

Habilitation à diriger des recherches

Etude numérique et mathématique de quelques modèles de transition de phase, de séparation de phases et de cristaux liquides

Morgan PIERRE

Laboratoire de Mathématiques et Applications UMR CNRS 6086
Université de Poitiers

6 octobre 2011

Equation d'Allen-Cahn :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta u - f'(u), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

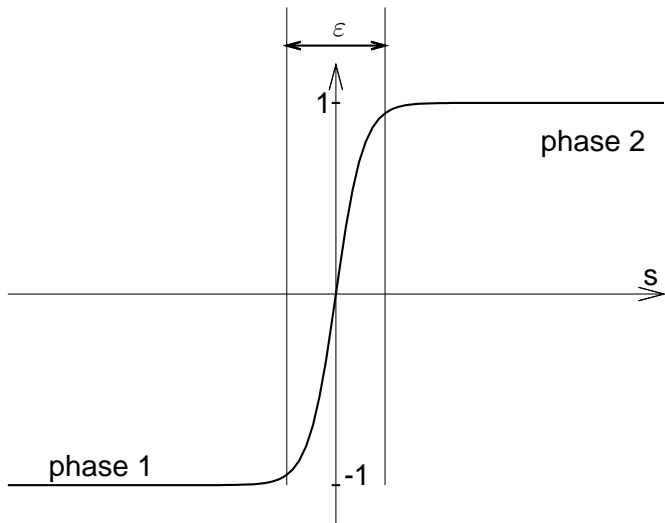
où $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ est ouvert ($d = 3, 2$ ou 1), $\varepsilon > 0$ (petit) et f' la dérivée d'un potentiel double-puits, typiquement

$$f(s) = \frac{1}{4}(s^2 - 1)^2 \quad (s \in \mathbf{R}).$$

La fonction inconnue $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ est un paramètre d'ordre scalaire

- Modèle de transition de phase avec interface diffuse
- Flot de gradient $L^2(\Omega)$ de l'énergie

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + f(u) \, dx.$$



Interface diffuse

Equation de Cahn-Hilliard :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(\varepsilon^2 \Delta u - f'(u)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

modèle de séparation de phases avec conservation de la masse ;
version conservative de l'équation d'Allen-Cahn

Equation de Cahn-Hilliard :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(\varepsilon^2 \Delta u - f'(u)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

modèle de séparation de phases avec conservation de la masse ;
version conservative de l'équation d'Allen-Cahn

Flot des applications harmoniques :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u |\nabla u|^2, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

où $u : \Omega \rightarrow S^2$ est un paramètre d'ordre vectoriel de norme unité
modèle de cristaux liquides ; version asymptotique de l'équation
d'Allen-Cahn vectorielle

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]
- **Étude de singularités dans des problèmes paraboliques**

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]
- **Étude de singularités dans des problèmes paraboliques**
 - Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique [Cherfils et P.'08]
 - Equation de diffusion visqueuse [P.'08]
 - Flot des applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [Merlet et P.'05]

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]
- **Étude de singularités dans des problèmes paraboliques**
 - Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique [Cherfils et P.'08]
 - Equation de diffusion visqueuse [P.'08]
 - Flot des applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [Merlet et P.'05]
- **Étude théorique et numérique de problèmes stationnaires**

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]
- **Étude de singularités dans des problèmes paraboliques**
 - Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique [Cherfils et P.'08]
 - Equation de diffusion visqueuse [P.'08]
 - Flot des applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [Merlet et P.'05]
- **Étude théorique et numérique de problèmes stationnaires**
 - Modèle de champ de phase cristallin [P. et Rougirel]
 - Applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [P.'05 et '08]

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]
- **Étude de singularités dans des problèmes paraboliques**
 - Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique [Cherfils et P.'08]
 - Equation de diffusion visqueuse [P.'08]
 - Flot des applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [Merlet et P.'05]
- **Étude théorique et numérique de problèmes stationnaires**
 - Modèle de champ de phase cristallin [P. et Rougirel]
 - Applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [P.'05 et '08]
- **Convergence vers l'équilibre**

