Université de Poitiers
Année universitaire 2009-2010
Master 1 MFA & MMAS MATH1M02

TD de Probabilités

Equipe pédagogique :

- Cours : Marc Arnaudon (mail : marc.arnaudon@math.univ-poitiers.fr)
- TD : Clément Dombry (mail : clement.dombry@math.univ-poitiers.fr)
- TP : Anthony Phan (mail : anthony.phan@math.univ-poitiers.fr)

Mode d'emploi :
Ce fascicule contient des séries d'exercices sur les différents chapitres du cours. Ils ne seront pas forcément tous traités en TD. Vous êtes invités à chercher à la maison la solution des exercices avant le TD, à résoudre seuls les exercices non traités... N'hésitez pas à me poser des questions au besoin. Les sujets de partiels et d'examens des deux années précédentes se trouvent à la fin du fascicule et peuvent servir d'entrainement lors de vos révisions.

Contenu :

1 Base des probabilités

Exercice 1.1 (Notions de bases)

1. Rappeler la définition d'espace probabilisé, de variable (ou vecteur) aléatoire, de loi d'une variable aléatoire, d'espérance d'une variable intégrable.
2. Rappeler le théorème de transfert.

Exercice 1.2 (Un exemple simple : lancer de dés)

1. Proposer un espace probabilisé modélisant le lancer de deux dés non pipés indépendants. Définisser pour $i = 1, 2$ une variable aléatoire X_i représentant le résultat du i-ème dé ?
2. Quelle est la loi de X_i ? Son espérance ? Sa variance ?
3. Montrer que les événements "X_1 est pair" et "la somme $X_1 + X_2$ est paire" sont indépendants.

Exercice 1.3 (Calculs de base)
Calculer l'espérance, la fonction de répartition, et la fonction caractéristique pour :

1. la loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$,
2. la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 1.4 (Fonction caractéristique de la Gaussienne)
Calculer la fonction caractéristique de la loi de Gauss. On pourra montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Exercice 1.5 (Calcul d'espérance et variance pour des estimateurs)
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et variance σ^2.

1. Calculer l'espérance et la variance de l'estimateur de la moyenne

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

2. Calculer l'espérance de l'estimateur de la variance

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

Exercice 1.6 (Vecteur aléatoire donné par ses lois conditionnelles - partiel Mars 2008)
Soit X, Y, Z trois variables aléatoires réelles telles que

- X a une loi uniforme sur $[0, 1]$,

– sachant que $X = x \in [0,1]$, Y admet une densité conditionnelle $f_{Y|X=x}$ donnée par

$$f_{Y|X=x}(y) = (y-x)e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{y>x},$$

– sachant que $X = x \in [0,1]$ et $Y = y > x$, Z admet une densité conditionnelle $f_{Z|X=x,Y=y}$ donnée par

$$f_{Z|X=x,Y=y}(z) = (y-x)e^{-z(y-x)}\mathbf{1}_{z>0}.$$

1. Quelle est la loi de (X, Y, Z) ?
2. Quelle est la loi de Z ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de (X, Y) sachant $Z = z$
4. On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y - X)$. Calculer la loi de (X, U, V). Les variables X, U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 1.7 (Probabilité et théorie des nombres)
On choisit au hasard un entier entre 1 et n. Pour p un entier non nul, $p \leq n$, on définit A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer la probabilité de A_p lorsque p est un diviseur de n.
2. Montrer que si $p_1, \cdots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_k}$ sont indépendants.
3. On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction ϕ définie sur les entiers naturels dont la valeur $\phi(n)$ est égale au nombre d'entiers non nuls inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{p \text{ diviseur premier de } n} (1 - \frac{1}{p}).$$

Exercice 1.8 (Simulation par la méthode d'inversion)
Soit μ une loi sur $\mathbb{R}$ de fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. On appelle inverse généralisée de F la fonction F^{-1} définie pour tout $u \in]0,1[$ par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } F(x) \geq u\}.$$

1. En utilisant les propriétés de la fonction de répartition F, montrer que pour tout $u \in]0,1[$, l'ensemble
$$D_u = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$$
est non vide, minoré (si bien que $F^{-1}(u)$ est bien défini), puis que
$$D_u = [F^{-1}(u), +\infty[.$$
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $u \in]0,1[$, $u \leq F(x)$ si et seulement si $F^{-1}(u) \leq x$.
3. En déduire que si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors $F^{-1}(U)$ suit la loi μ.
4. En utilisant la méthode d'inversion, expliquer comment simuler la loi de Bernouilli, la loi géométrique, la loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$, la loi exponentielle.
5. Cette méthode est elle efficace pour simuler la loi binomiale, la loi de Poisson, la loi de Gauss ?

