

Développements limités

Ex 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(2x)$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note P_n le développement limité d'ordre n de f en 0.

- (1) Calculer P_n pour $1 \leq n \leq 5$.
- (2) Représenter graphiquement f, P_1, P_2 et P_4 dans un repère orthonormé pour $x \in [-1, 1]$.
- (3) Pour $x = 0,25$ et $x = 0,5$, calculer avec une machine $f(x), P_2(x), f(x) - P_2(x), P_4(x), f(x) - P_4(x)$.

Ex 2.

- (1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Donner le développement limité d'ordre 2 de f en $a = 0$ et $a = 1$.
- (2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$. Donner le développement limité d'ordre 6 de f en 0. Donner le développement limité d'ordre 2 de f en π .
- (3) Donner le développement limité d'ordre 4, 5 et 6 de $x \mapsto \sin(x)$ en 0.
- (4) Donner le développement limité d'ordre 3 de $x \mapsto \sin(3x)$ en 0.
- (5) Donner le développement limité d'ordre n de $x \mapsto \exp(x)$ en 0.
- (6) Donner le développement limité d'ordre 2 de $x \mapsto \exp(x^2)$ en $a = 0$ et $a = 1$.
- (7) Soit $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Donner le développement limité d'ordre 2 de f en 1.

Ex 3. Soit $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$.

- (1) Montrer que f est une bijection de I sur $[-1, 1]$. On note \arcsin la fonction réciproque de f .

- (2) Sans utiliser de valeur approchée, calculer $\arcsin 1$, $\arcsin(\sin(2\pi))$, $\arcsin(\sin(9\pi/4))$.
- (3) Montrer que la fonction \arcsin est impaire.
- (4) Montrer que la fonction \arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- (5) En admettant que \arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$, montrer que

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

pour tout $x \in] - 1, 1[$. Indication : dériver la fonction $x \mapsto \arcsin(f(x))$.

- (6) Etant donné le développement limité de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$, calculer le développement limité d'ordre $2n + 1$ en 0 de \arcsin .

Ex 4. Calculer le développement limité d'ordre

- (1) 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x} \ln(1-2x)$.
- (2) 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}/\ln(2+x)$.
- (3) 2 en $a = 2$ de $x \mapsto \ln(x)$.
- (4) 3 en $a = 0$ de $x \mapsto \frac{1}{1+2x+x^2}$.

Ex 5.

- (1) Calculer le développement limité d'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction *tangente*.
- (2) Calculer le développement limité d'ordre n en $a = 0$ de la fonction *sinus hyperbolique*, notée sh est définie par

$$sh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- (3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - sh(x)}{x^3}$.

[http ://www-math.univ-poitiers.fr/~rougirel/capes_interne/frame2.html](http://www-math.univ-poitiers.fr/~rougirel/capes_interne/frame2.html)