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]
- **Étude de singularités dans des problèmes paraboliques**
 - Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique [Cherfils et P.'08]
 - Equation de diffusion visqueuse [P.'08]
 - Flot des applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [Merlet et P.'05]
- **Étude théorique et numérique de problèmes stationnaires**
 - Modèle de champ de phase cristallin [P. et Rougirel]
 - Applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [P.'05 et '08]
- **Convergence vers l'équilibre**
 - Modèles ci-dessus
 - Discrétisation d'EDOs [Merlet et P.'10], [Grasselli et P. à p.]

- 1 Introduction
 - Contexte
 - Thématiques
- 2 Convergence vers l'équilibre
- 3 Equation de Cahn-Hilliard avec condition au bord dynamique
- 4 Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique
- 5 Applications harmoniques du disque dans S^2
- 6 Conclusion et perspectives

On considère une suite $(U^n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{R}^d qui satisfait

$$\varepsilon \frac{(U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}))}{\Delta t^2} + \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \nabla F(U^{n+1}) = G^{n+1}, \quad (1)$$

pour tout $n \geq 0$, où $\Delta t > 0$ (pas de temps) et $\varepsilon \geq 0$. On suppose :

- $F \in C_{loc}^{1,1}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ est semi-convexe pour une constante $c_F \geq 0$, c-à-d que $W \mapsto F(W) + c_F \|W\|^2 / 2$ est convexe.
- $(G^{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite donnée dans \mathbf{R}^d vérifiant

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \left(n^{1+\delta} \sum_{k=n}^{\infty} \|G^{k+1}\|^2 \right) < \infty,$$

pour une constante $\delta > 0$.

Rq : $G^n \rightarrow 0$ donc (1) est asymptotiquement autonome.

Théorème (Grasselli & P. à p.)

Soit $(U^n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite qui satisfait (1). En plus des hypothèses précédentes, on suppose que $1/\Delta t > c_F/2$, que la suite $(U^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée et qu'il existe $U^* \in \omega((U^n)_n)$ tel que F vérifie l'inégalité de Łojasiewicz au voisinage de U^* , c-à-d

$$\|V - U^*\| < \sigma \Rightarrow |F(V) - F(U^*)|^{1-\theta} \leq c_L \|\nabla F(V)\|,$$

pour des constantes $\sigma > 0$, $c_L > 0$ et $\theta \in (0, 1/2]$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} U^n = U^*$ et de plus, il existe une constante C telle que pour tout $n > 0$,

$$\|U^n - U^*\| \leq Cn^{-\alpha} \quad \text{avec } \alpha = \min \left\{ \frac{\theta}{1-2\theta}, \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Rq1 : l'exposant α est optimal en général.

Rq2 : par définition,

$$\omega((U^n)_n) := \left\{ U^* \in \mathbf{R}^d : \exists n_k \rightarrow \infty \text{ tels que } U^{n_k} \rightarrow U^* \right\}.$$

- arguments : fonction de Liapounov et **inégalité de Łojasiewicz**
- adaptation en discret du flot de type gradient asymptotiquement autonome :

$$\varepsilon U''(t) + U'(t) + \nabla F(U(t)) = G(t), \quad t \geq 0,$$

traité par **[Chill et Jendoubi'03]**, **[Ben Hassen'10]** (et **[Haraux et Jendoubi'98]** dans le cas $G \equiv 0$)

- généralisation du cas $\varepsilon = 0$ et $(G^n)_n \equiv 0$ traité par **[Merlet et P.'10]**, **[Attouch et Bolte'09]** (voir aussi **[Absil et al'05]**).

