CAPLP. Mathématiques. **2002/2003**

rougirel@mathlabo.univ-poitiers.fr

Les rotations du plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté.

0) Prérequis • La relation de Chasles pour les angles orientés de vecteurs : si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs du plan alors

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) \quad (mod\ 2\pi),$$

où $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne une mesure en radian de l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En outre, si D et D' sont deux droites du plan, on notera (D, D') une mesure en radian de l'angle orienté formé par D et D'.

• Notions élémentaires sur les reflexions. La reflexion d'axe D sera notée s_D.

1) Décomposition d'une rotation en produit de deux reflexions

Théorème 1. *Soit $R_{O,\theta}$ la rotation de centre O et d'angle θ. Alors, pour toute droite D passant par O, on a*

$$R_{O,\theta} = s_{D'} \circ s_D,$$

où D' est la droite passant par O et telle que $(D, D') \equiv \theta/2\ (mod\ \pi)$.

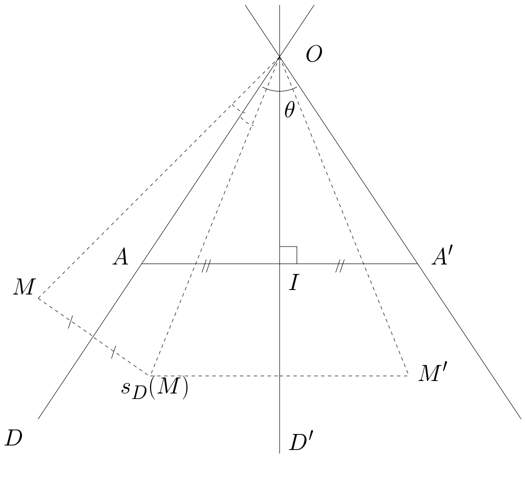

Figure 1

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$, $A' = R_{O,\theta}(A)$ et I le milieu de $[AA']$. Soit $D = (OA)$ et $D' = (AI)$. Alors $(D, D') \equiv \theta/2\ (mod\ \pi)$. De plus, pour tout $M \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$, on a, en notant M' l'image de M par $s_{D'} \circ s_D$, $OM = OM'$. Montrons que

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta \quad (mod\ 2\pi). \tag{1}$$

En effet, d'après la relation de Chasles (voir Figure 1),

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) &\equiv (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Os_D(M)}) + (\overrightarrow{Os_D(M)}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \\
&\equiv 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Os_D(M)}) + 2(\overrightarrow{Os_D(M)}, \overrightarrow{OI}) \\
&\equiv 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) \equiv \theta \quad (mod\ 2\pi),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (1) et achève la démonstration du théorème.

Théorème 2. *Soit D et D' deux droites du plan et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta/2 \equiv (D, D')$ $(mod\ \pi)$.*
(i) Si $\theta/2 \equiv 0$ $(mod\ \pi)$ alors $s'_D \circ s_D$ est une translation.
(ii) Si $\theta/2 \not\equiv 0$ $(mod\ \pi)$ alors D et D' ont un seul point commun O et $s'_D \circ s_D$ est la rotation de centre O et d'angle θ.

Démonstration. A faire en exercice.

Le Corollaire suivant montre que la composée de deux rotations n'est pas toujours une rotation.

Corollaire. *Soit $R_{O,\theta}$ et $R_{O',\theta'}$ deux rotations.*
(i) Si $\theta + \theta' \equiv 0$ $(mod\ 2\pi)$ alors $R_{O,\theta} \circ R_{O',\theta'}$ est une translation.
(ii) Si $\theta + \theta' \not\equiv 0$ $(mod\ 2\pi)$ alors $R_{O,\theta} \circ R_{O',\theta'}$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Démonstration. Soit $D = (OO')$. D'après le théorème 1, on sait d'une part, que la droite D' passant par O et telle que $(D, D') \equiv \theta/2$ $(mod\ \pi)$ vérifie

$$R_{O,\theta} = s_{D'} \circ s_D,$$

et d'autre part, que la droite D'' passant par O' et telle que $(D, D'') \equiv -\theta'/2$ $(mod\ \pi)$ vérifie $R_{O',-\theta'} = s_{D''} \circ s_D$. D'où

$$R_{O',\theta'} = s_D \circ s_{D''}.$$

Par conséquent,

$$R_{O,\theta} \circ R_{O',\theta'} = s_{D'} \circ s_{D''}.$$

En outre,

$$(D'', D') \equiv (D'', D) + (D, D') \equiv \frac{\theta + \theta'}{2} \quad (mod\ \pi).$$

On conclut avec le théorème 2.

2) Appliation à des constructions géométriques

Exercice : Soit C un cercle et D, d deux droites strictement parallèles ne coupant pas C. Construire un triangle IMM' rectangle isocèle direct en I, le point I étant placé sur d, M étant placé sur D et M' sur C.
D'après http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/maths/traousi/PHASEI.html. Consulter cette page pour la solution.