Marrakech, 16-21 novembre 2009

Introduction à FreeFem++

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Formulation variationnelle et éléments finis P^1 **2**
2.1 Problème modèle en dimension 1 2
2.1.1 Formulation variationnelle 3
2.1.2 Approximation par élements finis P^1 4
2.1.3 Comparaison avec les différences finies 6
2.2 Problème modèle en dimension 2 7
2.2.1 Formules de Green 7
2.2.2 Formulation variationnelle 8
2.2.3 Triangulation d'un domaine 9
2.2.4 Approximation par éléments finis P^1 10
2.3 Exercices : variantes du problème modèle 11
2.3.1 Condition de Dirichlet non homogène 12
2.3.2 Condition de Neumann 12
2.3.3 Résolution d'une variante du problème modèle par éléments finis P^1 12

3 Exercices autour du problème modèle **13**
3.1 Variations sur le domaine 13
3.2 Adaptation de maillage 14
3.3 Est-ce que ca converge ? 14
3.4 Variations dans l'équation 15
3.5 Equation d'évolution 15

1 Introduction

La page d'accueil de FreeFem++ fournit beaucoup d'information. Pour les TP, nous allons nous inspirer fortement des documents présentés sur la page du CMAP (Centre de Mathmatiques Appliques de l'Ecole Polytechnique). Voir le lien Olivier Pantz sur la page de FreeFem++.

Notre premier TP FreeFem++ consiste à résoudre le problème : trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= 0 \quad (x,y) \in \Gamma, \end{aligned}$$

où $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ est le carré unité et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière.

On choisira comme donnée $f(x,y) = xy$ (par exemple).

Le fichier suivant, nommé `laplace1.edp`, donne un codage de ce problème en FreeFem++ :

```
//. Fonction f
func f=x*y;
//Definition du maillage
mesh Th=square(20,20);//construit une grille 20*20 du carre unite
plot(Th,wait=1);//affiche le maillage et attend un click de souris
//espace Elements Finis P1
fespace Vh(Th,P1); //construit  d'apres Th
Vh uh,vh; //uh et vh sont des elements de Vh
//Definition du probleme sous forme variationnelle
problem laplace(uh,vh,solver=LU)=
int2d(Th)(dx(uh)*dx(vh)+dy(uh)*dy(vh))-int2d(Th)(f*vh)+on(1,2,3,4,uh=0);
//NB : le carre a 4 cotes numerotes de 1 a 4
//Resolution du probleme
laplace;
//On affiche le resultat
plot(uh,wait=1,fill=true,value=true);
```

Le programme fournit les résultats suivant :

La première étape de ce cours est de comprendre d'où vient ce codage : formulation variationnelle, maillage Th, définition de Vh. Ensuite, nous appliquerons la méthode à d'autres problèmes.

2 Formulation variationnelle et éléments finis P^1

2.1 Problème modèle en dimension 1

On veut résoudre le problème modlèle : trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{2}$$

