Université de Poitiers Année 2014-2015

L3 Mathématiques - Calcul Scientifique

Contrôle du 10/12/2014. Durée 2h.

On fera un document `LibreOffice` comprenant :
- Le programme de l'exercice 1, ainsi que **les quatre valeurs numériques obtenues**, et la réponse à la question 1 c).
- le programme de l'exercice 2
- le graphique obtenu aux questions 2 e) et 2 f).
- la réponse à la question 2 g).

Envoyez votre document final par email au surveillant de votre salle (N. James ou M. Pierre), qui vous confirmera réception avant que vous ne sortiez.

Autorisés / interdits

Les fichiers `Scilab` programmés pendant les TPs sont autorisés, ainsi que leur version imprimée. Vous pouvez également utiliser vos notes de TP/TD/Cours de Calcul Scientifique et accéder au web pour rechercher de l'aide.

Pendant l'épreuve, les communications (email, téléphone, coup d'oeil au voisin) sont **interdites**.

Intégration numérique

On considère la formule de quadrature élémentaire

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(y) + f(z), \text{ avec } y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } z = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

ainsi que la formule de quadrature composée associée sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(y_i) + f(z_i)), \tag{1}$$

où $n \in \mathbb{N}^\star$, $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ et

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{h\sqrt{3}}{6}, \\ z_i &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Exercice 1 Ecrire un programme qui :

a) Définit une fonction `function I=FQC(f,a,b,n)` qui calcule $\int_a^b f(x)dx$ par la formule de quadrature composée (1).
b) Donne les valeurs approchées (à 10^{-7} près) obtenues pour les cas suivants :
  i) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi/2$, $n = 10$ et $n = 100$.
  ii) $f(x) = x^{3/2}\ln(x)$, $a = 0$, $b = 1$, $n = 10$ et $n = 100$.
c) (*sur feuille*) Quelles valeurs faut-il donner à a, b et n pour retrouver la formule élémentaire à partir de la formule composée ?

Méthode de Newton

On considère la fonction $f(x) = (x^2-3)^2$, dont les racines sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. On rappelle que la méthode de Newton, pour calculer une racine a de f, est

$$\begin{cases} x_0 \text{ “proche” de } a \\ x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) \quad \text{pour } k \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 2 Faire un programme qui :
a) Définit la fonction $f(x)$ par `function y=f(x)`.
b) Définit la fonction $f'(x)$ par `function y=fprime(x)` (on calculera d'abord $f'(x)$ “à la main”).
c) Choisit $x_0 = 1$ et stocke la valeur $a = \sqrt{3}$ (obtenue avec la fonction `sqrt`).
d) Calcule les 50 premiers itérés x_k obtenus par la méthode de Newton (2).
e) Affiche l'erreur $|x_k - a|$ en fonction de k pour $k \in \{0, \dots, 50\}$.
f) En utilisant une échelle logarithmique adaptée pour le graphique, mettre en évidence que l'erreur suit une loi en $C/2^k$, où C est une constante.
g) (*sur feuille*) La convergence est-elle quadratique ? Pourquoi ?