Construction de représentations unipotentes associées à des orbites nilpotentes sphériques de type $\mathbf{A_n}$.

Exposé PARIS, 28 Janvier 2005.

I. Introduction et notations. Le travail dont il est question ici s'inscrit dans le contexte plus général suivant : Soit G un groupe de Lie réel, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le problème se pose de pouvoir décrire de manière suffisamment explicite le dual unitaire $\widehat{G}$ de G, c'est-à-dire l'espace des représentations unitaires irréductibles de G, l'idée étant de pouvoir donner pour chaque représentation une réalisation concrète à l'aide d'un modèle géométrique adapté. Lorsque ce groupe est nilpotent, ce dual a été paramétré par A.Kirillov, à l'aide de la famille des orbites coadjointes de G dans le dual $\mathfrak{g}^*$. Dans le cas où G est un groupe résoluble cette méthode dite "méthode des orbites" a été généralisée par les travaux de Bernat, Auslander, Kostant et Pukanszky.

Considérons le cas d'un groupe réel simple connexe et simplement connexe. Il existe alors une manière naturelle de relier le dual unitaire $\widehat{G}$ et la famille $\mathcal{N}$ des orbites nilpotentes (réelles) adjointes. En effet, soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ son algèbre enveloppante, $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie complexe correspondant.

Etant donnée une représentation π dans le dual unitaire de G, on considère la représentation correspondante $d\pi$ de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans l'espace des vecteurs C^∞ de π. Soit $Ann\pi$ l'idéal annulateur de $d\pi$. C'est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. On considère ensuite $Gr(Ann\pi)$ dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et $V(Ann\pi)$ la variété des zéros, dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de cet idéal. On sait alors qu'il existe une $G_{\mathbb{C}}$-orbite nilpotente $O_{\mathbb{C}}$ telle que :

$$V(Ann\pi) = \overline{O_{\mathbb{C}}}$$

Supposons maintenant que l'intersection $O_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}$ soit non vide. C'est alors une réunion finie de G-orbites nilpotentes réelles. Chacune de ces orbites sera alors dite "associée à π" par la méthode des orbites.

Posons-nous en fait le problème inverse et considérons une G-orbite nilpotente réelle O, $O_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée. La question est alors la suivante :
Existe-t-il un élément $\pi \in \widehat{G}$ tel que : $V(Ann\pi) = \overline{O_{\mathbb{C}}}$?

Une réponse positive a été apportée à cette question, lorsque l'orbite O est de dimension minimale, par P.Torasso ou R.Brylinski et B.Kostant selon des procédés totalement différents. La méthode utilisée par P.Torasso permet de donner une construction explicite de la représentation, alors que R.Brylinski et B.Kostant ont plutôt donné une description du module de Harish-Chandra sous-jacent.

Le point de vue qui m'a intéréssé est celui de P.Torasso et la question est de savoir si l'on peut étendre cette méthode à d'autres orbites nilpotentes que l'orbite minimale. Comme on le verra un peu plus tard, une des propriétés essentielles au processus de construction est le fait que l'orbite minimale possède une B-orbite dense, où B est un sous-groupe de Borel donné de G. Il est donc naturel d'envisager le cas des orbites nilpotentes sphériques qui, par définition, sont des orbites nilpotentes dont la complexifiée possède une $B_{\mathbb{C}}$-orbite dense.

J'ai considéré le cas où G est le revêtement à deux feuillets de $SL_n(\mathbb{R})$et appliqué la méthode de construction de Torasso pour une orbite nilpotente sphérique quelconque O de $\mathfrak{g}$. La stratégie utilisée est la suivante :

Etape 1 : Projection sur les paraboliques maximaux standards.

Soit P un sous-groupe parabolique maximal, $\mathfrak{p}$ son algèbre de Lie.En projetant O sur $\mathfrak{p}^*$, on obtient une P-orbite coadjointe O_P. En utilisant ensuite certaines paramétrisations de M.Duflo - l'une décrit l'ensemble des orbites coadjointes d'une algèbre de Lie algébrique, l'autre le dual unitaire d'un groupe algébrique supposant connu le dual unitaire d'un groupe réductif- on peut associer à O_P une famille $(\pi_{P,\tau})_{\tau\in Q_P}$ de représentations du groupe parabolique P correspondant où Q_P est un certain ensemble de paramètres à préciser.

