COURBES PARAMÉTRÉES

1. Propriétés géométriques des courbes paramétrées

Soit $n = 2$ ou 3 et $\mathcal{E}^n$ un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Soit $||\cdot||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. • *Une courbe paramétrée est une application définie et dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{E}^n$. Si c est une courbe paramétrée alors I_c désigne l'ensemble de définition de c.*
• *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une courbe paramétrée c est de classe C^k si elle est de classe C^k sur I_c.*
• *Si $n = 2$ (resp. $n = 3$), l'image $c(I)$ de I par l'application c s'appelle une courbe plane (resp. courbe de l'espace).*

Exemple. Soit $n = 2$, $\mathcal{E}^2 = \mathbb{R}^2$ et

$$c_{ex} :]0, \infty[\to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t + \frac{1}{2t^2} \end{pmatrix}.$$

$\Gamma_{ex} := c_{ex}(I)$. c est une courbe paramétrée de classe C^2.

Dans la suite, c est une courbe paramétrée de classe C^k, $k \geq 1$ et $t_0 \in I_c$.

Définition 1.2. • *Le point de paramètre t_0 est dit régulier (resp. singulier) si $c'(t_0) \neq 0$ (resp. $c'(t_0) = 0$).*
• *La courbe paramétrée c est dite régulière si tous ses points sont réguliers.*
• *Le point de paramètre t_0 est dit birégulier si $c'(t_0)$ et $c''(t_0)$ sont linéairement inépendants dans $\mathbb{R}^n$. La courbe paramétrée c est dite birégulière si tous ses points sont biréguliers.*

Exemple. Déterminer les points singuliers de c_{ex}.

Tangentes.

Définition 1.3. *Soit D_0 une droite de $\mathcal{E}^n$, $X_0 \in D_0$ et $\{D(t) \mid t \in I\}$ un ensemble de droites de $\mathbb{R}^n$ passant par X_0. On dit que $D(t)$ tend vers D_0 lorsque $t \to t_0$ s'il existe un vecteur directeur u de D_0 et $u(t) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur directeur de $D(t)$ tel que $u(t) \to u$ lorsque $t \to t_0$.*

Définition 1.4. *Soit D_0 une droite de $\mathcal{E}^n$ passant par $c(t_0)$. On dit que D_0 est la tangente à c en t_0 si*

(1) *il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in I_c$, $0 < |t - t_0| < \delta$, on a $c(t) \neq c(t_0)$,*
(2) *la droite $c(t)c(t_0)$ tend vers D_0 lorsque $t \to t_0$.*

Proposition 1.1. *Si $c'(t_0) \neq 0$ alors la droite passant par $c(t_0)$ et parallèle à $c'(t_0)$ est la tangente à c en t_0.*

Démonstration.

Proposition 1.2. *Soit $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq k$. Si*

$$c^{(p)}(t_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad c^{(i)}(t_0) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p-1$$

alors la droite passant par $c(t_0)$ et de vecteur directeur $c^{(p)}(t_0)$ est la tangente à c en t_0.

Démonstration.

Exemple. Pour tout $t > 0$, déterminer une équation de la tangente à c_{ex} en $t > 0$.

Changements de paramètre. Arcs géométriques.

Définition 1.5. *Soint I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une application $s : J \to I$ est un C^k-difféomorphisme de J sur I si s est une bijection de J sur I de classe C^k et son application réciproque est de classe C^k sur I.*

Définition 1.6. *Deux courbes paramétrées $c : I_c \to \mathcal{E}^n$ et $d : I_d \to \mathcal{E}^n$ de classe C^k sont dites C^k-équivalentes s'il existe un C^k-difféomorphisme s de I_d sur I_c tel que $d = c \circ s$. Dans ce contexte, l'application s s'appelle un changement de paramètre.*

Proposition 1.3. *La relation "c et d sont C^k-équivalentes" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes paramétrées de classe C^k.*

Définition 1.7. *Un arc géométrique de classe C^k est une classe d'équivalence pour la relation ci-dessus. Une courbe paramétrée appartenant à une classe γ s'appelle un représentant de γ.*

Exemple. Soit $n = 2$, $c : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^2$ de classe C^2 et $d : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^2, t \mapsto c(2t)$.

Soit γ un arc géométrique de classe C^k.