Rq : dans le cas $\varepsilon = 0$ et $(G^n)_n \equiv 0$, (1) est l'algorithme proximal (Euler implicite) appliqué au flot de gradient $U'(t) + \nabla F(U(t)) = 0$, et les hypothèses sur F peuvent être affaiblies

Proposition (Merlet & P.'10)

Soit $U \in C^1([0, +\infty), \mathbf{R}^d)$ une solution (bornée) de $U'(t) = -\nabla F(U(t))$, où $F \in C_{loc}^{1,1}(\mathbf{R}^d)$ est coercive et satisfait l'inégalité de Łojasiewicz en un point U^* de $\omega(U(0))$, de sorte que $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = U^*$. Si U^* est un minimiseur local de F , alors pour $\Delta t > 0$ assez petit, et pour $U_{\Delta t}^0$ assez proche de $U(0)$, l'unique suite $(U_{\Delta t}^n)_n$ générée par le schéma d'Euler implicite $(U_{\Delta t}^{n+1} - U_{\Delta t}^n)/\Delta t = -\nabla F(U_{\Delta t}^{n+1})$ ($n \geq 0$) converge vers une limite $U_{\Delta t}^*$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et de plus, $U_{\Delta t}^* \rightarrow U^*$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et $U_{\Delta t}^0 \rightarrow U(0)$.

Rq : résultat de stabilité : si $U_{\Delta t}^0$ est assez proche de U^* , alors toute la suite $(U_{\Delta t}^n)_n$ reste proche de U^* . A relier à un résultat de **[Miranville et Rougirel'06]** (voir aussi **[Huang'06]**, **[Absil et Kurdyka'06]** et **[Chill, Fasangova et Schatzle'10]**).

Problème : trouver $(u, w) : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ solution de

$$u_t = \Delta w, \quad t > 0, x \in \Omega, \quad (2)$$

$$w = f'(u) - \Delta u, \quad t > 0, x \in \Omega, \quad (3)$$

$$(1/\Gamma_s)u_t = \sigma_s \Delta_{\parallel} u - g'_s(u) - \partial_n u, \quad t > 0, x \in \Gamma, \quad (4)$$

$$\partial_n w = 0, \quad t > 0, x \in \Gamma, \quad (5)$$

où Ω est une plaque, *i.e.*

$$\Omega = (\mathbf{R}/(L_1\mathbf{Z})) \times (0, L_2), \quad L_1 > 0, L_2 > 0,$$

de frontière C^∞ : $\Gamma = \partial\Omega = (\mathbf{R}/(L_1\mathbf{Z})) \times \{0, L_d\}$. On a $\Gamma_s > 0$, $\sigma_s > 0$ et l'on choisit

$$f'(v) = v^3 - \beta^2 v \text{ et } g'_s(v) = k_s v - h_s \quad (\beta, k_s > 0, h_s \in \mathbf{R}).$$

u dissipe l'énergie

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f(u) \right) dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\sigma_s}{2} |\nabla_{\parallel} u|^2 + g_s(u) \right) d\sigma,$$

et la masse est conservée : $\int_{\Omega} u(t) dx = \int_{\Omega} u(0) dx$ ($t \geq 0$).

Bibliographie :

- Simulations par différences finies : **[Fischer, Maass et Dieterich'97 et '98]**, **[Kenzler et al'01]**
- Etude du problème continu : **[Racke et Zheng'03]**, **[Wu et Zheng'04]**, **[Miranville et Zelik'06]**, **[Chill, Fasangova et Pruss'06]**, **[Gal'06a]**, **[Gal'06b]**, **[Pruss, Rack et Zheng'06]**, **[Gilardi, Miranville et Schimperna'09]**

Rq : résultats précédents et suivants valable également en dimension 3 de domaine et pour des nonlinéarités plus générales

- Paramètres continus : domaine $L_x \times L_y = 80 \times 10$;

$$f'(v) = v^3 - v/2, \quad g'_s(v) = v, \quad \Gamma_s = 10, \quad \sigma_s = 0.1.$$

- Paramètres discrets : triangulation de 256×50 rectangles découpés en deux triangles selon la même diagonale
pas de temps $\delta t = 0.1$.
Éléments finis P^1 conformes en espace, Euler semi-implicite en temps.



$t = 250$

animation

⇒ : résultats numériques similaires à **[Kenzler et al'01]**.

