# Quelle est la forme du tas de sable ?

On verse du sable sec et fin sur une plaque horizontale et surélevée, jusqu'à ce qu'il déborde de tous les côtés.

**Question :** quelle est la forme du tas de sable que l'on obtient ainsi ?

# Si la plaque est un quadrilatère :

on obtient, pour les faces, deux triangles et deux quadrilatères séparés par une arête dit faîtière.

Lorsque les quatre bissectrices sont concourantes, cette arête se réduit à un point, et l'on obtient un tas pyramidal.

# Dans le cas général :

Quand le sable commence à déborder de la plaque, les grains s'écoulent, selon la ligne de plus grande pente, vers le bord de la plaque le plus proche. La **pente** du tas de sable ainsi formé est **constante**.

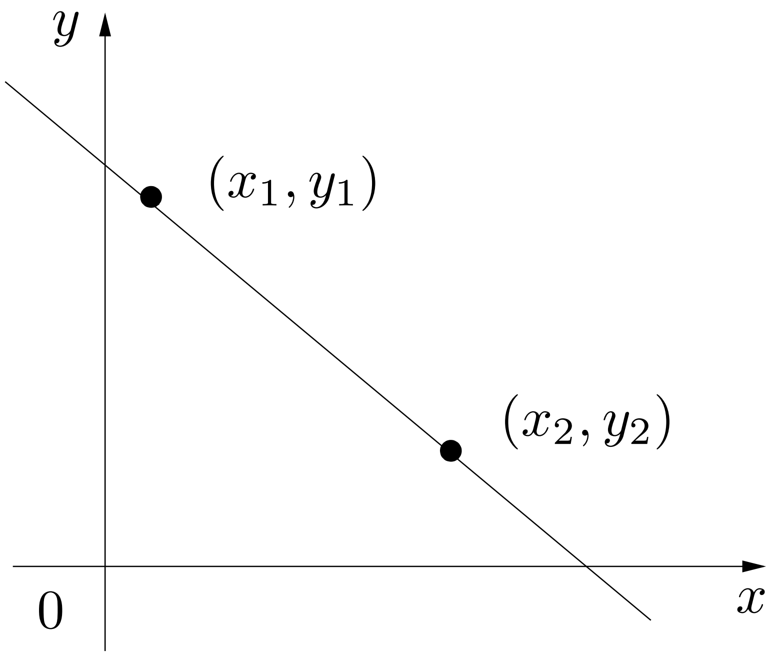
Les arêtes du tas de sable sont formées de points équidistants des bords de la plaque les plus proches.

# Mise en équation

On rappelle que pour une droite d'équation $y = ax + b$ dans le plan orthonormé $(0, x, y)$, la **pente** de la droite est

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

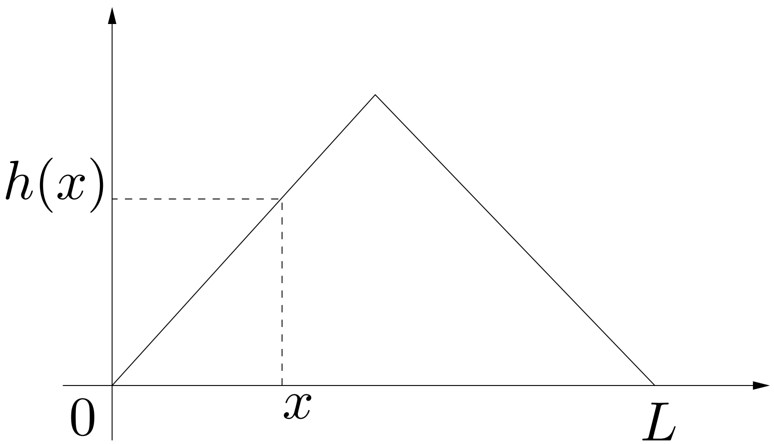
si la droite passe par les points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$.



## Mise en équation (suite)

Pour le tas de sable, on raisonne d'abord en **dimension 1**, ce qui revient à faire une coupe transversale dans le cas de la plaque rectangulaire par exemple. La plaque est une ligne de longueur $L$, dont les points sont repérés par une abscisse $x \in [0, L]$.

On note $h(x)$ la hauteur du tas de sable à la verticale du point d'abscisse $x$.



## Mise en équation (suite)

La **pente** du tas de sable (au point $x_1$) est la **dérivée** :

$$\frac{dh}{dx}(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dire que la pente est constante s'écrit

$$\left| \frac{dh}{dx}(x) \right| = constante,$$

où la constante est indépendante de $x \in [0, L]$.