Etape 2 : Détermination de représentations candidates.

On dispose maintenant d'une famille de représentations $(\pi_{P,\tau}), P$ parabolique, $\tau \in Q_P$. En utilisant le fait que G est produit amalgamé de ses sous-groupes paraboliques maximaux standards suivant leurs intersections deux à deux, si le rang de G est au moins trois, on amalgame les $\pi_{P,\tau}$, quand cela est possible. On obtient alors une famille $(\pi_\tau)_{\tau\in Q}$ de représentations de G.

Etape 3 : Détermination des représentations associées.

On sait que chaque élément de la famille précédente est associée à une orbite nilpotente complexe O_π. La difficulté est de montrer que $O \in O_\pi \cap \mathfrak{g}$. On montre, dans un premier temps, que la dimension de Gelfand-Kirillov de π, c'est-à-dire la dimension de Gelfand-Kirillov du quotient $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/Ann\pi$ ou encore la dimension de $V(Ann\pi)$, est égale à la dimension de l'orbite O. Malheureusement, il existe plusieurs orbites complexes de dimension donnée... Par contre, il n'existe dans sl_n qu'une seule orbite sphérique complexe de dimension donnée. On montre alors que l'orbite O_π contient une $B_\mathbb{C}$-orbite ouverte, ce qui achève la construction.

Les différences entre le cas minimal, traité par P.Torasso, et le cas sphérique apparaissent essentiellement dans les étapes 2 et 3. Je montrerai le moment venu où se situent ces difficultés supplémentaires.

Quelques notations. A partir de maintenant, $\mathfrak{g}$ désignera l'algèbre de Lie $sl_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 4$ et G le revêtement à deux feuillets de $SL_n(\mathbb{R})$. On considère, dans $\mathfrak{g}$ le système usuel de racines de type A_{n-1}, dont $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ est une base de racines simples. Soit B le sous-groupe de Borel associé.

Chaque orbite nilpotente de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ correspond à une partition de l'entier n. Les orbites nilpotentes sphériques sont alors données par les partitions du type : $(2^k, 1^{n-2k}), 1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$.On notera O_k^C l'orbite correspondant à la partition précédente. L'intersection $O_k^C \cap \mathfrak{g}$ est formée d'une ou de deux orbites. On notera $O_{k,\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$ les deux orbites sphériques réelles correspondant à la partition précédente, en sachant que :

- Si $k < \frac{n}{2}, O_{k,1} = O_{k,-1}$
- Si $k = \frac{n}{2}$, il y a deux orbites distinctes.

On sera donc amené à considérer à part le cas des orbites sphériques maximales.

Pour tout $i, 1 \leq i \leq n-1$, on introduit le parabolique maximal standard P_i et son algèbre de Lie $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{n}_i$, la partie semi-simple $\mathfrak{m}_i$ étant engendrée par l'ensemble $\Pi \backslash \{\alpha_i\}$.

II. Construction d'une famille de représentations "candidates".

• Retour sur les paramétrisations de Duflo.

On se donne un groupe algébrique réel P, son algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ et$f \in \mathfrak{p}^*.f$ définit une forme bilinéaire alternée notée B_f. On rappelle qu'une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{p}$ sera dite "de type fortement unipotent" si elle est co-isotrope relativement à B_f et si, de plus, on a : $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}(f) + {}^u\mathfrak{b}$. Le forme f sera alors dite "de type unipotent" s'il existe une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à B_f et si, de plus, le noyau de f contient un facteur réductif de $\mathfrak{p}(f)$.

Etant donnée une forme f, il existe toujours une forme de type unipotent g sur $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type fortement unipotent telles que :

- f et g ont même restriction à ${}^u\mathfrak{b}$.

- Si l'on note λ la restriction de f à un facteur réductif $r(g)$ de $\mathfrak{p}(q)$, alors l'orbite $P.f$ ne dépend ni de $\mathfrak{b}$, ni de f, mais uniquement du couple (g, λ). On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des orbites coadjointes de $\mathfrak{p}^*$ sur l'ensemble, modulo P, des couples (g, λ) où g est une forme de type unipotent et λ un élément du dual de $r(g)$.