Exercice 1.9 (Simulation de loi gaussienne par la méthode polaire ou de Box-Muller)
Montrer que si U, V sont deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$, alors les variables $X = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V)$ sont gaussiennes standards et indépendantes.

Exercice 1.10 (Simulation de loi de Poisson)
Soit $(U_i)_{i\geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d. uniformes sur $[0,1]$, et $\lambda > 0$. On définit

$$N = \min\{n \geq 0 \; |U_0. \cdots .U_n \leq \exp(-\lambda)\}$$

Nous allons montrer que N suit une loi de Poisson.
Pour $n \geq 0$ on définit $V_n = -\ln(U_n)$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_n$.

1. Calculer $\mathbb{P}(N = 0)$ et $\mathbb{P}(N = 1)$.
2. Pour $n \geq 1$, montrer que $\{N = n\} = \{S_n < \lambda \text{ et } S_{n+1} \geq \lambda\}$.
3. Montrer que S_n a pour densité

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}1_{x\geq 0}.$$

4. Conclure.

2 Probabilités et espérances conditionnelles

Exercice 2.1 (question de cours - premières propriétés)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Donner la définition de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et redémontrer les propriétés suivantes :
1) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$
2) si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$
3) $\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + a_2\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$
4) si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$
5) si $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$

Exercice 2.2 (variance conditionnelle)
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On pose

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}].$$

1) Montrer que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]).$$

On pourra utiliser l'interprétation de l'espérance comme projecteur orthogonal dans le cas L^2.

Exercice 2.3 (question de cours - conditionnement discret)
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que Y est intégrable et que X est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_i, i \geq 1$. Explicitez la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 2.4 (somme d'un nombre aléatoire de v.a.i.i.d.)
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante des v.a. X_i, d'espérance m et de variance s^2. On pose

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

1) Montrer que la loi conditionnelle de S_N sachant $N = n$ est S_n
2) Calculer $\mathbb{E}[S_N|N]$ puis $\mathbb{E}[S_N]$.
3) Calculer $\mathrm{Var}(S_N)$.

Exercice 2.5 (processus de Galton Watson)
Soit X une v.a. à valeurs entières d'espérance m et variance σ^2. Soit $(X_r^m)_{m,r\in\mathbb{N}}$ une famille doublement infinie de v.a. indépendantes et de même loi que X.
On considère une suite de v.a. Z_n définie par : $Z_0 = 1$ et récursivement,

$$Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + \ldots + X_{Z_n}^{(n+1)}.$$

1) En utilisant l'exercice précédant, calculer $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, puis $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n.
2) De manière analogue, calculer la variance de Z_n en fonction de n.

Exercice 2.6 (urne de Polya)
Soit une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne de la manière suivante : à chaque tirage, on choisit au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne, ainsi qu'une autre boule de la meme couleur. On note S_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boule blanche dans l'urne après le n-eme tirage ($S_0 = 1$).
1) Déterminer la loi de S_{n+1} conditionnellement à $S_n = k$.
2) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(S_{n+1}|S_n)$, puis $\mathbb{E}(S_n)$.
3) De manière analogue, calculer la variance de S_n.
(indication : on pourra montrer que la quantité $W_n = \frac{S_n(S_n+1)}{(n+2)(n+3)}$ vérifie $\mathbb{E}(W_{n+1}|W_n) = W_n$)

Exercice 2.7 (variable sans mémoire I)
Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ non constante.
Soit $m \in \mathbb{N}$, on dit que T est une variable sans mémoire si la loi de $T - m$ sachant $T \geq m$ ne

dépend pas de m.
1) Montrer que les variables de loi géométrique sur $\mathbb{N}$ sont sans mémoire.
2) Réciproquement, montrer que toute variable à valeur dans $\mathbb{N}$ sans mémoire suit une loi géométrique.