Définition 1.8. *Soit c et d des représentants γ. On dit que deux points $(t, c(t))$ et $(\tau, d(\tau))$ appartenant aux graphes de c et d sont équivalents s'il existe un C^k-difféomorphisme s de I_d sur I_c tel que*

$$d = c \circ s \quad \text{et} \quad s(\tau) = t.$$

Proposition 1.4. *La relation "$(t, c(t))$ et $(\tau, d(\tau))$ sont équivalents" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des points du graphe des représentants de l'arc géométrique γ.*

Définition 1.9. *Un point de l'arc géométrique γ est une classe d'équivalence pour la relation ci-dessus.*

Proposition 1.5. *Soit c et $\overline{c}$ deux représentants d'un arc géométrique γ. Soit m_0 un point de γ de représentant $(t_0, c(t_0))$ et $(\tau_0, \overline{c}(\tau_0))$.*
- *Si γ est de classe C^1 alors*

$$t_0 \text{ est un point régulier de } c \Longleftrightarrow \tau_0 \text{ est un point régulier de } \overline{c}.$$

- *Si γ est de classe C^2 et $\overline{c} = c \circ s$ où s est un changement de paramètre alors*

$$t_0 \text{ est un point birégulier de } c \Longleftrightarrow \tau_0 \text{ est un point birégulier de } \overline{c}.$$

et

$$\overline{c}'(\tau_0) = s'(\tau_0)c'(t_0), \tag{1}$$

$$\overline{c}''(\tau_0) = s''(\tau_0)c'(t_0) + s'(\tau_0)^2 c''(t_0). \tag{2}$$

Définition 1.10. *Un arc géométrique de classe C^1 est dit régulier s'il admet un représentant régulier. Un arc géométrique de classe C^2 est dit birégulier s'il admet un représentant birégulier.*

arcs géométriques orientés.

Définition 1.11. *Deux courbes paramétrées $c : I_c \to \mathcal{E}^n$ et $d : I_d \to \mathcal{E}^n$ de classe C^k sont dites positivement équivalentes s'il existe un C^k-difféomorphisme croissant s de I_d sur I_c tel que $d = c \circ s$.*

Proposition 1.6. *La relation "c et d sont positivement équivalentes" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes paramétrées de classe C^k.*

Définition 1.12. *Un arc géométrique orienté de classe C^k est une classe d'équivalence pour la relation ci-dessus.*

Courbes planes. $n = 2$.

Forme d'une courbe plane au voisinage d'un point. On suppose que c est de classe C^∞ sur I. Soit p le plus petit entier tel que

$$c^{(p)}(t_0) \neq 0$$

et q le plus petit entier $> p$ tel que $c^{(p)}(t_0)$ et $c^{(q)}(t_0)$ soient linéairement indépendants. Le dévelopement de Taylor-Young à l'ordre q s'écrit

$$c(t_0 + h) = c(t_0) + h^p \frac{c^{(p)}(t_0)}{p!} + h^{p+1} \frac{c^{(p+1)}(t_0)}{(p+1)!} + \cdots + h^q \frac{c^{(q)}(t_0)}{q!} + o(h^q).$$

Donc, en posant $e_1 = \frac{c^{(p)}(t_0)}{p!}$, $e_2 = \frac{c^{(q)}(t_0)}{q!}$, les coordonnées de $c(t_0 + h)$ dans le repère $\mathcal{R} = (c(t_0), e_1, e_2)$ sont

$$c(t_0 + h) = \begin{pmatrix} h^p + o(h^p) \\ h^q + o(h^q) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \simeq \begin{pmatrix} h^p \\ h^q \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

On pose $x = h^p$. D'après la Proposition 1.2, Γ est tangent à e_1 en t_0. De plus,

- Si p est impair, q est pair alors

$$c(t_0 + h) \simeq \begin{pmatrix} x \\ |x|^{q/p} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

- Si p est impair, q est impair alors $c(t_0)$ est un point d'inflexion et

$$c(t_0 + h) \simeq \begin{pmatrix} x \\ sgn(x)|x|^{q/p} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

- Si p est pair, q est impair alors $c(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce,
  - si $h > 0$ alors $x > 0$ et $c(t_0 + h) \simeq \begin{pmatrix} x \\ |x|^{q/p} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

• si $h < 0$ alors $x > 0$ et $c(t_0 + h) \simeq \begin{pmatrix} x \\ -|x|^{q/p} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

• Si p est pair, q est pair alors $c(t_0)$ est un point de rebroussement de seconde espèce et $c(t_0 + h) \simeq \begin{pmatrix} |x| \\ |x|^{q/p} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Exemple. Déterminer la forme de la courbe Γ_{ex} au voisinage de $c(1)$.

