INTÉGRATION

Cauchy (1823), Riemann (1854), Lebesgue (1901).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. L'intégrale de Cauchy

Soit a, b des réels tels que $a < b$. On suppose que $I = [a, b]$.

1.1. Intégration des fonctions uniformément continues.

Définition 1.1. (1) *Une subdivision σ de $[a, b]$ est une suite finie $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ vérifiant*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

(2) *Le pas d'une subdivision σ, noté $h(\sigma)$ est*

$$h(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n-1} x_{i+1} - x_i.$$

(3) *L'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ est noté E.*

(4) *Pour toute subdision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de E, on note*

$$S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i).$$

<u>Ex</u> : si $n \geq 1$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ pour $i = 0, \dots, n$ alors

$$\sigma_n^c := (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E.$$

Théorème 1.1 (Cauchy)**.** *Si f est uniformément continue sur $[a, b]$ alors il existe $J \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\sigma \in E$*

$$S(\sigma) \to J \quad \text{lorsque } h(\sigma) \to 0$$

c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\sigma \in E$

$$h(\sigma) \leq h_\varepsilon \Longrightarrow |S(\sigma) - J| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2. *Le nombre J s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$.*
Notation : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1.2. Intégration des fonctions continues.

Théorème 1.2. *Si f est continue sur $[a, b]$ alors il existe $J \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\sigma \in E$*

$$S(\sigma) \to J \quad \text{lorsque } h(\sigma) \to 0.$$

Démonstration.

Agrégation interne - 14 octobre 2009.

1.3. **Intégration des fonctions continues par morceaux.**

Définition 1.3. *On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(x_0,\cdots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i=0,\cdots,n-1$, f soit la restriction à $]x_i,x_{i+1}[$ d'une fonction continue sur $[x_i,x_{i+1}]$.*

Définition 1.4. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors pour tout $i=0,\cdots,n-1$, il existe $g_i:[x_i,x_{i+1}]\to\mathbb{R}$ continue sur $[x_i,x_{i+1}]$ qui coïncide avec f sur $]x_i,x_{i+1}[$. Alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ est*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.4. **Intégration des fonctions à valeurs vectorielles.** Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $I:=[a,b]$ et $f:I\to E$ une fonction continue par morceaux sur I.

Proposition 1.1. *Soit $(e_1,\dots,e_N)$, $(e'_1,\dots,e'_N)$ deux bases de E. Pour tout $x\in I$, on note $(f_1(x),\dots,f_N(x))$ et $(g_1(x),\dots,g_N(x))$ les coordonnées respectives de $f(x)$ dans les bases $(e_1,\dots,e_N)$ et $(e'_1,\dots,e'_N)$. Alors, pour tout $i=1,\dots,N$, les fonctions f_i et g_i sont continues par morceaux sur I et*

$$\sum_{i=1}^N\int_I f_i(x)\,\mathrm{d}x\, e_i=\sum_{i=1}^N\int_I g_i(x)\,\mathrm{d}x\, e'_i.$$

Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^N\int_I f_i(x)\,\mathrm{d}x\, e_i$ s'appelle l'intégrale de f sur I et se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

<u>Ex</u> : Si $E=\mathbb{C}$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b Re\, f(x)\,\mathrm{d}x+i\int_a^b Im\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Intégrales impropres

Définition 2.1. *La fonction f est dite localement continue par morceaux sur I si pour tout intervalle compact $[c,d]$ inclus dans I, la restriction de f à $[c,d]$ est continue par morceaux sur $[c,d]$.*

<u>Ex</u> : La fonction

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases},$$

n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ mais sa restriction à $]0,1[$ est localement continue par morceaux sur $]0,1[$.

Dans la suite, on supposera que $a\in\mathbb{R}$, $b\in]a,\infty]$ et $I=[a,b[$.

Définition 2.2. *On suppose que f est localement continue par morceaux sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente si la fonction*

$$I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

a une limite lorsque $x \to b$; cette limite, notée $\int_a^b f(t)dt$, s'appelle alors l'intégrale impropre de f sur $[a,b[$. On a donc

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt.$$

Ex : L'intégrale sur $[0,\infty[$ de $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t}$ est convergente et

$$\int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

Théorème 2.1. *(Critère de Cauchy) Supposons f localement continue par morceaux sur I. Alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in I$ tel que*

$$x, y \in I,\ x_\varepsilon \le x < y < b \Longrightarrow \Big|\int_x^y f(t)dt\Big| \le \varepsilon.$$

Définition 2.3. *Supposons f localement continue par morceaux sur I. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.*

Théorème 2.2. *Si f localement continue par morceaux sur I et $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.*

Démonstration. A faire en exercice. Indication : utiliser le critère de Cauchy.

Théorème 2.3. *Soit $I = [a,b[$ et $f, g : I \to [0,\infty[$ deux fonctions localement continues par morceaux sur I. Si f et g sont équivalentes au voisinage de b alors les intégrales impropres*

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t)dt$$

sont de même nature.