Exercice 2.8 (conditionnement par la somme)
Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p).
1) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$.
2) Déterminer $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2)$.
3) Mêmes questions si X_1 et X_2 sont des v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètre respectifs λ_1, λ_2.

Exercice 2.9 (question de cours - cas de variables à densité)
Soit X et Y des v.a. dont la loi conjointe admet une densité $f_{(X,Y)}$. On note f_X et f_Y les densité des lois marginales de X et Y. On définit

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{si } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Soit h une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(|h(X)|) < \infty$. Posons $g(y) = \int h(x) f_{X|Y}(x,y) dx$.
1) Montrer que $g(Y)$ est une version de $\mathbb{E}(h(X)|Y)$.
2) Expliciter la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 2.10 (conditionnement par la somme)
Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement. Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$.

Exercice 2.11 (conditionnement par la somme - cas gaussien)
Soient X_1 et X_2 des v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
1) Déterminer la loi du couple (X_1, S) où $S = X_1 + X_2$.
2) Determiner la loi conditionnelle de X_1 sachant $S = s$ ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1|S)$.

Exercice 2.12 (variable sans mémoire II)
Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
1) Montrer que pour tout $s, t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s).$$

2) Montrer que cette propriété caractérise la loi exponentielle parmis toutes les lois à densité sur $\mathbb{R}^+$.

3 Convergence presque-sûre, en probabilités, L^p

Exercice 3.1 (question de cours)
Soient X et $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
1) Démontrer le critère de convergence presque sure suivant : si X et $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(|X_i - X| > \varepsilon) < \infty$$

alors la suite de variable aléatoire $(X_i)_{i\geq 1}$ converge presque surement vers X.
2) Montrer que la convergence $L^p, p \geq 1$ implique la convergence en probabilité.
3) Montrer que si $\mathbb{E}[X_n] \to m$ et $\mathrm{Var(X_n)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors X_n converge vers m dans L^2.

Exercice 3.2 (consistance des estimateurs de la moyenne et de la variance)
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. intégrable de moyenne μ.
1) Montrer que la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge presque surement vers μ lorsque X tend n tend vers l'infini. On dit que la suite d'estimateurs $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ est fortement consistante.
2) On suppose les X_i de carré intégrables, et on note σ^2 leur variance. Montrer que

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

définit une suite d'estimateurs fortement consistante pour σ^2. Montrer également que $\bar{X}_n$ converge vers μ dans L^2.

Exercice 3.3 (schéma de bernouilli avec probabilité de succès non constante)
Soit $(p_i)_{i\geq 1}$ une suite à valeurs dans $[0, 1]$.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec X_i de loi de Bernoulli de paramètre p_i, i.e.

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p_i.$$

On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Rappelons l'interprétation du schéma de Bernoulli : on réalise des expériences indépendantes, $X_i = 1$ signifie que la i-ème expérience est un succès (probabilité p_i), et S_n est le nombre de succès jusqu'au temps n.

1) On note A_i l'événement $\{X_i = 1\}$. Appliquer le lemme de Borel-Cantelli à la suite d'événements $(A_i)_{i\geq 1}$.

2) Montrer que si $\sum_{i\geq 1} p_i = +\infty$, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge presque surement vers $+\infty$.

3) Montrer que si $\sum_{i\geq 1} p_i < +\infty$, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement vers une variable aléatoire X. Calculer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique de X.

Sous quelles conditions supplémentaires la convergence a-t-elle lieu dans L^1 ? dans L^2 ?

Exercice 3.4 (série aléatoires)

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de bernoulli de paramètre $1/2$.

On pose pour $n \geq 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i 2^{-i}.$$

1) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement vers une variable aléatoire S.

2) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ suit une loi uniforme sur $\{k2^{-n}\ ,\ 0 \leq k \leq 2^{-n} - 1\}$.