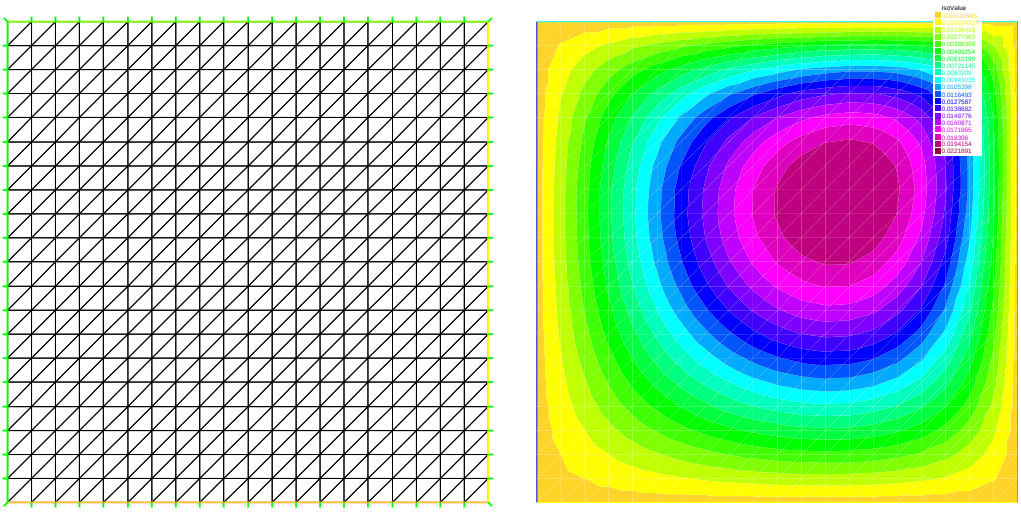

FIGURE 1 – Visualisation de Th (gauche) et de uh (droite)

où $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ est donné.

On peut montrer qu'il s'agit d'un problème bien posé :

Théorème 2.1 (Existence et unicité) *Supposons $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Le problème (1)(2) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$.*

2.1.1 Formulation variationnelle

On note

$$V = C_0^1([0,1]) = \{v \in C^1([0,1]) \ : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Formulation variationnelle : soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tel que $u(0) = u(1) = 0$ solution de (1). Alors , multiplication par $\varphi \in V$ et intégration par parties donne

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in V. \tag{3}$$

On a la

Proposition 2.2 *Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que $u(0) = u(1) = 0$. Alors u vérifie (1) si et seulement si u vérifie (3).*

On a vu un des sens. La réciproque est basée sur le

Lemme 2.3 *Soit g une fonction de $C^0([0,1])$ telle que pour tout $\varphi \in V$, $\int_\Omega g\varphi dx = 0$. Alors $g = 0$ sur $[0,1]$.*

La formulation variationnelle du Théorème 2.1 s'écrit

Théorème 2.4 *Soit $f \in C^0([0,1])$. Alors il existe une unique fonction $u \in V$ solution de (3). De plus, $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$.*

Un des intérêts de la FV est de demander moins de régularité. On cherche ici $u \in V$.

Forme générale : la FV peut sécrire de manière condensée comme : trouver $u \in V$ solution de

$$a(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in V,$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire sur $V \times V$ définie par

$$a(u, v) = \int_0^1 u(x)'v'(x) + u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in V,$$

et $l(\cdot)$ est la forme linéaire définie par

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V.$$

NB : on peut montrer u est l'unique minimiseur de la fonctionnelle $\mathcal{F}(v) = 1/2 \int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 fvdx$ sur V (remarquer que cette fonctionnelle est strictement convexe sur un convexe).

2.1.2 Approximation par élements finis P^1

On se donne une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, 1]$ de pas $h = 1/(N + 1)$ avec $x_i = ih$, $i \in \{0, \ldots, N + 1\}$. On définit l'espace

$$V_h = \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0, 1]),\ u(0) = u(1) = 0,\ u_{|[x_i, x_{i+1}]} \text{ est affine } \forall i \in \{0, \ldots, N\} \right\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace de V de dimension finie. Plus précisément, si on introduit les fonctions $\varphi_1, \ldots \varphi_N$ définies par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, ("fonctions chapeau"), alors

Proposition 2.5 *Pour tout $u_h \in V_h$, $u_h = \sum_{i=1}^N u_h(x_i)\varphi_i(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. En particulier, la famille $(\varphi_i)_{1 \le i \le N}$ constitue une base de V_h.*

En d'autres termes, V_h est un sous-espace de $H_0^1(I)$ de dimension N. Toute fonction $u_h \in V_h$ est définie de façon unique par ses valeurs aux points $(x_i)_{1 \le i \le N}$. Pour le calcul, leur expression est donnée par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/h & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant, on restreint (3) à l'espace V_h, sur lequel les calculs seront faciles à effectuer :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, \varphi_h) = l(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h. \tag{4}$$

Du point de vue analyse numérique, on se pose les questions suivantes :
Question 1 : existence et unicité de solution au problème (4) ?
Question 2 : calcul effectif ?
Question 3 : convergence de la méthode ? (qd $h \to 0$)
Question 3 bis : estimation de l'erreur ?

Plusieurs références classiques s'intéressent à ces problèmes. Nous n'étudierons pas ici les questions 3 et 4, mais on pourra y répondre "numériquement".