En particulier, si f est de type unipotent, alors $P.f = O_{f,0}$. Dans le cas de l'orbite minimale, on constate que la projection sur les paraboliques maximaux donne à chaque fois des orbites de type unipotent, ce qui limite le nombre de paramètres caractérisant cette projection. cette situation n'est plus vraie lorsque l'orbite est sphérique non minimale.

Soit g une forme de type unipotent, $P(g)$ son stabilisateur dans $P, R(g)$ un facteur réductif de $P(g)$ et $R(g)^p$ l'extension métaplectique correspondante. On définit l'ensemble : $Y(g) = \{\tau \in R(g)^p / \tau(e) = -Id\}, e$ étant l'élément non trivial du noyau de cette extension. Dans cet ensemble, il existe des éléments intéressants, ce sont les paramètres d'admissibilité de l'orbite, soit : $Y_{adm}(g) = \{\tau \in Y(g) \ / \ d\tau = 0\}$. Si $Y_{adm}(g) \neq \emptyset$, on dit que l'orbite $P.g$ est admissible.

A tout couple (g, τ), g de type unipotent et $\tau \in Y(g)$, M.Duflo associe une représentation unitaire irréductible $\pi_{g,\tau}$ et paramétrise de cette façon le dual unitaire de P. Sans rentrer dans les détails, disons que $\pi_{g,\tau}$ se construit à partir du choix d'une sous-algèbre de type unipotent $\mathfrak{b}$: on construit une représentation du groupe correspondant B du type $\tau \otimes S_g T_g$, où T_g est la représentation de Kirillov du radical unipotent de B associée à la restriction de q et S_q la représentation métaplectique de $R(q)^p$ agissant sur l'espace de T_g. En induisant à P, on obtient :

$$\pi_{g,\tau} = \mathrm{I}nd_B^P(\tau \otimes S_g T_g)$$

Cette construction ne dépend pas du choix de $\mathfrak{b}$.

En résumé, si O est une orbite nilpotente de G et si on s'intéresse à sa projection $P.f$ sur le dual d'une sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{p}$, on considère le couple (g, λ) donné par la première paramétrisation.

Si $f = g, \lambda = 0$, ce qui est toujours le cas pour l'orbite minimale, on choisit un paramètre $\tau \in Y_{adm}(f)$(sous réserve que l'orbite $P.f$ soit P-admissible) et on lui associe alors l'ensemble $(\pi_{f,\tau}, \tau \in Y_{adm}(f))$ qui, à priori,est un ensemble fini.

Si f n'est pas de type unipotent, la situation est plus compliquée, car on associe dans ce cas à $P.f$, une famille $(\pi_{g,\tau})$, g étant la forme de type unipotent donnée par la première paramétrisation de Duflo et τ un paramètre dans $Y(g)$ relié d'une certaine façon à λ. C'est le cas qui va se produire pour les orbites nilpotentes sphériques non minimales.

• Les restrictions aux paraboliques maximaux. Soit donc $O_{k,\varepsilon} = G.X_{k,\varepsilon}$ une orbite nilpotente sphérique. On montre tout d'abord que $O_{k,\varepsilon}$ contient une seule B-orbite dense notée $B.X_{k,\varepsilon}$.

Soit $f_{k,\varepsilon}$ un élément de $\mathfrak{g}^*$ correspondant à $X_{k,\varepsilon}$ via la forme de Killing et $f_{i,k,\varepsilon}$ la restriction de $f_{k,\varepsilon}$ à la sous-algèbre $\mathfrak{p}_i$. On identifie naturellement $\mathfrak{g}$ à son dual $\mathfrak{g}^*$, via la forme de Killing, et on note $Res_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{p}_i^*$ l'opération de restriction, moyennant l'identification précédente.