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} \text{ (au sens des traces)} \in H^1(\Gamma)\},$$

Famille quasi-uniforme de triangulations $\{\Omega^h\}_h$ de $[0, L_1] \times [0, L_2]$ (et $\bar{\Omega}$). Éléments finis P^1 conformes :

$$V^h = \left\{ v^h \in C^0(\bar{\Omega}), v^h|_T \text{ est affine } \quad \forall T \in \Omega^h \right\}.$$

Problème discret : trouver $(u^h, w^h) : [0, T] \rightarrow V^h \times V^h$ tels que

$$(u_t^h, \varphi) = -(\nabla w^h, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V^h, \quad (6)$$

$$(w^h, \chi) = (f'(u^h), \chi) + (\nabla u^h, \nabla \chi) + \sigma_s (\nabla_{\parallel} u^h, \nabla_{\parallel} \chi)_{\Gamma} \\ + (g'_s(u^h), \chi)_{\Gamma} + \Gamma_s^{-1} (u_t^h, \chi)_{\Gamma}, \quad \forall \chi \in V^h. \quad (7)$$

Extension naturelle du schéma de **[Elliott, French et Milner'89]** pour Cahn-Hilliard classique.

Théorème (Cherfils, Petcu & P.'10)

Pour tout $u_0^h \in V^h$, le problème (6)–(7) admet une unique solution $(u^h, w^h) \in C^1([0, +\infty); V^h \times V^h)$ telle que $u^h(0) = u_0^h$. De plus,

$$\mathcal{E}(u^h(t)) + \int_0^t \left| w^h \right|_1^2 + \Gamma_s^{-1} \left| u_t^h \right|_{0,\Gamma}^2 ds \leq \mathcal{E}(u^h(0)), \quad \forall t \geq 0, \quad (8)$$

et il existe une solution stationnaire $(\bar{u}^h, \bar{w}^h) \in V^h \times \mathbf{R}$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u^h(t), w^h(t)) = (\bar{u}^h, \bar{w}^h).$$

Rq : l'estimation (8) permet de montrer la convergence de (u^h, w^h) vers (u, w) sur $[0, T]$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Théorème (Cherfilis, Petcu & P.'10)

Soient (u, w) une solution assez régulière de (2)–(5) et (u^h, w^h) une solution de (6)–(7). Si $u^h(0) = P_{\sigma_s, k_s}^{1,h}(u(0))$ et $w^h(0) = P_{\star}^{1,h}(w(0))$ ($P_{\star}^{1,h}$ projecteur elliptique), alors

$$\sup_{[0, T]} \left(|u^h - u|_0 + |u^h - u|_{0, \Gamma} \right) \leq Ch^2,$$

$$\sup_{[0, T]} \left(\|u_t^h - u_t\|_{-1, h} + |u_t^h - u_t|_{0, \Gamma} \right) \leq Ch^2,$$

$$\left(\int_0^T \|w^h - w\|_0^2 ds \right)^{1/2} \leq Ch^2,$$

$$\sup_{[0, T]} \left(\|u^h - u\|_1 + \|u^h - u\|_{1, \Gamma} \right) \leq Ch,$$

$$\left(\int_0^T \|w^h - w\|_1^2 + \|u_t^h - u_t\|_1^2 + \|u_t^h - u_t\|_{1, \Gamma}^2 ds \right)^{1/2} \leq Ch.$$

Schéma totalement discrétisé

Le schéma est **Euler implicite** à pas constant $\delta t > 0$ appliqué à (6)–(7). On a $f''(s) \geq -\beta^2$ et $g_s''(s) \geq k_s > 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}$.