Pour les questions 1 et 2, on va écrire le problème (4) en utilisant la base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$. En effet, u_h est solution de (4), si et seulement si u_h vérifie l'équation pour $\varphi_h = \varphi_i$, $i = 1, \dots N$. On cherche donc $u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j\varphi_j(x)$ telle que

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^N u_j\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^N u_j\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx, \quad i = 1, \dots N.$$

ou encore,

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}u_j = b_i, \quad i = 1, \dots N,$$

avec $b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$, $a_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx + \int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx$. C'est un système linéaire

$$A_hU_h = B_h,$$

avec $U_h = (u_1, \dots, u_N)$, B_h est le vecteur de composantes b_i et $A_h = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ matrice $N \times N$. Remarquons maintenant que la restriction à V_h de $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc sa matrice associée dans la base $(\varphi_i)_i$, A_h, est définie positive (on a ${}^tU_hA_hU_h = a(u_h, uh)$). En particulier, A_h est inversible et

Proposition 2.6 *Le problème* (4) *admet une unique solution.*

Calcul de A_h Remarquons que A_h est une matrice tridiagonale car φ_i et φ_j sont à support disjoints dès que $|i - j| \geq 2$. Comme

$$\varphi_i' = \begin{cases} 1/h & \text{sur}]x_{i-1}, x_i[, \\ -1/h & \text{sur }]x_i, x_{i+1}[, \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$$

on obtient facilement

$$\int_0^1 \varphi_i'^2dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h}, \int_0^1 \varphi_i'\varphi_{i+1}' = -\frac{1}{h}.$$

On obtient en posant $t = (x - x_i)/h$,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)\varphi_i^2(x)dx = c\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 dx = ch\int_0^1 t^2dt = c\frac{h}{3},$$
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x)\varphi_i^2(x)dx = c\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right) dx = ch\int_0^1 t^2dt = c\frac{h}{3},$$
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx = c\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)}{h}\frac{(x - x_i)}{h}dx = ch\int_0^1 (1 - t)tdt = c\frac{h}{6}.$$

En posant

$$f_i^- = \frac{2}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx \text{ et } f_i^+ = \frac{2}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx,$$

(de façon à obtenir f pour $f = cste$) (4) s'écrit

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h} + h(\frac{1}{6}u_{i-1} + \frac{2}{3}u_i + \frac{1}{6}u_{i+1}) = h\frac{(f_i^- + f_i^+)}{2}.$$

On retrouve un schéma proche du schéma différences finies.

Le calcul des termes $f_i^{\pm}$ ne peut en général pas être fait de manière exacte : on utilisera une formule de quadrature, par exemple point milieu ou trapèze sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Si on évalue toutes les intégrales avec la formule du trapèze, on trouve le même schéma qu'en différences finies (exo).

Si on ne peut pas faire les calculs exactement, il y a un problème supplémentaire pour montrer la convergence (techniques d'EF non conformes).

2.1.3 Comparaison avec les différences finies

L'idée principale des différences finies est d'approcher la dérivée de la fonction u en un point x par des quotients aux différences finies (d'où le terme). Par exemple

$$\frac{du}{dx}(x) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Quand h est petit, le quotient $[u(x+h) - u(x)]/h$ constitue une bonne approximation de $du/dx(x)$. Pour approcher $u''(x)$, on utilise que le quotient différentiel $[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)]/h^2$ est une approximation consistante d'ordre deux de la dérivée seconde de u au point x. Plus précisément, si u est de classe $\mathcal{C}^4$ sur un voisinage $]x - h_0, x + h_0[$ de x, et si $0 \leq h \leq h_0$,

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi),$$

avec $\xi \in]x - h, x + h[$.

Pour résoudre (1)-(2), qn se donne une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, 1]$ de pas $h = 1/(N+1)$, i.e. $x_i = ih$, $i \in \{0, \ldots, N+1\}$. On cherche, en chacun de ces points, une valeur approchée notée u_i de $u(x_i)$. On prend $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$ aux extrémités de l'intervalle (condition (2)). Pour les points internes, on écrit l'équation (1) en chacun des sommets internes x_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$ du maillage, en approchant la dérivée seconde en ce point par le quotient différentiel ci-dessus. On obtient le système suivant :

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i = f(x_i), \quad i \in \{1, \ldots, N\} \tag{5}$$

$$u_0 = 0, \; u_{N+1} = 0. \tag{6}$$

On dit qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le "schéma à 3 points" de la dérivée seconde. Il s'agit d'un schéma "centré" : pour évaluer la valeur de u au point x_i, on utilise les valeurs en 3 points centrés autour de x_i.

