{\perp K_s}$

$\mathfrak{n}_e$ supplémentaire ad h-invariant. Ceci donne la structure de Poisson transverse à $G(s).e$ dans $\mathfrak{g}(s)$.

On pose : $\mathfrak{n}_s = \mathfrak{g}(s)^\perp$.

On obtient :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(s) \oplus \mathfrak{n}_s$$

De plus, $\mathfrak{n}_s$ est $\mathfrak{g}(s)$-invariant.
Posons enfin : $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_e \oplus \mathfrak{n}_s$. On a :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(x) \oplus \mathfrak{n}$.
- $N_x = e + \mathfrak{n}^\perp$ est la structure transverse à l'orbite adjointe $G.x$.

On choisit ensuite des bases convenables :

- $(Z_1, \dots, Z_s)$ pour $\mathfrak{g}(x)$,
- $(X_1, \dots, X_p)$ pour $\mathfrak{n}_e$,
- $(X_{p+1}, \dots, X_q)$ pour $\mathfrak{n}_s$.

Soit $\Lambda_x(q) = A_x(q) + {}^tD_x(q)C_x^{-1}(q)D_x(q)$ la matrice de Poisson de N_x calculée avec ces bases. On obtient :

- $C_x(q)_{ij} = 0, \forall (i,j), 1 \le i \le p, p+1 \le j \le q$.
- $D_x(q)_{ij} = 0, \forall (i,j), p+1 \le i \le q, 1 \le j \le s$.

On pose : $\mathfrak{n}_s = \mathfrak{g}(s)^{\perp}$.

On obtient :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(s) \oplus \mathfrak{n}_s$$

De plus, $\mathfrak{n}_s$ est $\mathfrak{g}(s)$-invariant.
Posons enfin : $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_e \oplus \mathfrak{n}_s$. On a :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(x) \oplus \mathfrak{n}$.
- $N_x = e + \mathfrak{n}^{\perp}$ est la structure transverse à l'orbite adjointe $G.x$.

On choisit ensuite des bases convenables :

- $(Z_1, \dots, Z_s)$ pour $\mathfrak{g}(x)$,
- $(X_1, \dots, X_p)$ pour $\mathfrak{n}_e$,
- $(X_{p+1}, \dots, X_q)$ pour $\mathfrak{n}_s$.

Soit $\Lambda_x(q) = A_x(q) + {}^tD_x(q)C_x^{-1}(q)D_x(q)$ la matrice de Poisson de N_x calculée avec ces bases. On obtient :

- $C_x(q)_{ij} = 0, \forall (i,j), 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq q$.
- $D_x(q)_{ij} = 0, \forall (i,j), p+1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq s$.

Soit $C_1(q)$ la matrice de coefficient général $C_x(q)_{ij}, 1 \leq i, j \leq p$, $D_1(q)$ la matrice de coefficient général $D_x(q)_{ij}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq s$.

Théorème : *On a :* $\Lambda_x(q) = A_x(q) + {}^tD_1(q)C_1^{-1}(q)D_1(q)$. *Cette matrice est la matrice de Poisson de la structure transverse à l'orbite* $G(s).e$ *dans* $\mathfrak{g}(s)$.