Théorème (Cherfils, Petcu & P.'10)

Pour tout $u_h^0 \in V^h$, il existe une suite $(u_h^n, w_h^n)_{n \geq 1}$ satisfaisant le schéma totalement discrétisé et l'estimation d'énergie

$$\mathcal{E}(u_h^n) + \frac{1}{2\delta t} |u_h^n - u_h^{n-1}|_{-1,h}^2 + \frac{1}{2\Gamma_s \delta t} |u_h^n - u_h^{n-1}|_{0,\Gamma}^2 \leq \mathcal{E}(u_h^{n-1}). \quad (9)$$

pour tout $n \geq 1$. De plus, $(u_h^n, w_h^n)_{n \geq 1}$ converge vers une solution stationnaire (\bar{u}_h, \bar{w}_h) lorsque $n \rightarrow +\infty$. Si $\delta t < \delta t^ := 4/\beta^4$, alors la suite est définie de manière unique.*

Rq : étend un résultat de **[Elliott'89]** pour Cahn-Hilliard classique

Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique

Gurtin établit dans **[Gurtin'96]** plusieurs généralisations de l'équation d'Allen-Cahn (et de l'équation de Cahn-Hilliard) : notion de microforces, séparation des lois constitutives et des lois de conservation. Une de ces généralisations s'écrit :

$$\beta \partial_t u + b \cdot \nabla \partial_t u - \operatorname{div}(A \nabla \partial_t u) - \alpha \Delta u + f'(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

avec $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ouvert borné ($d = 1, 2$ ou 3), $\beta \geq 0$, $b \in \mathbf{R}^d$ et A matrice de taille d symétrique et positive (condition de dissipativité).

Etude de (10) dans **[Cherfils et Miranville'99]** : $\beta > 0$, A symétrique définie positive et f polynôme de degré pair à coefficient dominant > 0 et à croissance sous-critique : existence globale et unicité de la solution, attracteur de dimension finie.

Problème : étendre au cas du potentiel logarithmique de dérivée

$$f'(s) = \frac{\theta}{2} \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right) - \theta_c s, \quad s \in (-1, 1) \quad (0 < \theta < \theta_c).$$

Question naturelle car f est le **potentiel thermodynamique**.

En dimension $d = 1$, (10) s'écrit

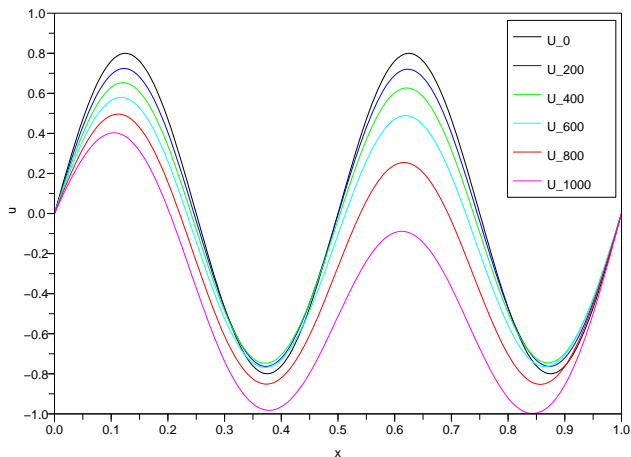
$$u_t + bu_{xt} - au_{xxt} - \alpha u_{xx} + f'(u) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (11)$$

avec

$$b \in \mathbf{R}, \quad a > 0 \quad \text{et} \quad \alpha > 0.$$

Pas de principe de comparaison pour (11) [**Cherfils et P.'08**],
contrairement au cas pseudo-parabolique $f' \equiv 0$, $b = 0$
(cf. [**DiBenedetto et Pierre'81**]) et contrairement au cas
classique ($b = a = 0$, $\alpha > 0$).

Une simulation numérique



“Explosion” en temps fini pour le potentiel logarithmique

$$\theta = 1, \theta_c = 2, \alpha = 0.01, a = 1, b = 4.$$

CB périodiques avec $x \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (tore). En posant $L_{a,b} = I + b.\nabla - a\Delta$ de domaine $H^1(\mathbf{T}) = H_{\text{per}}^1(0, 1)$, (11) s'écrit

$$u_t = \alpha\Delta \circ L_{a,b}^{-1}u - L_{a,b}^{-1}f'(u). \quad (12)$$

\Rightarrow existence locale pour toute donnée $u \in C^0(\mathbf{T})$ telle que $|u| < 1$ dans \mathbf{T} (Cauchy-Lipschitz). En revanche, on a