On est en présence d'un système linéaire d'inconnues $u_1, \ldots, u_N$ (ca n'entre pas dans le cadre des suites récurrentes, de même que le problème aux limites n'est pas un pb de Cauchy). Matriciellement, le pb s'écrit (étape intermédiaire, écrire le système ligne par ligne) :

$$A_h u_h = b_h, \tag{7}$$

avec $u_h = (u_1, \ldots, u_N)$, $A_h = A_h^{(0)} + diag(c(x_1), \ldots, c(x_N))$,

$$A_h^{(0)} = 1/h^2[diag(2, N) + diag(-1, 1) + diag(-1, -1)],$$

et $b_h = (f(x_1), \ldots, f(x_N))$. Pour déterminer la solution discrète u_h, il suffit de résoudre le système linéaire (7).

Différences EF/DF : pour DF, simplicité de programmation, mais plus de régularité exigée. Moins de souplesse sur le domaine.

2.2 Problème modèle en dimension 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$). On note Γ sa frontière. Il s'agit de trouver $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{8}$$
$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma, \tag{9}$$

où $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est donnée et

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

est le laplacien de u.

Il s'agit d'une équation appelée **équation de Laplace** faisant intervenir des dérivées partielles de la fonction inconnue u au deuxième ordre.

Pour $n = 1$ et $\Omega =]0, 1[$, on retrouve le problème précédent (ca représente la déformation dans un plan d'un fil élastique maintenu à ses deux extrémités).

Si $n = 2$ et Ω un disque, cela matérialise par exemple la forme d'un film de cellophane sur un pot de confiture.

Ce problème est qualifié de "problème aux limites" : une EDP + des conditions aux bord du domaine (conditions aux limites). Voir par exemple [1] pour la modélisation.

2.2.1 Formules de Green

On suppose que Ω est un ouvert borné à frontière C^1 ou C^1 par morceaux de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ typiquement) de frontière Γ. Cela signifie que Γ est localement le graphe d'une fonction C^1 et Ω est situé d'un même côté par rapport à Γ.
Exemples : disque, carré, polygone, cube, tétraèdre, coin rentrant.
exclus : fissures, 1 point exclu, frontière continue non lipschitzienne (exo)
Intérêts : on peut définir en presque tout point x de Γ une normale unitaire $\nu(x)$ orientée vers l'extérieur de Ω. On peut également définir une mesure de Lebesgue (ou "mesure superficielle") $d\sigma$ sur Γ (avec la définition de Hausdorff, par exemple, mais le lien n'est pas facile à faire). Dans les exemples, on est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $d\sigma$ peut être défini de façon pratique par changements de coordonnées. On en a rarement besoin pour les calculs en fait ; dans un premier temps, le point important est de savoir que ca existe.

On note donc $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ la normale extérieure à Ω définie en presque tout point $x \in \Gamma$. On note $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ la restriction à $\overline{\Omega}$ de fonctions de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.7 (Formules de Green) *1. Si u et v sont des fonctions de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, on a pour tout indice $i \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma uv\nu_i d\sigma.$$

2. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma, \qquad \text{où} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i.$$

2.2.2 Formulation variationnelle

Soit donc Ω ouvert borné régulier de frontière Γ C^1 par morceaux. On donne une fonction $f : \overline{\Omega} :\to \mathbb{R}$ et on cherche $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{10}$$
$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{11}$$

Supposons d'abord f continue et $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Alors, en multipliant par $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi d\sigma = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx.$$

Si on suppose $\varphi = 0$ sur Γ (mêmes conditions au bord que u), le terme en $\int_\Gamma \ldots$ disparaît et on est donc ramené à trouver $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ telle que $u = 0$ sur Γ et