3) En déduire la loi de S.

Exercice 3.5 (what's fair about a fair game ?)

$(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que

$$X_n = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{avec probabilité } n^{-2}, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - n^{-2} \end{cases}.$$

Montrer que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout n, mais si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors $\dfrac{S_n}{n} \to -1$, p.s.

4 Fonctions caractéristiques

Exercice 4.1 (fonction caractéristique des lois usuelles)

Soit X une variable aléatoire réelle de loi P_X et soit φ_X la fonction caractéristique de X,

$$\varphi_X(t) = \hat{P}_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Calculer les fonctions caractéristiques pour les lois classiques suivantes :

1) *loi uniforme*, $\mathcal{U}(1,\ldots,n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_k$ sur $\{1,\ldots,n\}$.

2) *loi de Bernoulli*, $\mathcal{B}(1,p) = (1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_1$ de paramètre $p \in [0,1]$.

3) *loi binomiale*, $\mathcal{B}(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,\delta_k$ de paramètres $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4) *loi de Poisson*, $\mathcal{P}(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,\delta_n$ de paramètre $\lambda > 0$.

5) *loi géométrique*, $\mathcal{G}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} p\,(1-p)^{k-1}\,\delta_k$ de paramètre $p \in \,]0,1]$.
6) *loi uniforme*, $\mathcal{U}([a,b]) = \dfrac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x$ sur $[a,b]$ avec $a < b$.
7) *loi exponentielle*, $\mathcal{E}(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty[}(x)\mathrm{d}x$ de paramètre $\lambda > 0$.
8) *loi de Cauchy*, $\mathcal{C}(c) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{c}{x^2+c^2}\mathrm{d}x$ de paramètre $c > 0$.
9) *loi de Gauss*, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x$ de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$.
10) *loi Gamma*, $\gamma(a,p) = \dfrac{p^a}{\Gamma(a)}\, e^{-px}\, x^{a-1} 1_{\{x>0\}}(x)\mathrm{d}x$ de paramètres $a > 0$ et $p > 0$.

Exercice 4.2 (lois de somme de variables indépendantes)
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Donner la loi de $Y = X_1 + \cdots + X_n$ dans les cas suivants :
1) X_k de loi $\mathcal{B}(n_k, p)$, $k = 1, \ldots, n$.
2) X_k de loi $\mathcal{P}(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, n$.
3) X_k de loi $\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \ldots, n$.
4) X_k de loi $\gamma(a_k, p)$, $k = 1, \ldots, n$.
5) X_k de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$.

Exercice 4.3 (vrai ou faux ?)
Il existe des variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi, telles que $P_{X-Y} = \mathcal{U}([-1,1])$.

Exercice 4.4 (mélange de lois)
Soit (U, X) un couple de variable aléatoires défini de la manière suivante :
- U suit une loi uniforme sur $[0,1]$,
- conditionnellement à $U = u$, X suit une loi de loi exponentielle de paramètre u.
1) Calculer la densité du couple (U, X).
2) Calculer la fonction caractéristique de φ_X.

Exercice 4.5 (lois symétriques)
Soit X une variable aléatoire réelle.
1) Montrer que φ_X est à valeur réelles si et seulement si X a une loi symétrique, i.e. $P_X = P_{-X}$.
2) Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ a une loi symétrique.

Exercice 4.6 (fonction caractéristique d'un produit de variables aléatoires indépendantes) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
1) Démontrer que la fonction caractéristique du produit XY est donnée par

$$\varphi_{XY}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(ty)\, P_Y(\mathrm{d}y), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2) Si de plus X et Y ont même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, déterminer la fonction φ_{XY}.
3) Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires réelles indépendantes, de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X_1X_2+X_3X_4$ suit une loi de Laplace et que $|X_1X_2+X_3X_4|$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1.

Exercice 4.7 (on peut avoir $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$ sans que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ de paramètre 1 et soient a, b, c, d des nombres réels strictement positifs. Considérons les variables aléatoires X et Y définies par

$$X = aU + bV, \qquad Y = cU + dV.$$

1) Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X,Y) et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.
2) Calculer la fonction caractéristique φ_{X+Y} de $X+Y$ et en déduire l'égalité des lois $P_{X+Y} = P_X * P_Y$.