Théorème (Cherfils & P.'08)

On suppose que f est le potentiel logarithmique et on fixe $x_0 \in \mathbf{T}$. Alors, pour $\alpha > 0$ assez petit, il existe $T > 0$ et

$$u \in C^1([-T, 0]; C^0(\mathbf{T})) \cap C^1([-T, 0]; C^2(\mathbf{T}))$$

tels que $\|u(t)\|_\infty < 1$ pour tout $t \in [-T, 0)$, u satisfait (12) sur $[-T, 0)$, $u(x_0, 0) = 1$ et $u_t(x_0, 0) > 0$. En particulier, u ne peut pas être prolongé pour des temps positifs comme une solution classique de (12).

Une piste pour définir une solution globale

On a $f'(s) = g(s) - \theta_c s$ avec $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ continue croissante maximale. Pour $b = 0$ et $a = 1$, on récrit (12)

$$u_t = -L_{a,b}^{-1}g(u) + (\alpha\Delta \circ L_{a,b}^{-1} + \theta_c L_{a,b}^{-1})u.$$

Dans $H = H^1(\mathbf{T})$, l'opérateur $A = L_{1,0}^{-1}g$ de domaine $D(A) = \{u \in H : g(u) \in L^2(0, 1)\}$ est monotone, car

$$(Au - Av, u - v)_H = \int_0^1 (g(u) - g(v))(u - v) dx \geq 0 \quad \forall u, v \in D(A).$$

On montre que \overline{A} est (multivalué) **maximal monotone** dans H .

Pour tout $u_0 \in D(\overline{A})$, il existe une unique solution forte

$u \in C([0, +\infty); H)$ de $0 \in u_t + \overline{A}u - Lu$, où

$L = (\alpha\Delta \circ L_{a,b}^{-1} + \theta_c L_{a,b}^{-1})$ est linéaire et borné sur H .

\Rightarrow : cas général en cours d'étude

Soient D le disque unité de \mathbf{R}^2 , de frontière $\partial D = S^1$, et S^2 la sphère unité de \mathbf{R}^3 .

Problème : pour une donnée au bord $\gamma : \partial D \rightarrow S^2$, trouver $u : \bar{D} \rightarrow S^2$ solution de

$$-\Delta u = u |\nabla u|^2 \quad \text{dans } D, \quad (13)$$

$$u = \gamma \quad \text{sur } \partial D. \quad (14)$$

Pour γ constant, résultat d'unicité de **[Lemaire'78]** et pour γ non constant, résultats de multiplicité de **[Brezis et Coron'83]**, **[Jost'84]**, **[Soyeur'89]**, **[Kuwert'94]**, **[Qing'92a]** et **[Qing'92b]**.
Résultat de régularité de **[Helein'90]** et **[Qing'93]**.

Une **application harmonique** (solution de (13)) est un point critique de

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 \, dx \, dy.$$

Invariance de \mathcal{E} sous l'action de $\text{Aut}(D) \times O(3)$ (invariance conforme de domaine et invariance isométrique de S^2) dans $H^1(D, S^2)$ et $H^{1/2}(S^1, S^2)$. On pose

$$\gamma_{a,n} : S^1 \ni z \mapsto \Pi_N^{-1}(az^n) \in S^2 \quad (a \in [1, +\infty), n \in \mathbf{N}^*),$$

où $\Pi_N : S^2 \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ est la projection stéréographique de pôle nord et où $S^1 \simeq \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

Théorème (P.'08)

Si $\gamma \in H^{1/2}(S^1, S^2)$ est une donnée au bord non constante dont le stabilisateur est de cardinal infini, alors il existe $(g, T) \in \text{Aut}^+(D) \times O^+(3)$ tel que $T \circ \gamma \circ g^{-1} = \gamma_{a,n}$ p.p. dans S^1 , pour un unique $a \geq 1$ et un unique $n \in \mathbf{N}^$.*