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega). \tag{12}$$

On a noté $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ l'espace des fonctions C^1 à support compact dans Ω. On remarque que cette formulation est de la forme

$$a(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), \tag{13}$$

avec

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \text{ et } l(\varphi) = \int_\Omega f\varphi.$$

La condition (12) est une condition nécessaire. Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ telle que $u = 0$ sur Γ vérifie (12), alors on peut remonter les calculs et on trouve que

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x) dx = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega).$$

On utilise alors le lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du Lemme 2.3 :

Lemme 2.8 *Soit g une fonction de $C^0(\overline{\Omega})$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, $\int_\Omega g\varphi dx = 0$. Alors $g = 0$ partout sur Ω.*

On en déduit que u est solution de (10). On a démontré la

Proposition 2.9 *Soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ telle que $u = 0$ sur Γ. Alors u vérifie* (10) *si et seulement si u vérifie* (12)*.*

On remarque que la formulation variationnelle a un sens pour des fonctions $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Cependant, on ne peut pas rester avec ce type de régularité. Cela motive l'introduction de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, espace Hilbertien pour le produit scalaire défini par $a(\cdot,\cdot)$. En fait, $H_0^1(\Omega)$ est le complété de l'espace des fonctions $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ telles que $u = 0$ sur Γ pour la norme associée au produit scalaire donné par la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. Le problème sous forme variationnelle s'énonce : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(u,\varphi) = l(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on peut énoncer

Théorème 2.10 *On suppose Ω borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Il existe une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{14}$$

Question : une solution du problème variationnel est-elle une solution classique ? En général, non. Si on a un plus de régularité sur f et sur Ω, il existe des résultats. C'est la question de la régularité (difficile, mais bien connue maintenant).

2.2.3 Triangulation d'un domaine

On souhaite résoudre un problème posé sous forme variationnelle dans $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ polygonal (en particulier, borné et connexe). La première étape est de découper le domaine Ω en petit domaines élémentaires : c'est l'étape de maillage, appelée également triangulation.

Définition 2.11 (Triangulation conforme) *On appelle triangulation conforme de Ω toute famille $\mathcal{T}_h = (T_k)_{1\le k\le N_h}$ telle que*

1. $\overline{\Omega} = \bigcup_{1\le k\le N_T} T_k$,
2. *chaque élément T_k est un triangle ou un rectangle fermé d'intérieur non vide ;*
3. *l'intersection entre deux éléments quelconques T_k et $T_{k'}$ est soit vide, soit réduite à un point, soit un coté tout entier.*

Exemples de conforme, de non conformes
NB : on emploie le terme "triangulation" même pour des rectangles.

On rappelle un résultat classique de recollement :

Lemme 2.12 *Soient Ω un ouvert polygonal et $\mathcal{T}_h = (T_k)_{1\le k\le N_h}$ une triangulation conforme de Ω. Si v est une fonction à valeurs réelles définie sur $\overline{\Omega}$ et dont la restriction à T_k est continue sur T_k pour tout $k \in \{1,\dots,N_T\}$, alors v est continue sur $\overline{\Omega}$.*

Ce résultat a un équivalent pour l'espace $H^1(\Omega)$, qui sera utile lors de la construction effective de sous-espaces de dimensions finies V_h de $H^1(\Omega)$.

Lemme 2.13 *Soient Ω un ouvert polygonal et $\mathcal{T}_h = (T_k)_{1\leq k\leq N_h}$ une triangulation conforme de Ω. Si $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est telle que la restriction $v_{|T_k}$ de v à T_k soit un polynôme pour tout $k = 1, \ldots, N_T$, alors v appartient à $H^1(\Omega)$ et pour $i \in \{1, 2\}$, la dérivée de v par rapport à x_i est définie par :*

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{|T_k} = \frac{\partial v_{|T_k}}{\partial x_i},$$

où le terme de gauche est la dérivée au sens des distributions.