Exercice 4.8 (somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes) Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, et N une variable aléatoire à valeurs entières, indépendante de X_i. Supposons que $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ et $\mathbb{E}[N] < \infty$. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad S_N = X_1 + \cdots + X_N,$$

avec la convention que $S_N = 0$ sur l'ensemble où $N = 0$.
1) Montrer que $\varphi_{S_N}(t) = \mathbb{E}[\varphi_{X_i}(t)^N]$.
2) En déduire que $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{E}[X_i]$. **3)** Expliciter le cas où N est une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4.9 (fonctions caractéristiques et développements asymptotiques) Soit X une variable aléatoire réelle de fonction caractéristique φ_X.
1) Montrer que si $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ pour un entier n, on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t),$$

où $|\varepsilon_n(t)| \leq 3\mathbb{E}|X|^n$ et $\varepsilon_n(t) \to 0$, $t \to 0$.
2) Montrer que si $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ pour tout entier $n \geq 1$ et si $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{(\mathbb{E}|X|^n)^{1/n}}{n} = \dfrac{1}{t_0} < \infty$, alors on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}[X^n], \qquad \forall\, |t| < t_0.$$

De plus, la loi de X est uniquement déterminée par les moments $\mu_n := \mathbb{E}[X^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(*Indication* : $\varphi_X(t+h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n e^{ihX}]\ ,\ \forall\, |t| < t_0$).

5 Vecteurs gaussiens

Exercice 5.1 (questions de cours)

1. Rappeler la définition d'un vecteur gaussien et redémontrer que la loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par sa moyenne et son autocovariance.
2. Caractériser la loi de l'image d'un vecteur gaussien par une application linéaire.
3. Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien en dimension $n_1 + n_2$. Montrer que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Exercice 5.2 (un vecteur non gaussien dont les marginales sont gaussiennes)
Soient X une v.a.r. de loi gaussienne centrée et réduite et Z une v.a.r., indépendante de X, uniformément distribuée sur $\{-1, 1\}$.

1. Vérifier que ZX est gaussienne.
2. En considérant la somme $X + ZX$, montrer que le couple (X, ZX) n'est pas gaussien.
3. Montrer que X et ZX ne sont pas indépendantes bien que leur covariance soit nulle.

Exercice 5.3 (marche aléatoire gaussienne)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. On pose :

$$B_0 = 0\ ,\ \forall n \geq 1,\ B_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Ecrire la matrice de covariance du vecteur $(B_1, \cdots B_n)$ et sa densité de probabilité.
2. Pour $1 \leq m \leq n$, on pose $Z_m = B_m - \frac{m}{n} B_n$. Montrer que Z_m et B_n sont indépendantes.

Exercice 5.4 (théorème de Cochran)
Dans tout l'exercice, X désigne un vecteur gaussien de dimension n, de moyenne nulle et de matrice de covariance égale à l'identité. La loi du carré de la norme (euclidienne) de X porte le nom de loi du $\chi^2(n)$.

1. On désigne par U une matrice orthogonale de taille n. Montrer que UX suit la même loi que X.
2. On considère $a_1, \cdots, a_n$ une base orthonormale. Montrer que les v.a. $< a_1, X >, \cdots, < a_n, X >$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi gaussienne centrée réduite.
3. On considère $P_1, \cdots, P_\ell$ des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ associés à une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme (orthogonale) de sous-espaces $E_1, \cdots, E_\ell$. Montrer que les vecteurs $P_1 X, \cdots, P_2 X$ sont indépendants et que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\|PiX\|^2$ suit une loi $\chi^2(dim(Ei))$.

Exercice 5.5 (loi des estimateurs de la moyenne de de la variance)
Soit X un vecteur gaussien de dimension n, de moyenne $(m, \cdots, m)^t$ et de matrice de covariance égale à $\sigma^2 I_n$. On pose $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$. Montrer que $\bar{X} \sim N(m, n^{-1}\sigma^2)$, $\sigma^{-2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$ et que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes. En déduire $\mathbb{E}(\bar{X})$ et $\mathbb{E}(S^2)$.

