SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

1. Suites numériques

Définition 1.1. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Toute application u de D vers $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) s'appelle une suite réelle (resp. complexe). Une suite réelle ou complexe s'appelle une suite numérique.*

Notation : $u = (u_n)_{n\in D}$.

Définition 1.2. *Soit u, v deux suites numériques définies sur D. On dit que*

(1) *u est dominée par v et on note $u = O(v)$ s'il existe $M \geq 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*
$$|u_n| \leq M|v_n| \quad \forall n \in D \cap [n_0, \infty[.$$

(2) *u est négligeable devant v et on note $u = o(v)$ si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que*
$$|u_n| \leq \varepsilon |v_n| \quad \forall n \in D \cap [n_\varepsilon, \infty[.$$

(3) *u est équivalente à v et on note $u \sim v$ si*
$$u - v = o(v).$$

En particulier, si
$$v_n \neq 0 \quad \forall n \in D = \mathbb{N}$$
alors
$$u = O(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } \mathbb{R},$$
$$u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$
$$u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \to 1 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Si u et v sont des suites de terme général u_n et v_n, on note $u_n = O(v_n)$ à la place de $u = O(v)$.

Proposition 1.1. *Soit u et v deux suites définies sur une partie infinie D de $\mathbb{N}$. Alors $u = o(v)$ si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in D}$ convergeant vers 0 et un entier n_1 tels que*
$$|u_n| \leq \varepsilon_n |v_n| \quad \forall n \in D \cap [n_1, \infty[.$$

<u>Ex</u> : (1) $u \sim v \iff v \sim u$.
(2) $n^\alpha = o(n^\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$.
(3) $n \sim n + \ln n$.

Bornes supérieures et inférieures.

Théorème 1.1. *Soit E une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors E admet un plus petit majorant $M \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire*

(1) $x \leq M$, $\forall x \in E$.

(2) $M \leq M'$ *pour tout majorant* M' *de* E.

M s'appelle la *borne supérieure* de E et se note

$$M = \sup E = \sup\{x \mid x \in E\} = \sup_{x \in E} x.$$

Si $E \neq \emptyset$ n'est pas majorée alors on pose $\sup E = +\infty$.

Corollaire 1.1. *Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*

De même, toute partie non vide et minorée E de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant appelé *borne inférieure* de E et noté $\inf E$.

Suites de Cauchy. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.3. *Etant donnée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de K, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\varepsilon_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} |u_{n+p} - u_n|.$$

Si $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on dit que (u_n) est une suite de Cauchy dans K.

Théorème 1.2. *Toute suite de Cauchy dans K est convergente dans K.*

Accélération de la convergence d'une suite par la méthode de Richardson-Romberg.

Théorème 1.3. *Soit $a, k_1, k_2, \lambda \in \mathbb{C}$ et (u_n) une suite complexe vérifiant*

$$u_n = a + \lambda k_1^n + O(k_2^n) \quad \text{avec } |k_2| < |k_1| < 1.$$

Alors la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{u_{n+1} - k_1 u_n}{1 - k_1}$ vérifie $v_n = a + O(k_2^n)$.

2. Séries numériques

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ une suite numérique et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$S_0 = u_0, \quad S_n = S_{n-1} + u_n \quad \forall n \geq 1.$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *suite des sommes partielles* de (u_n).

Séries convergentes.

Définition 2.1. *Le couple $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ constitué des suites (u_n) et (S_n) s'appelle la série numérique de terme général u_n et se note $\sum u_n$.*

Définition 2.2. *On dit que la série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) converge dans K. Dans ce cas, la limite S de (S_n) est appelée la somme de la série et on note*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n\geq 0} u_n = S.$$

Si (S_n) diverge alors on dit que $\sum u_n$ diverge.

Ex : (1) Soit $r \in \mathbb{C}$ fixé. $\sum r^n$ s'appelle la série géométrique de raison r.

• Si $|r| < 1$ alors $\sum r^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

• Si $|r| \geq 1$ alors $\sum r^n$ diverge.

(2) Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha \leq 1$.

Définition 2.3. *La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème 2.1. *Toute série numérique absolument convergente est convergente.*

Démonstration.

Ex : Pour tout $\alpha > 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge car $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

Séries à termes positifs.

Théorème 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \in [0, \infty[$ et on pose*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Si la suite (S_n) est bornée dans $\mathbb{R}$ alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 2.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty[$ des suites réelles positives telles que $u_n/v_n \to k \in \mathbb{R}$. Alors*

(1) *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*

(2) *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

(3) *Si $k \neq 0$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature. En particulier, si (u_n) et (v_n) sont équivalentes alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Critères de convergence.

Théorème 2.4. *Règle de Cauchy. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. On suppose que la suite de terme général $|u_n|^{1/n}$ converge et on note*

$$L = \lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n}.$$

(1) *Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.*

(2) *Si $L > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*

Théorème 2.5. *Règle de d'Alembert. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$. On suppose que la suite de terme général $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admet une limite L lorsque $n \to \infty$.*

(1) *Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.*

(2) *Si $L > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*

Séries semi-convergentes.

Définition 2.4. *Une série est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Définition 2.5. $\sum u_n$ *est dite alternée si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *s'écrit*

$$u_n = (-1)^n v_n,$$

où (v_n) *est une suite réelle, décroissante et convergeant vers* 0.

Théorème 2.6. *Toute série alternée* $\sum u_n$ *est convergente. De plus, si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

alors

$$S_{2n+1} \leq \sum_{k \geq 0} u_k \leq S_{2n}.$$

<u>Ex</u> : La *série harmonique alternée* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

La transformation d'Abel.

Lemma 2.1. *Soit* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites complexes. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (S_k - S_{k-1}) = \varepsilon_n S_n - \varepsilon_1 S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$$

Cette identité s'appelle la transformation d'Abel.

Théorème 2.7 (Hors programme)**.** *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *telle que la suite de terme général*

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

soit bornée dans $\mathbb{C}$. *Soit* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive décroissant vers zéro. Alors la série* $\sum \varepsilon_n v_n$ *est convergente.*

Corollaire 2.1 (Hors programme)**.** *Soit* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive décroissant vers zéro et* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. *Alors les séries* $\sum \varepsilon_n e^{in\alpha}$, $\sum \varepsilon_n \cos n\alpha$, $\sum \varepsilon_n \sin n\alpha$ *convergent. En particulier, les séries* $\sum \frac{1}{n^\beta} \cos n\alpha$ *et* $\sum \frac{1}{n^\beta} \sin n\alpha$ *convergent pour tout* $0 < \beta \leq 1$.