Preuve. La preuve est basée sur la formule de Green. On fixe $i \in \{1, 2\}$ l'indice de dérivation. Soit $w_i \in L^2(\Omega)$ la fonction dont la restriction à T_k est $\dfrac{\partial v\big|_{T_k}}{\partial x_i}$. On utilise la formule de Green pour montrer que $w_i = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega w_i\varphi dx = \sum_{k=1}^{N_T} \int_{T_k} \frac{\partial v\big|_{T_k}}{\partial x_i}\varphi dx = -\sum_{k=1}^{N_T} \int_{T_k} v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx + \sum_{k=1}^{N_T} \int_{\partial T_k} v\varphi\nu_i d\sigma.$$

Le dernier terme dans cette somme est nul. En effet, si on introduit les arêtes intérieures $(e_i)_{i\in I_{int}}$, avec pour chacun un choix de normale ν_i, et les arêtes de bord $(e_i)_{i\in I_{bord}}$, la somme se récrit :

$$\sum_{k=1}^{N_T} \int_{\partial T_k} v\big|_{T_k}\varphi\nu_i d\sigma = \sum_{i\in I_{int}} \int_{e_i} v\varphi(\nu_i - \nu_i)d\sigma + \sum_{i\in I_{bord}} \int_{e_i} v\varphi\nu_i d\sigma = 0.$$

La somme des contributions sur les arêtes intérieures est nulle car v est continue, et la somme sur les arêtes de bord est nulle car $\varphi = 0$ sur Γ. Finalement, on trouve le résultat attendu, i.e.

$$\int_\Omega w_i\varphi dx = -\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx.$$

■

Un des intérêts majeurs de la méthode des éléments finis est de s'appliquer à des géométries compliquées, grâce à des triangulations du domaine par des triangles. Dans des cas de géométrie simple, on peut avec des grilles comme nous le verrons en différences finies recouvrir le domaine par des rectangles. Un tel maillage est dit structuré. Dans le cas de géométries compliquées, on préférera souvent un découpage en triangles pour mieux approcher la frontière. Un tel maillage se fait à l'aide d'un mailleur.

2.2.4 Approximation par éléments finis P^1

On résout le problème

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{15}$$
$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{16}$$

avec Ω ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$.

La formulation variationnelle de ce problème consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega fv \quad \forall v \in V, \tag{17}$$

avec $V = H_0^1(\Omega)$ – mais on pourra dans un premier temps considérer que

$$V = \{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \ : v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Comme Ω est un polygone du plan (on pourra commencer par un carré), on peut définir une triangulation de Ω par N_T petits triangles T_k ($k \in \{1, \ldots, N_T\}$. On note $a_i, i \in \{1, \ldots, N_S\}$ les N_S sommets de tous les triangles (les "noeuds" du maillage). Parmi ces sommets, N_{bord} (disons les N_{bord} derniers indices) sont sur la frontière Γ du domaine et N_{int} sont internes. On note $a = (x, y)$ les coordonnées du plan et $P^1 = Vect\{1, x, y\}$.

On introduit l'espace

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}),\ \forall k \in \{1, \ldots, N_T\},\ v_{h|T_k} \in P^1 \text{ et } v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{18}$$

On remarque que $V_h \subset V$. On a le résultat suivant (admis) :

Proposition 2.14 *La dimension de V_h est N_{int}, et une base est formée des N_{int} fonctions φ_i suivantes :*

$$\textit{pour } i = 1, \ldots, N_{int}, \quad \varphi_i \in V_h,\ \varphi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in \{1, \ldots, N_s\}.$$

On pour tout $v_h \in V_h$,

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_{int}} v_h(a_i)\varphi_i. \tag{19}$$

En d'autres termes, toute fonction $v_h \in V_h$ est uniquement déterminée par ses valeurs aux noeuds intérieurs du maillage.

La formulation variationnelle discrète consiste à trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_h. \tag{20}$$

Remarquer que ∇u_h désigne ici la dérivée au sens des distributions. Si on ne connait pas le sens, on peut considérer que l'on intègre sur chaque triangle T_k :

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{N_T} \int_{T_k} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \mathrm{d}x.$$

Ce problème est un problème linéaire dont la matrice est symétrique définie positive. Par conséquent :

Théorème 2.15 *Le problème* (20) *admet une unique solution $u_h \in V_h$.*

2.3 Exercices : variantes du problème modèle

On peut généraliser ou varier les conditions au bord (cf. les exemples ci-dessous) On peut généraliser l'opérateur : opérateurs du second ordre non symétriques, opérateurs d'ordre 4,...