Ex : $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}dt$ converge d'après le théorème 2.3 car $0 \le \frac{\sqrt{1+t}}{t^2} \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ lorsque $t \to \infty$.

3. Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit a, b des réels tels que $a < b$. On suppose que $I = [a,b]$.

Théorème 3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Si (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ alors la fonction*

$$[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

est intégrable sur $[a,b]$ *et*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Démonstration. A faire en exercice.

Théorème 3.2. *(Continuité par rapport à un paramètre) Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et*

$$\begin{aligned} f : [a,b]\times U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto f(x,t), \end{aligned}$$

une fonction continue sur $[a,b]\times U$*. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_a^b f(x,t)dx \end{aligned}$$

est continue sur U*.*

Théorème 3.3. *(Dérivabilité par rapport à un paramètre) Soit* J *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a,b]\times J \to \mathbb{R}$ *une fonction vérifiant*

(1) *Pour tout* $t \in J$*, la fonction* $[a,b] \to \mathbb{R}$*,* $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* $[a,b]$*.*

(2) *Pour tout* $x \in [a,b]$*, la fonction* $J \to \mathbb{R}$*,* $t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable sur* J *et*

$$[a,b]\times J \to \mathbb{R}, \qquad (x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$$

est continue sur $[a,b]\times J$*.*

Alors la fonction $J \to \mathbb{R}$*,* $t \mapsto \int_a^b f(x,t)dx$ *est dérivable sur* J *et pour tout* $t \in J$*,*

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx.$$

4. Intégration numérique

Soit a, b des réels tels que $a < b$. Soit $I = [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Polynômes d'interpolation de Lagrange.

Théorème 4.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \le b$*. Alors il existe un unique polynôme* P_n *de degré inférieur ou égal à* n *tel que*

$$P_n(x_i) = f(x_i) \qquad \forall i = 0, \cdots, n.$$

De plus,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x),$$

où ℓ_i est le polynôme défini par

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0,\cdots,n \\ j\neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Définition 4.1. *Le polynôme P_n ci-dessus s'appelle le $n^{\text{ème}}$ polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \cdots, x_n$.*

Ex : Si $n = 1$ alors

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Quadratures par interpolation.

Formules simples. On approxime $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ par $I_n(f) = \int_a^b P_n(x)dx$. Puisque

$$\int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx,$$

il suffit de calculer $a_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$ pour $i = 0, \cdots, n$.

Méthode des milieux : On a

$$n = 0, \qquad x_0 = \frac{a+b}{2}, \qquad \ell_0(x) = 1, \qquad a_0 = b - a,$$

donc

$$I_0(f) = (b-a)f\big(\frac{a+b}{2}\big).$$

Méthode des trapèzes : On a

$$n = 1, \qquad x_0 = a, \qquad x_1 = b,$$

$$\ell_0(x) = \frac{b-x}{b-a}, \qquad \ell_1(x) = \frac{a-x}{a-b}, \qquad a_0 = a_1 = \frac{b-a}{2},$$

donc

$$I_1(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a).$$

Méthode de Simpson : On a

$$n = 2, \qquad x_0 = a, \qquad x_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x_2 = b,$$

$$a_0 = \frac{b-a}{6}, \qquad a_1 = \frac{2}{3}(b-a), \qquad a_2 = \frac{b-a}{6},$$

donc

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b)\Big).$$

Estimation de l'erreur de quadrature

Théorème 4.2. *Méthode des trapèzes. Si f est une fonction de classe C^2 sur I alors*

$$\big|I(f) - I_1(f)\big| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{x\in I} |f''(x)|.$$

Théorème 4.3. *Méthode de Simpson. Si f est une fonction de classe C^4 sur I alors*

$$\big|I(f) - I_2(f)\big| \leq \frac{(b-a)^5}{4!5!} \sup_{x\in I} |f^{(4)}(x)|.$$

Formules composées. On décompose l'intervalle d'intégration en plusieurs sous-intervalles sur chacun desquels on utilise une formule d'intégration simple. Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \dfrac{b-a}{N}$.

Théorème 4.4. *(Méthode des trapèzes)*
Soit

$$I_T(f) = \frac{h}{2}\Big\{f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + f(b)\Big\}.$$

Alors, si f est de classe C^2 sur I,

$$\big|I(f) - I_T(f)\big| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x\in I} |f''(x)|(b-a).$$

Démonstration.

Théorème 4.5. *(Méthode de Simpson)*
Soit

$$I_S(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{6}\Big\{f(a+ih) + 4f\big(a+(i+\frac{1}{2})h\big) + f\big(a+(i+1)h\big)\Big\}.$$

Alors, si f est de classe C^4 sur I,

$$\big|I(f) - I_S(f)\big| \leq \frac{h^4}{4!5!} \sup_{x\in I} |f^{(4)}(x)|(b-a).$$

Arnaud Rougirel
IUFM Poitou Charentes
E-mail address: rougirel@math.univ-poitiers.fr