

Intégrales impropres

Ex 1. Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx, & \quad \int_1^\infty \ln x dx, & \quad \int_{-\infty}^\infty \sin x dx, \\ \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^2} dx, & \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx, & \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{x}}}. \end{aligned}$$

Ex 2. Prouver le théorème de convergence des intégrales de Riemann.

Ex 3. Montrer que les intégrales impropres suivantes convergent et calculer leur valeur.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} dt, & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}, & \quad \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t}, \\ \int_0^\infty e^{-x} \cos(\alpha x) dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}), & & \quad \int_0^\infty \frac{\ln t}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Indication : montrer que cette dernière intégrale est égale à son opposée.

Ex 4. (D'après le concours PLPA2 2003) Soit $\alpha > -1$ et $f_\alpha :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha e^{-x}$.

- (1) Etudier les fonctions f_α .
- (2) En distinguant les cas $\alpha \geq 0$ et $-1 < \alpha < 0$, montrer que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\int_0^x t^\alpha e^{-t} dt$ existe.

- (3) Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que, pour tout $t \geq x_0$,

$$t^\alpha e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

- (4) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt$ est convergente.

- (5) Pour tout $\alpha > -1$, on pose $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt$.

- (a) Montrer que $\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha > -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\Gamma(n)$ en fonction de n .

- (b) Montrer que pour tout $\alpha > -1$,

$$\int_0^1 t^\alpha e^{-t} dt \geq \frac{1}{e(\alpha+1)}.$$

- (c) Etudier les limites de $\Gamma(\alpha)$ lorsque α tend vers -1 , puis lorsque α tend vers $+\infty$.

- (6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $F_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x t^n e^{-t} dt$. Soit $x > 0$.

- (a) Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$.

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n!} F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n!} F_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

- (c) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{x^n}{n!}$. A l'aide de l'égalité $u_{n+1} = \frac{x}{n+1} u_n$, montrer que la suite (u_n) converge et a pour limite 0.

- (d) Montrer que la série $\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ converge (c'est à dire que la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ a une limite lorsque $n \rightarrow \infty$) et calculer sa limite.

<http://www-math.univ-poitiers.fr/enseignement/caplp/frame2.html>