2.3.1 Condition de Dirichlet non homogène

Une variante du problème modèle avec condition de Dirichlet non homogènes s'écrit : trouver $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{21}$$
$$u(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{22}$$

où $c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ sont données.

Exercice : écrire la formulation variationnelle de ce problème (et donner un théorème d'existence et d'unicité !).

2.3.2 Condition de Neumann

Le problème modèle avec conditions de Neumann non homogènes s'écrit : trouver $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{23}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{24}$$

où $c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ sont données.

Exercice : écrire la formulation variationnelle de ce problème (et donner un théorème d'existence et d'unicité !)

2.3.3 Résolution d'une variante du problème modèle par éléments finis P^1

On veut résoudre le problème modèle en dimension 2, avec conditions de Neumann :

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad && \text{sur } \Omega =]0,1[\times]0,1[, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est donnée, $\Gamma = \partial\Omega$ et u est la fonction inconnue.

La formulation variationnelle de ce problème consiste à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{25}$$

On considère encore que Ω est un polygone du plan. Cette fois on utilise une triangulation de Ω par N_T petits triangles T_k ($k \in \{1, \ldots, N_T\}$. On note $a_i, i \in \{1, \ldots, N_S\}$ les N_S sommets de tous les triangles (les "noeuds" du maillage). Parmi ces sommets, N_{bord} sont sur la frontière Γ du domaine et N_{int} sont internes. On note $a = (x, y)$ les coordonnées du plan et $P^1 = Vect\{1, x, y\}$.

On introduit l'espace

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}),\ \forall k \in \{1, \ldots, N_T\},\ v_{h|T_k} \in P^1\}. \tag{26}$$

On a le résultat suivant (admis) :

Proposition 2.16 *La dimension de V_h est N_S, et une base est formée des N_S fonctions φ_i suivantes :*

$$\text{pour } i = 1, \ldots, N_S, \quad \varphi_i \in V_h, \ \varphi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall j.$$

On pour tout $v_h \in V_h$,

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_S} v_h(a_i)\varphi_i. \tag{27}$$

En d'autres termes, toute fonction $v_h \in V_h$ est uniquement déterminée par ses valeurs aux noeuds du maillage.

Le domaine polygonal Ω étant découpé en triangles comme ci-dessus, l'approximation interne de V est donnée par l'espace V_h (26). La formulation variationnelle discrète consiste à trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \mathrm{d}x + \int_\Omega u_h v_h \mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_h. \tag{28}$$

Ce problème admet une unique solution $u_h \in V_h$. Il s'agit en effet d'un problème linéaire dont la matrice est symétrique définie positive.

3 Exercices autour du problème modèle

3.1 Variations sur le domaine

Résoudre le problème de l'introduction sur un domaine de la forme d'une couronne (centrée en 0, rayon extérieur 2, rayon intérieur 0.5). On utilisera les commandes `border` et `buildmesh`.

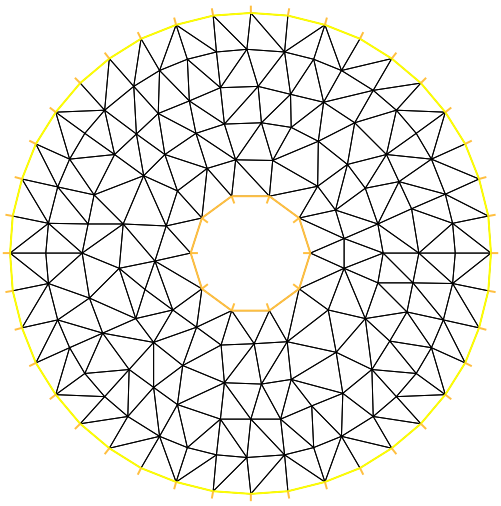

FIGURE 2 – Couronne

Même question avec un domaine de la forme $\Omega =]0,1|^2 \backslash]1/2,1]^2$.

Même question avec un maillage donné par le fichier `aile.msh`, que l'on trouvera dans le répertoire `examples++-tutorial`.