On obtient alors les résultats suivants :

Proposition :
i) la P_i-orbite $P_i.X_{k,\varepsilon}$ est l'unique P_i-orbite ouverte dense contenue dans $O_{k,\varepsilon}$.
ii) L'application Res_i induit un difféomorphisme de $P_i.X_{k,\varepsilon}$ sur $P_i.f_{i,k,\varepsilon}$.
iii) Chaque P_i-orbite $P_i.f_{i,k,\varepsilon}$ est P_i-admissible.

On définit, ensuite, la forme linéaire $g_{i,k,\varepsilon}$ sur $\mathfrak{p}_i$ par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i,\ g_{i,k,\varepsilon}(x) &= 0, \\ \forall x \in \mathfrak{n}_i, g_{i,k,\varepsilon}(x) &= f_{i,k,\varepsilon}(x) \end{aligned}$$

On vérifie que $g_{i,k,\varepsilon}$ est de type unipotent et on se donne un facteur réductif $r(g_{i,k,\varepsilon})$ de son centralisateur. On considère enfin la restriction de $f_{i,k,\varepsilon}$ à $r(g_{i,k,\varepsilon})$ que nous noterons $\lambda_{i,k,\varepsilon}$. On obtient :

Proposition : *Les paramètres de Duflo pour la P_i-orbite $P_i.X_{k,\varepsilon}$ sont les suivants :*

$$\begin{aligned} \forall i, i < k,\ P_i.X_{k,\varepsilon} &= O_{g_{i,k,\varepsilon},\lambda_{i,k,\varepsilon}} \\ \forall i, k \leq i \leq n-k,\ P_i.X_{k,\varepsilon} &= O_{f_{i,k,\varepsilon},0} \\ \forall i, n-k < i,\ P_i.X_{k,\varepsilon} &= O_{g_{i,k,\varepsilon},\lambda_{i,k,\varepsilon}} \end{aligned}$$

En particulier, la forme $f_{i,k,\varepsilon}$ est de type unipotent, pour tout $i, k \leq i \leq n-k$.

Il faut maintenant construire les P_i- représentations de type Duflo associées à ces données. On dispose donc, pour chaque valeur de l'indice $i, 1 \leq i \leq n-1$, d'un ensemble de paramètres $Y_{i,k,\varepsilon}$ défini par :

- Si $i < k$ ou si $i > n-k$, $Y_{i,k,\varepsilon} = Y(g_{i,k,\varepsilon})$.
- Si $k \leq i \leq n-k, Y_{i,k,\varepsilon} = Y_{adm}(f_{i,k,\varepsilon})$.

On peut d'ailleurs au passage constater que, pour $k = 1$, ce qui correspond à l'orbite minimale, tous les ensembles de paramètres se réduisent aux paramètres d'admissibilité.

On définit ainsi une famille $\pi_i^k(\tau, \varepsilon)$ de P_i-représentations de type Duflo, donnée par :

$$\pi_i^k(\tau,\varepsilon) = \mathrm{Ind}_{B_{i,k,\varepsilon}}^{P_i} \tau_{i,k,\varepsilon} \otimes S_{i,k,\varepsilon}.T_{i,k,\varepsilon},\ \tau_{i,k,\varepsilon} \in Y_{i,k,\varepsilon}$$

• Construction d'une famille de représentations "candidates". On va appliquer le résultat suivant :

Théorème : *Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang p supérieur ou égal à 3, soit (Q_i) la famille des sous-groupes paraboliques maximaux standards de L, associée à sous-groupe de Borel B_L. Soit $\pi_i, 1 \leq i \leq p$, une représentation unitaire irréductible de Q_i. On suppose que :*
(i) Pour tous $i, j, 1 \leq i \leq j \leq p$, les restrictions de π_i et π_j à $Q_i \cap Q_j$ sont équivalentes.
(ii) pour tout i, la restriction de π_i à B_L est irréductible.
Alors, il existe une représentation unitaire irréductible et une seule π de L telle que :

$$\forall i,\ \pi_{|Q_i} = \pi_i$$

On précise simplement que la représentation obtenue n'est autre que le produit amalgamé, suivant leurs intersections deux à deux, des représentations π_i, qui, selon J.Tits, n'est solution du problème que si le rang est au moins 3.