On prend une valeur absolue parce que la pente ne doit pas dépendre de l'orientation choisie. Sur les bords de la plaque, la hauteur est nulle : $h(0) = 0$ et $h(L) = 0$.

## Résolution

Le problème est donc de trouver une fonction $h : [0, L] \to \mathbb{R}$ telle que $h(0) = h(L) = 0$ et

$$\left| \frac{dh}{dx}(x) \right| = 1 \text{ pour tout } x \in [0, L] \qquad (1)$$

où la constante vaut 1 sans perdre de généralité.

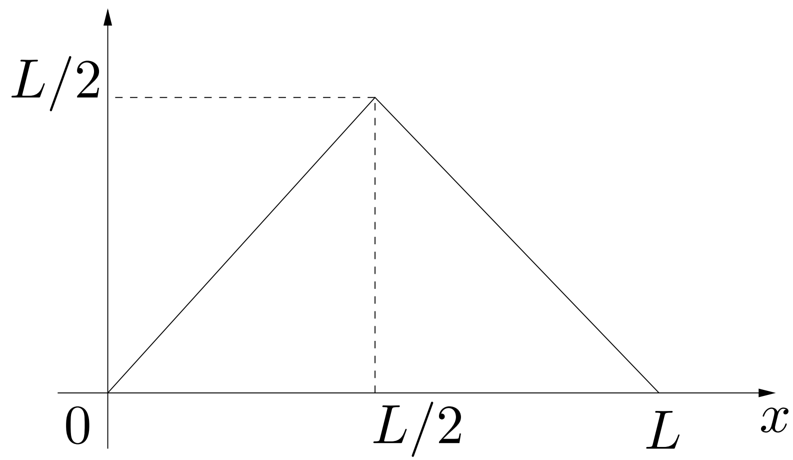
**Problème :** cette équation n'a pas de solution "classique", i.e. de solution qui soit partout dérivable sur $]0, L[$ et continue sur $[0, L]$ (sinon, on aurait un point $x_1 \in ]0, L[$ tel que $\frac{dh}{dx}(x_1) = 0$, ce qui contredirait l'équation).

## Résolution (suite)

On remarque que la fonction

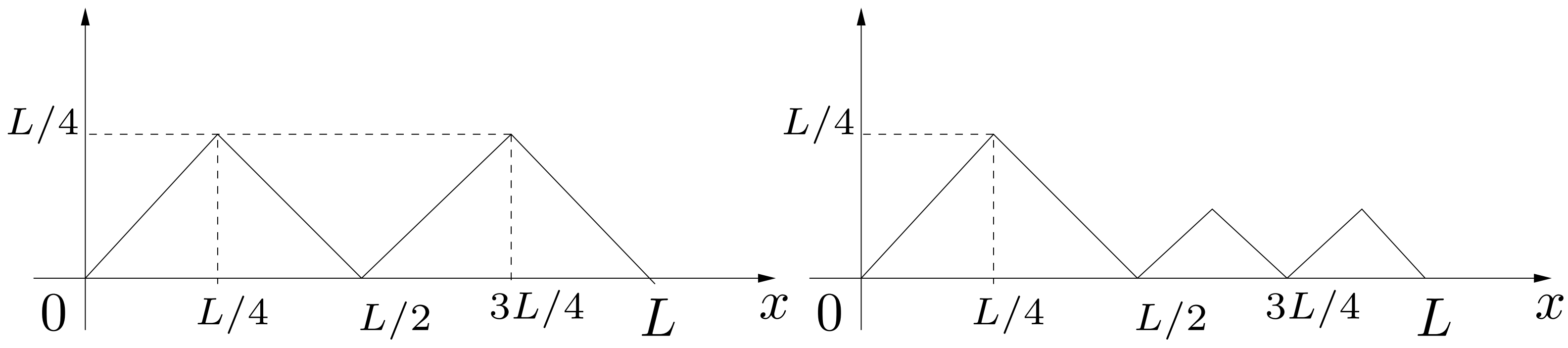
$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, L/2], \\ L - x & \text{si } x \in [L/2, L] \end{cases}$$

est une solution de (1) qui est dérivable partout sauf au point $x = L/2$.



## Résolution (suite)

Mais on remarque que beaucoup (une infinité !) d'autres fonctions dérivables partout sauf en un nombre fini de points sont également des solutions du problème.