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$ et $z \in S^1$, on a $a(e^{i\theta} z)^n = e^{in\theta}(az^n)$, i.e. que le stabilisateur de $\gamma_{a,n}$ contient le groupe continu de rotations

$$G_n = \{(R_\theta, R_{n\theta}) : \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}\},$$

où R_α = rotation vectorielle de \mathbf{R}^3 d'angle α par rapport à $[0z]$
Pour $\gamma = \gamma_{a,n}$, deux solutions distinctes de (13)–(14) sont

$$\underline{u}_{a,n} : z \mapsto \Pi_N^{-1}(az^n) \quad \text{et} \quad \bar{u}_{a,n} : z \mapsto \Pi_N^{-1}(a\bar{z}^{-n}),$$

et leur stabilisateur contient G_n .

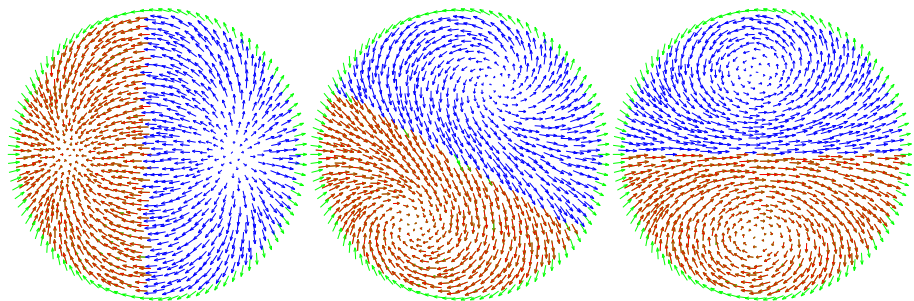
Théorème (P.'08)

Si $\gamma = \gamma_{a,n}$ pour un $a \in [1, +\infty)$ et un $n \in \mathbf{N}^$, et si u est une solution de (13)–(14) distincte de $\underline{u}_{a,n}$ et $\bar{u}_{a,n}$, alors u a un stabilisateur fini. En particulier, l'existence d'un tel u implique l'existence d'un continuum de solutions au problème pour la même donnée au bord $\gamma_{a,n}$ et dans la même classe d'homotopie, par action du groupe G_n sur u .*

- Problème de Brezis : pour ($a \geq 1$ et) $n = 1$ existe-t-il une extension harmonique de $\gamma_{a,n}$ distincte de $\underline{u}_{a,n}$ et $\bar{u}_{a,n}$?
- Résultats précédents adaptés à des groupes discrets de rotation : classification de tous les stabilisateurs finis et brisure de symétrie discrète ([P.'08] et [P.'05]).

Proposition (P.'08)

Il existe une donnée au bord $\gamma \in C^2(S^1, S^2)$ dont le stabilisateur est trivial et qui admet au moins deux prolongements harmoniques distincts appartenant à une même classe d'homotopie



Trois minimiseurs homotopes pour $\gamma_{a,n}$ avec $a = 1$, $n = 2$

- **Analyse numérique de modèles de type Cahn-Hilliard**
 - avec condition au bord dynamique [Cherfils, Petcu et P.'10]
 - avec terme inertiel [Grasselli et P.'10], [Grasselli, Lecoq et P. à p.]
 - Modèle de Cahn-Hilliard-Gurtin [Injrou et P.'08 et '10]
- **Étude de singularités dans des problèmes paraboliques**
 - Equation d'Allen-Cahn-Gurtin avec potentiel logarithmique [Cherfils et P.'08]
 - Equation de diffusion visqueuse [P.'08]
 - Flot des applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [Merlet et P.'05]
- **Étude théorique et numérique de problèmes stationnaires**
 - Modèle de champ de phase cristallin [P. et Rougirel]
 - Applications harmoniques $B^2 \rightarrow S^2$ [P.'05 et '08]
- **Convergence vers l'équilibre**
 - Modèles ci-dessus
 - Discrétisation d'EDOs [Merlet et P.'10], [Grasselli et P. à p.]