Il faut donc vérifier que les hypothèses i) et ii) sont satisfaites. Cette partie est très technique, je ne la détaillerai pas ici. En fait, c'est à cette occasion que l'on va être amené à fixer les paramètres convenables, à partir des ensembles $Y_{i,k,\varepsilon}$, qui vont indexer la famille candidate. Pour fixer les idées, indiquons simplement les étapes de cette vérification ;

- 1) On constate que que tout se ramène à construire la famille de paramètres $(\tau_{i,k,\varepsilon})_i, \tau_{i,k,\varepsilon} \in Y_{i,k,\varepsilon}$, pour $i, 1 \leq i \leq k$.

- 2) Il se trouve que les groupes réductifs, sur lesquels sont définis ces paramètres, sont rangés en ordre décroissant $G_k \subset \cdots \subset G_1$. Selon les arguments introduits précedemment, le premier paramètre correspondant au groupe G_k est toujours un paramètre d'admissibilité χ . Le principe consiste ensuite à construire de proche en proche, par "amalgames successifs" tous les autres paramètres à partir de χ.

- 3) Le point important est le passage de G_k à G_{k-1}. Trois cas se présentent à cette occasion :

- Si $k < [\frac{n}{2}]$, alors $G_{k-1} \simeq \widetilde{SL_{n-2k+2}(\mathbb{R})}$ qui est de rang supérieur ou égal à 4. La forme $\lambda_{k-1,k,\varepsilon}$ engendre l'orbite minimale de l'algèbre de Lie de ce groupe et on peut donc utiliser la méthode de Torasso pour construire, $\tau_{k-1,k,\varepsilon}$ à partir de χ et $\lambda_{k-1,k,\varepsilon}$, les autres paramètres $\tau_{i,k,\varepsilon}$ sont alors obtenus par amalgames successifs à partir de $\tau_{k-1,k,\varepsilon}$ et donc à partir de χ. (Ici, le paramètre ε ne joue aucun rôle).

Avec ces choix de paramètres, on vérifie que que les conditions 1) et 2) du théorème sont satisfaites En conséquence, on obtient une famille "candidate" qui est de la forme $\pi_\chi, \chi \in Y_{Adm}(f_k)$.

- Si $n = 2p+1, k = p$, alors $G_{k-1} = \widetilde{SL_3(\mathbb{R})}$. On constate que la situation ne nous fournit qu'un seul choix pour $\tau_{k-1,k,\varepsilon}$, qui n'est autre que l'une des représentations minimales, ρ, de $\widetilde{SL_3(\mathbb{R})}$. On procède ensuite par amalgames successifs pour obtenir les autres paramètres. Finalement, il n'existe qu'une seule représentation "candidate" , notée π_ρ. (ici encore, le paramètre ε ne joue aucun rôle.)

- Si $n = 2p, k = p$, alors $G_{k-1} = \Gamma.\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, Γ étant un sous-groupe fini. Cette fois, on constate qu'il faut choisir $\tau_{k-1,k,\varepsilon}$ dans un ensemble $\mathcal{D}(\chi, \varepsilon)$, défini par les paramètres ε, χ et certains éléments de la série discrète de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. On procède ensuite par amalgames successifs pour obtenir les autres paramètres. On en déduit un ensemble $\pi_\tau, \tau \in \mathcal{D}(\chi, \varepsilon)$, de représentations candidates.

III. Représentations unipotentes associées à chaque orbite sphérique.

Désignons par Π_k l'ensemble des représentations "candidates" définies précedemment pour une orbite sphérique $O_{k,\varepsilon}$. Il s'agit maintenant de vérifier que chaque $\pi \in \Pi_k$ est "associé" à $O_{k,\varepsilon}$, en ce sens que :

$$V(Ann\pi) = \overline{O_k^C}$$

O_k^C étant l'orbite nilpotente complexifiée de $O_{k,\varepsilon}$.

Soit $\pi \in \Pi_k$. La première étape est de calculer la dimension de Gelfand-Kirillov de π, c'est-à-dire la dimension de Gelfand-Kirillov de l'algèbre quotient $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/Ann\pi$.