Exercice 5.6 (loi d'une forme quadratique)
Soit X un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$, de moyenne m et de matrice de covariance inversible K. Quelle est la loi de :

$$(X-m)^t K^{-1} (X-m)$$

Exercice 5.7 (support d'un vecteur gaussien)
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien d'espérance $(1, 1, 0)^t$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de K et en déduire que, $\mathbb{P}(Z = Y - 1) = 1$.
2. Montrer que (X, Y) admet une densité que l'on explicitera.
3. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(X, Y, Z)$ ait pour matrice de covariance
$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.8 (calcul d'espérance conditionnelle)
Etant donné (X, Y) un vecteur gaussien, X désignant lui-même un vecteur de dimension n et Y une variable uni-dimensionnelle, montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) + < a | X - \mathbb{E}(X) >$$

On pourra considérer la projection orthogonale $\hat{Y}$ de Y sur le sous-espace de $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par les v.a. $X_1, \cdots, X_n$ et montrer que $Y - \hat{Y}$ et $(X_1, \cdots, X_n)$ sont indépendants.
Montrer dans le cas où Λ_X est inversible que $a = \Lambda_X^{-1} \Lambda_{X,Y}$.

Exercice 5.9 (calcul de loi conditionnelle)
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ de moyenne $m = (1, 0, 3)^t$ et de matrice de covariance

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Le vecteur aléatoire X admet-il une densité ? Quel est son support ?
2. Calculer l'espérance conditionnelle de X_2 sachant X_1.

3. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$.

Exercice 5.10 (calcul de lois conditionnelles)
Soit (X, Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer E[X|Y - X].
2. En déduire la loi de E[X|Y - X].

Exercice 5.11 (loi de student $t(n)$)
On appelle loi de student à n degrés de liberté et on note $t(n)$ la loi du quotient X/Y, où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$.

1. Montrer que si $n > 1$ $t(n)$ a un moment d'ordre 1 et que si $n > 2$ $t(n)$ a un moment d'ordre 2, et les déterminer.
2. Montrer que la densité de $t(n)$ est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

6 Convergence en loi

Exercice 6.1 (convergence en loi et convergence de densités)
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et admettant les densités $(f_n)_{n\geq 1}$ et f respectivement.
Montrer que, si la suite f_n converge vers f presque partout (relativement à la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}^d$), alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
Indication : $f - f_n = (f - f_n)^+ - (f - f_n)^-$ ...

Exercice 6.2 (minimum et maximum de lois uniformes)
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. uniforme sur $[0, 1]$.

1. On pose $m_n = \min(X_i, 1 \leq i \leq n)$. Montrer que nm_n converge vers une loi exponentielle de paramètre 1.
2. On pose $M_n = \max(X_i, 1 \leq i \leq n)$. Montrer que $n(1 - M_n)$ converge vers une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 6.3 (minimum et maximum de loi exponentielles)
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $m_n = \min(X_i, 1 \leq i \leq n)$. Montrer que m_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$ puis que nm_n suit une loi exponentielle de paramètre λ.
2. On pose $M_n = \max(X_i, 1 \leq i \leq n)$. Montrer que $\lambda M_n - \log(n)$ converge vers en loi G dont on donnera la fonction de répartition (loi de Gumbel).

Exercice 6.4 (convergence en loi et sommes de Rieman)
Montrer que la suite de mesure

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\frac{i}{N}}$$

converge en loi. Quelle est la loi limite ?