Branches infinies. $n = 2$ ou 3. Soit $t_\infty \in \overline{I}$.

Définition 1.13. *On dit que Γ admet une branche infinie en t_∞ si $\|c(t)\| \to \infty$ lorsque $t \to t_\infty$.*

Définition 1.14. *Soit D une droite passant par 0. Si Γ admet une branche infinie en t_∞ alors D est une direction asymptotique si la droite passant par 0 et $c(t)$ tend vers D lorsque $t \to t_\infty$.*

Exemple. Etudier les branches infinies de Γ_{ex}.

Définition 1.15. *Supposons que Γ admet une direction asymptotique D lorsque $t \to t_\infty$. Soit $D(t)$ la doite passant par $c(t)$ et parallèle à D.*
• Si $D(t)$ s'éloigne à l'infini lorsque $t \to t_\infty$ (c'est à dire $\inf_{X \in D(t)} \|X\| \to \infty$) alors Γ présente une branche parabolique dans la direction D.
• S'il existe une droite D_∞ telle

$$d(c(t), D_\infty) := \inf_{X \in D_\infty} \|c(t) - X\| \xrightarrow[t \to t_\infty]{} 0$$

alors on dit que D_∞ est asymptote à le courbe Γ.

Proposition 1.7. *Soit $D : y = ax$ une direction asymptotique.*

(1) *Si $|c_2(t) - ac_1(t)| \to \infty$ lorsque $t \to t_\infty$ alors Γ présente une branche parabolique dans la direction D.*
(2) *Si $c_2(t) - ac_1(t) \to b \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Γ.*

Démonstration.

Exemple. Etudier les branches paraboliques et les asymptotes de Γ_{ex}.

Courbes paramétrées en coordonnées polaires.

Définition 1.16. *La courbe paramétrée c est dite définies en coordonnées polaires si*

$$c(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I,$$

où $r : I \to \mathbb{R}$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$.
Cas Particuliers : Equations polaires : $r = f(\theta)$. Par convention, $\theta = t$ c'est à dire

$$c(\theta) = f(\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \forall \theta \in I.$$

De même, $\theta = g(r)$ signifie $c(r) = r \begin{pmatrix} \cos g(r) \\ \sin g(r) \end{pmatrix}$.

Exemple. La spirale d'équation polaire $\theta = \frac{2\pi}{r}$, $r \in]0,1]$. Déterminer les directions des tangentes aux points d'intersection avec les axes de coordonnées cartésiennes.

Courbes de l'espace. $n = 3$.

Plan osculateur.

Définition 1.17. *Etant donnée D_0 une droite de l'espace et $u \in \mathbb{R}^3$ non parallèle à D_0, soit P_0 le plan passant par D_0 et parallèle à u. Soit $\{P(t) \mid t \in I\}$ un ensemble de plans de passant par D_0. On dit que $P(t)$ tend vers P_0 lorsque $t \to t_0$ s'il existe un vecteur $u(t)$ parallèle à $P(t)$ tel que $u(t) \to u$ lorsque $t \to t_0$.*

Définition 1.18. *Supposons que Γ admette une tangente $T(t_0)$ en $c(t_0)$. Etant donné P_0 un plan passant par $T(t_0)$, on dit que P_0 est le plan osculateur à Γ en $c(t_0)$ si*

(1) *il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in I$, $0 < |t - t_0| < \delta$, on a $c(t) \notin T(t_0)$,*

(2) *le plan $c(t)T(t_0)$ tend vers P_0 lorsque $t \to t_0$.*

Remarque 1. Intuitivement, le plan osculateur à Γ en $c(t_0)$ est le plan P_0 tel que $c(t) \simeq P_0$ lorsque $t \to t_0$.

Théorème 1.1. *Si $c(t_0)$ est birégulier alors le plan passant par $c(t_0)$ et parallèle à $c'(t_0), c''(t_0)$ est le plan osculateur à Γ en $c(t_0)$.*

Démonstration.