On considère les restrictions π_i de π aux paraboliques P_i. Comme π_i est une P_i-représentation de type Duflo, on utilise certains résultats de Duflo sur la GKdimension d'une telle représentation et en considérant π_k qui a l'avantage de ne dépendre que d'un paramètre d'admissibilité χ, on montre que :

$$GKdimU((\mathfrak{p}_k)_{\mathbb{C}})/Ann\pi_k = \dim O_{k,\varepsilon}$$

Or, l'injection canonique $U((\mathfrak{p}_k)_{\mathbb{C}}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ induit un morphisme injectif de $U((\mathfrak{p}_k)_{\mathbb{C}})/Ann\pi_k$ sur $U((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/Ann\pi$. Ceci implique que :

$$GKdim\pi \geq \dim O_{k,\varepsilon}$$

Ensuite, on a le résultat suivant :

Proposition : *Il existe une variété algébrique complexe $\mathbb{X}_k$, dont la dimension est $\frac{1}{2}\dim O_{k,\varepsilon}$, des morphismes d'algèbres $\phi_i : U(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_k), i \in \{k, k+1\}$ ou $i \in \{k-1, k\}, \mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$ désignant l'algèbre des opérateurs différentiels réguliers sur $\mathbb{X}_k$, tels que :*

$$\begin{aligned} Ann\pi_i &= \ker \phi_i, \\ (\phi_i)_{|\ U(\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j)} &= (\phi_j)_{|\ U(\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j)},\ (i,j) \in \{k, k+1\} \text{ ou } (i,j) \in \{k-1, k\} \end{aligned}$$

Ce résultat s'obtient au terme de calculs plutôt fastidieux consistant en la détermination d'un espace de la représentation et de formules explicites pour la représentation dérivée $d\pi_i,\ i = k-1, k, k+1$.

Comme $\mathfrak{g}$ est engendrée par deux paraboliques maximaux, on déduit de ce résultat l'existence d'un morphisme injectif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/Ann\pi$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$. D'où :

$$GKdim\pi \leq GKdim\mathbb{D}(\mathbb{X}_k) = 2\dim \mathbb{X}_k = \dim O_{k,\varepsilon}$$

Ainsi, on a :

$$GKdim\pi = \dim O_{k,\varepsilon}$$

On déduit de ceci que, si O_π désigne l'orbite nilpotente complexe telle que : $V(Ann\pi) = \overline{O_\pi}$, alors : $\dim O_\pi = \dim O_{k,\varepsilon}$.

Il reste à prouver que l'orbite O_π contient une $B_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte.

Etant donné un groupe réel simple connexe et simplement connexe G, on reprend les notations précédentes et on considère un sous-groupe de Borel B de G. Soit $\pi \in \widehat{G}, \pi_B$ sa restriction à B, I l'annulateur de π dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et I_B l'annulateur de π_B dans $U(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Comme I est un idéal primitif, il est premier, donc I_B est un idéal premier de $U(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ et on notera J_B l'idéal de $S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ inverse de I_B par l'application de Dixmier. Soit, enfin, O_π l'orbite nilpotente complexe telle que : $V(I) = \overline{O_\pi}$.

On a le théorème suivant, dont la démonstration repose fortement sur des résultats de J.Y.Charbonnel concernant l'inverse de l'application de Dixmier :

Théorème : *On suppose que la représentation π satisfait aux trois hypothèses suivantes :*

- (1) L'idéal I_B est primitif.

- (2) L'idéal J_B est un idéal gradué de $S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$.

- (3) $GKdim\pi = GKdim\pi_B = GKdim(S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})/J_B)$.

Alors, la $G_{\mathbb{C}}$-orbite O_π contient une $B_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte.

Ces différentes hypothèses sont manifestement remplies pour les éléments de Π_k. En effet, pour $\pi \in \Pi_k$:

- I_B est primitif, cela résulte du fait que π_B est une B-représentation de type Duflo.

- On vérifie d'autre part que $\widetilde{J_B}$ est l'idéal d'une $B_{\mathbb{C}}$-orbite conique et donc qu'il est gradué.
- Enfin, l'hypothèse (3) se déduit des calculs de GKdimension faits précedemment.

Ceci nous donne le résultat final.