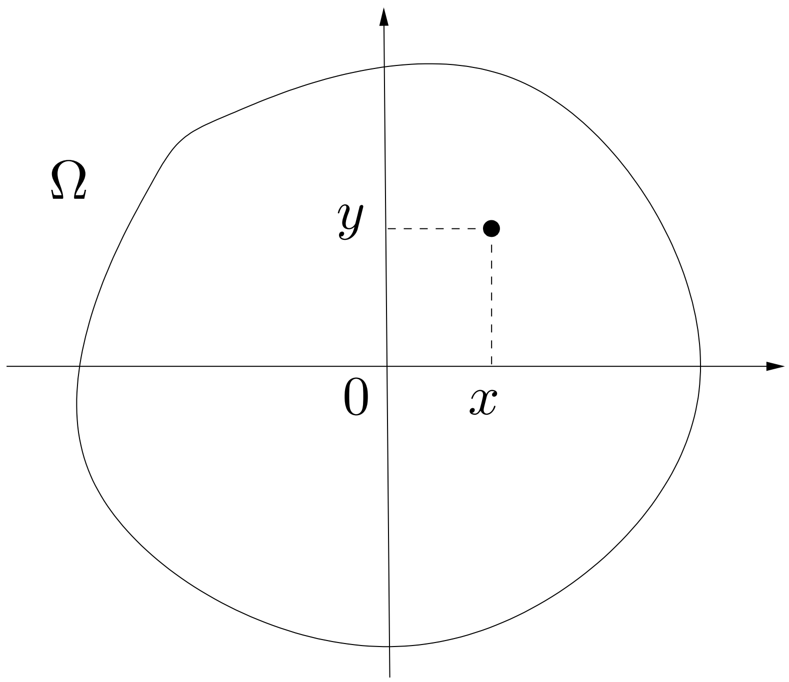
## Résolution (suite)

Ainsi, si on relaxe la condition d'être partout dérivable, on a des solutions, mais on en a trop ! Il faut un critère d'**unicité**.

D'où la notion mathématique de **solution de viscosité**, introduite en 1981 par M. Crandall et P.L. Lions pour traiter les équations d'Hamilton-Jacobi du premier ordre.

# Equation en dimension 2

la plaque $\Omega$ est vue comme un sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ repéré par des coordonnées cartésiennes $(0, x, y)$.




$h(x, y)$= hauteur du tas a la verticale du point $(x, y)$

## tas de sable = surface de pente constante

la généralisation du raisonnement précédent conduit à l'équation

$$\boxed{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 (x,y) + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 (x,y)} = constante \text{ dans } \Omega}$$

Il s'agit de l' **équation eikonale**, qui intervient aussi en optique géométrique.

C'est une **équation aux dérivées partielles non linéaire**, de type elliptique très dégénéré.

Pour résoudre l'équation, il faut rajouter la condition

$$h(x,y) = 0 \text{ sur le bord de } \Omega$$

Un exemple de résultat mathématique :

**Théorème 1.** *Soit* $\Omega$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$*. Alors la fonction "distance au bord"*

$$u(x) = d(x, \partial\Omega)$$

*est l'unique solution de viscosité de l'équation*

$$\|Du(x)\|_2 - 1 = 0 \quad x \in \Omega$$

*telle que* $u \in C^0(\overline{\Omega})$ *et* $u(x) = 0$ *pour* $x \in \partial\Omega$*.*

NB : $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

On pose $H(x, Du(x)) = \|Du(x)\|_2 - 1$

**Définition 1.** *On dit que* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *est* **solution de viscosité** *de l'équation*

$$H(x, Du(x)) = 0 \quad x \in \Omega$$

*si* $u \in C(\Omega)$*, si pour toute fonction test* $\phi \in C^2(\Omega)$ *telle que* $u - \phi$ *a un maximum local en un point* $x_0 \in \Omega$*, on a*

$$H(x_0, D\phi(x_0)) \leq 0$$

*et si pour toute fonction test* $\phi \in C^2(\Omega)$ *telle que* $u - \phi$ *a un minimum local en un point* $x_0 \in \Omega$*, on a*

$$H(x_0, D\phi(x_0)) \geq 0.$$

D'autres questions qui se posent :

• régularité des solutions / étude du lieu des points singuliers.

• stabilité des solutions / approximation numérique

• ...

Quelques références sur les solutions de viscosité : livres de P.L. Lions (1985), de Barles (1994), de Bardi et Capuzzo Dolcetta (1996), polycopié (en ligne !) de Barles (1997),...

Ce problème est un exemple de **modélisation mathématique**. On peut essayer d'améliorer le modèle pour coller mieux à la réalité.