Exemple. Soit

$$c :]0, \infty[\to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t + \frac{1}{t} \\ t + \frac{1}{2t^2} \end{pmatrix}.$$

Donner une équation du plan osculateur à $c(]0,\infty[)$ en $c(1)$.

Allure au voisinage d'un point. On suppose que $(c'(t_0), c''(t_0), c'''(t_0))$ est libre. Alors

$$c(t_0 + h) = c(t_0) + hc'(t_0) + h^2 \frac{c''(t_0)}{2} + h^3 \frac{c'''(t_0)}{6} + o(h^3).$$

Donc, dans le repère $\mathcal{R} = (c(t_0), c'(t_0), \frac{1}{2}c''(t_0), \frac{1}{6}c''(t_0))$,

$$c(t_0 + h) \simeq \begin{pmatrix} h \\ h^2 \\ h^3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

2. Propriétés métriques des courbes planes

Soit $n = 2$. Etant donné γ un arc géométrique de classe C^1, on désigne par $c : I \to \mathcal{E}^2$ un représentant de γ et on suppose que $I = [a, b]$.

Définition 2.1. *La longueur de la courbe paramétrée c est*

$$L_c = \sup\Big\{\sum_{i=0}^{n-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\Big\}.$$

Proposition 2.1. *L_c est constant pour tout représentant c de l'arc γ.*

Définition 2.2. *La longueur de l'arc géométrique* γ *est* $L_\gamma = L_c$.

Théorème 2.1. $L_c = \displaystyle\int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t.$

Démonstration.

Définition 2.3. *Une fonction* $S : I \to \mathbb{R}$ *est une abscisse curviligne s'il existe* $t_0 \in I$ *tel que*

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| \, \mathrm{d}u \quad \forall t \in I.$$

Théorème 2.2. *On suppose que* c *est une courbe paramétrée régulière. Etant donnée* S *une abscisse curviligne, on pose* $\overline{c} = c \circ S^{-1}$. *Alors* $\overline{c}$ *est une courbe paramétrée et*

$$\|\overline{c}'(\tau)\| = 1 \quad \forall \tau \in S(I).$$

Démonstration.

Exemple. Si $S(t) = \int_a^t \|c'(u)\| \, \mathrm{d}u$, pour tout $t \in I$ alors $S : I \to [0, L_\gamma]$ et $\overline{c} : [0, L_\gamma] \to \mathcal{E}^2$. Celà motive la définition suivante.

Définition 2.4. *Une courbe paramétrée* $\overline{c}$ *est dite paramétrée par longueur d'arc si*

$$\|\overline{c}'(\tau)\| = 1 \quad \forall \tau \in I_{\overline{c}}.$$

Si, en outre, $\overline{c}$ *est un représentant de* γ *alors* $\overline{c}$ *est une paramétrisation de* γ *par longueur d'arc.*

Proposition 2.2. *Deux paramétrisations de* γ *par longueur d'arc différent par un changement affine de paramètre de la forme*

$$s(\tau) = \varepsilon\tau + b$$

avec $|\varepsilon| = 1$ *et* $b \in \mathbb{R}$.

Courbure. On suppose que γ est un arc géométrique orienté, régulier et de classe C^2. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan euclidien orienté positivement.

Définition 2.5. *Soit* c *une courbe paramétrée régulière. Pour tout* $t \in I_c$, *le repère orthonormé direct d'origine* $c(t)$, *de premier vecteur* $e_1(t) := c'(t)/\|c'(t)\|$ *et de second vecteur* $e_2(t)$ *s'appelle le repère de Frenet associé à la courbe paramétrée* c.

Soit $\overline{c} : J \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de γ par longueur d'arc et $(\overline{c}(t), e_1(t), e_2(t))$ le repère de Frenet associé à $\overline{c}$. Par dérivation,

$$\frac{1}{2}\|\overline{c}'(t)\|^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \overline{c}'(t) \cdot \overline{c}''(t) = 0.$$

Donc $\overline{c}''(t)$ et $e_2(t)$ sont colinéaires. Celà motive la définition suivante.