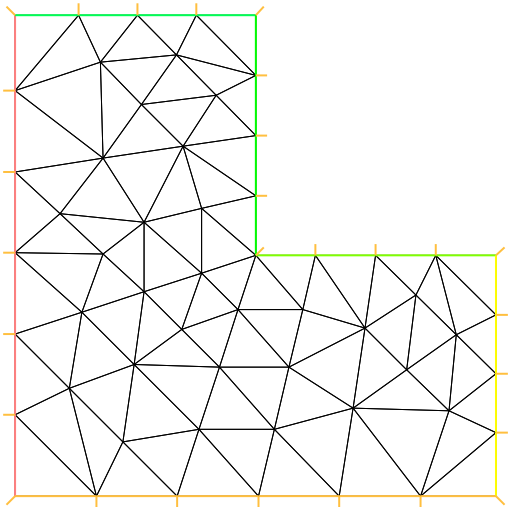

FIGURE 3 – “L”

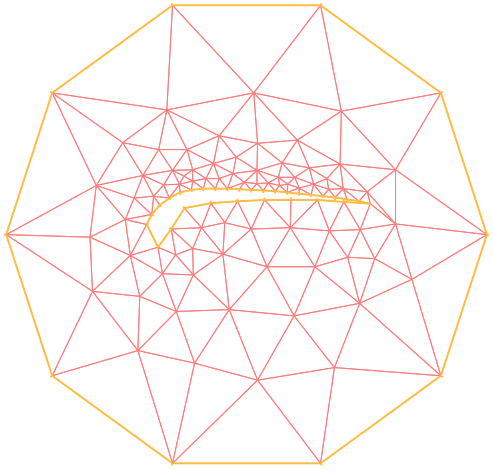

FIGURE 4 – Maillage contenu dans `aile.msh`

3.2 Adaptation de maillage

On peut raffiner un maillage dans les régions où il se passe quelquechose. La commande `adaptmesh` permet de faire cela clef en main.

Dans le cas du maillage en L, rajouter a la fin du programme les lignes

```
real erreur=0.001;
Th=adaptmesh(Th,uh,err=erreur);
```

Visualiser le maillage ainsi obtenu. Puis recalculer la solution `uh` et la visualiser.

3.3 Est-ce que ca converge ?

On considère le problème modèle sur le carré unité. Choisir u et en déduire f telle que $-\Delta u = f$. Vérifier avec FreeFem++ que la solution approchée converge bien vers la solution exacte lorsque le pas du maillage tend vers 0. On vérifiera que $\|u - u_h\|_{L^2}$ et

$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2}$ décroissent vers 0.

3.4 Variations dans l'équation

Résoudre avec `FreeFem++` les variantes du problème modèle proposée dans les sections 2.3.1 et 2.3.2.

3.5 Equation d'évolution

On considère le problème :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - \Delta u(x,y,t) &= f(x,y,t) \quad (x,y) \in \Omega,\ t \geq 0 && (29)\\ u(x,y,t) &= 0 \quad \forall (x,y) \in \Gamma,\ \forall t \geq 0, && (30)\\ u(x,y,0) &= u_0(x,y), && (31) \end{aligned}$$

o'u $f : \Omega \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ et $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ sont données.

C'est l'équation de la chaleur. Il s'agit d'une équation d'évolution : la variable t (le "temps") joue un rôle particulier.

Si on utilise le schéma d'Euler implicite pour discrétiser en temps cette équation, on est ramené à calculer une suite de fonctions $u^n : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} (u^{n+1} - u^n)/dt - \Delta u &= f \text{ dans } \Omega,\ n = 0,1,2,\ldots && (32)\\ u^{n+1} &= 0 \text{ sur } \Gamma, && (33)\\ u^0 &= u_0, && (34) \end{aligned}$$

où $dt > 0$ désigne le pas de temps. On a donc à chaque étape en temps un problème semblable au problème modèle à résoudre.

Programmer la résolution de (32)-(34) avec `FreeFem++`.

Références

[1] A. Miranville and R. Temam. *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*, volume 18 of *SCOPOS*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the 2000 English original.