Exercice 6.5 (théorème de Slutsky)
Soient X_n des variables aléatoires convergeant en loi vers X, et Y_n des variables aléatoires convergeant en probabilité vers une constante c, toutes ces variables aléatoires étant définies sur le même espace. Montrer que

$$\text{(a)} \quad X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c, \quad \text{(b)} \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX, \quad \text{et} \quad \text{(c)} \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{c} \quad \text{si } c \neq 0.$$

Exercice 6.6 (intervalles de confiance asymptotique de la moyenne)
Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des v.a.i.i.d. de carré intégrable.
On note $\mathbb{E}[X] = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. On définit la moyenne empirique et la variance empirique sans biais par

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Soit $\alpha \in (0, 1)$ un niveau de risque (souvent $\alpha = 0,05$).
A partir des n premières observations $X_1, \cdots, X_n$ on construit un intervalle aléatoire par la formule

$$IC_{1-\alpha}^{n} = \left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_n^2}{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_n^2}{n}} \right]$$

où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale défini par la relation

$$\mathbb{P}(\mathcal{N} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

avec $\mathcal{N}$ variable normale standard. Lorsque $\alpha = 0,05$ on a $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 1,96$.

1. Montrer l'égalité des événements

$$\{m \in IC_{1-\alpha}^{n}\} = \left\{ \left| \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

2. Montrer la convergence en loi
$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$
3. En déduire que
$$\mathbb{P}(m \in IC_{1-\alpha}^n) \to 1-\alpha.$$
On dit que $IC_{1-\alpha}^n$ est un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ de la moyenne m.

Exercice 6.7 (démonstration probabiliste du théorème de Weierstrass)
Soit $f : [0,1] \to$ une fonction continue. Pour $x \in [0,1]$, on se donne $(S_n^x)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires avec S_n^x de loi binomiale de paramètres (n,x) .

1. Montrer que $\frac{1}{n}S_n^x$ converge en probabilité vers x, puis que $f(\frac{1}{n}S_n(x))$ converge en probabilité vers $f(x)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}\left[f(\frac{1}{n}S_n^x)\right]$ est un polynome en la variable x.
3. Montrer que $\mathbb{E}\left[f(\frac{1}{n}S_n^x)\right]$ converge uniformément vers $f(x)$ pour $x \in [0,1]$ (on pourra utiliser l'uniforme continuité de f).

Exercice 6.8 (convergence en loi des variables normales)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, et supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Montrer que les suites μ_n et σ_n^2 ont des limites $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \geq 0$, et que X est $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exercice 6.9 (convergence en loi de sommes de variables aléatoires)
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace.

1. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow{P} 0$, montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
2. On suppose que X_n et Y_n sont indépendantes pour tout n et que X est indépendante de Y. Montrer que, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$.
3. Montrer que (2) devient faux si on supprime l'hypothèse « pour tout n, les variables X_n et Y_n sont indépendantes ».

Exercice 6.10 (jeu de la roulette et théorème central limite)
La probabilité de gagner une partie au jeu de la roulette est de 19/37 (on se place du point de vue du casino) et la mise d'un joueur à une partie est d'un euro. Quel est approximativement le nombre minimum n_0 de parties qui doivent être jouées journellement pour que le casino gagne avec une probabilité 1/2 au moins 1000 euros par jour ? Quelle est la probabilité d'une perte globale pour le casino durant ces n_0 parties ?

Exercice 6.11 (une application non probabiliste du théorème central limite)
Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\Big) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{0\le k\le n+t\sqrt{n}} \frac{n^k \mathrm{e}^{-n}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

Indication : considérer une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

Exercice 6.12 (théorème central limite pour des variables de Poisson)
Soit X^λ une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $(X^\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ converge en loi vers une variable aléatoire $\mathcal{N}(0,1)$ quand $\lambda \to \infty$.

Exercice 6.13 (théorème central limite pour une somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, de variance σ^2. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $(N_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes de la suite (X_n). Montrer que si $N_n \to +\infty$ p.s. quand $n \to \infty$, alors la suite

$$Z_n = \frac{S_{N_n}}{\sqrt{N_n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Exercice 6.14 (développement décimal)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble des entiers $\{0, 1, \ldots, 9\}$. On définit, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k 10^{-k}$. Démontrer que la suite Z_n converge p.s. vers une variable aléatoire Z dont on déterminera la loi.

Exercice 6.15 (événements indépendants)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants tels que $\mathrm{P}(E_n) = 1/n$ pour tout n. On pose $N_n = 1_{E_1} + \cdots + 1_{E_n}$. Montrer que la suite

$$\frac{N_n - \log n}{\sqrt{\log n}}$$

converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

7 Annales