Définition 2.6. *Soit* $\overline{c}$ *une paramétrisation de* γ *par longueur d'arc. Pour tout point* m *de* γ *de rerprésentant* $(t, \overline{c}(t))$, *le réel* $\rho(t)$ *défini par*

$$\overline{c}''(t) = \rho(t)e_2(t)$$

s'appelle la courbure de γ au point m. Si $\rho(t) \neq 0$ alors le réel

$$R(t) := \frac{1}{\rho(t)}$$

s'appelle le rayon de courbure de γ au point m. Par convention, si $\rho(t) = 0$ alors $R(t) = \infty$.

Remarque 2. Cette définition est indépendante du choix d'une paramétrisation de γ par longueur d'arc.

Exemple Calculer la courbure de la courbe paramétrée $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ lorsque

$$c(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix} \quad \text{ et, pour } R \text{ positif et } a \in \mathbb{R},\ c(t) = \begin{pmatrix} R\cos(at) \\ R\sin(at) \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.3. *Soit γ un arc géométrique orienté, régulier de classe C^2 et $\overline{c} : J \to \mathcal{E}^2$ une paramétrisation de γ par longueur d'arc. Alors il existe $\alpha \in C^1(J, \mathbb{R})$ tel que pour tout $t \in J$, $\alpha(t)$ est une mesure de l'angle orienté $(u_1, \overline{c}'(t))$ où $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus,*

$$\rho(t) = \alpha'(t) \quad \forall t \in J \tag{3}$$

et

$$e_1(t) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}, \quad e_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) \\ \cos\alpha(t) \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

Remarque 3. D'après (3), la courbure représente la vitesse de variation de la direction de la tangente. Plus $|\rho(t)|$ est grand, plus la courbe plane est courbée au voisinage du point $\overline{c}(t)$.

Théorème 2.3 (Calcul pratique de la courbure)**.** *Soit $c : I \to \mathcal{E}^2$ une paramétrisation quelconque de l'arc orienté, régulier γ de classe C^2. Alors la courbure de γ au point de représentant $(t, c(t))$ est*

$$\rho(t) = \frac{\det\big(c'(t), c''(t)\big)}{\|c'(t)\|^3} \qquad \forall t \in I.$$

Exemple. Soit Γ la courbe représentative dans $\mathbb{R}^2$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'il existe un unique arc régulier γ ayant pour image Γ.
(2) Donner une paramétrisation non régulière de Γ.
(3) Calculer la courbure de γ en chacun de ses points.

Définition 2.7. *Soit c une courbe paramétrée birégulière. Pour tout $t \in I_c$, le point du plan*

$$p(t) := c(t) + R(t)e_2(t)$$

s'appelle le centre de courbure de c au point de paramètre t. Le cercle de centre $p(t)$ et de rayon $R(t)$ s'appelle le cercle osculateur ou cercle de courbure de c au point de paramètre t.

Définition 2.8. *Soit* $c : I \to \mathbb{R}^2$, $d : J \to \mathbb{R}^2$ *des courbes paramétrées de classe* C^p, $p > 0$. *On suppose qu'il existe* $(t_1, t_2) \in I \times J$ *tel que* $c(t_1) = d(t_2)$. *Alors on dit que*

(1) *c et d ont un contact d'ordre m ($0 < m < p$) au point $c(t_1)$ si*

$$c^{(k)}(t_1) = d^{(k)}(t_2) \quad \forall k = 1, \dots, m,$$
$$c^{(m+1)}(t_1) \neq d^{(m+1)}(t_2).$$

(2) *c et d ont un contact d'ordre au moins m ($0 < m \leq p$) au point $c(t_1)$ si*

$$c^{(k)}(t_1) = d^{(k)}(t_2) \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Exemple. • Une courbe paramétrée et sa tangente ont un contact d'ordre au moins 1.
• Si le contact est d'ordre au moins 2 alors les repères de Frenet coïncident.
• Si les développements de Taylor de deux courbes paramétrées coïncident en un point jusqu'à l'ordre m alors elles ont un contact d'ordre m.

Proposition 2.4. *Une courbe paramétrée birégulière et son cercle osculateur ont un contact d'ordre au moins 2.*

Définition 2.9. *Sous les hypothèses de la Definition 2.8, soit γ l'arc géométrique associé à c. Alors l'arc géométrique représenté par la courbe paramétrée $I_c \to \mathcal{E}^2$, $t \mapsto p(t)$ s'appelle la développée de γ.*

Exemple. Déterminer et étudier la développée de l'ellipse Γ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.