Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Processus à temps discret
M1 MFA–MMAS, année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES N° 1. — GÉNÉRALITÉS

Exercice 1. — (i) Soient I un ensemble non vide d'indices et $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur un ensemble E. Montrer que

$$\bigcap_{i\in I}\mathcal{E}_i = \big\{A \in \mathcal{P}(E) : \text{pour tout } i \in I,\ A \in \mathcal{E}_i\big\} \qquad \text{est une tribu sur } E.$$

(ii) Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe une unique tribu $\mathcal{E}$ sur E telle que :

a) $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$;

b) si $\mathcal{E}'$ est une tribu contenant $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$.

On note alors $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{P})$, c'est la *tribu engendrée* par $\mathcal{P}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{P}(E)\backslash\{\varnothing, E\}$, décrire $\sigma(A)$. Si A, $B \in \mathcal{P}(E)$, décrire $\sigma(A, B)$ en distinguant les différents cas pouvant se présenter. Déterminer le cardinal *maximal* d'une tribu engendrée par $n \geqslant 1$ parties quelconques de E.

Exercice 2. — Démontrer qu'il n'existe pas de tribu dénombrable.

Exercice 3. — Soient Ω un ensemble, $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $X : \Omega \to E$ une application. Montrer que $\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{E}\}$ est une tribu sur Ω et que c'est la plus petite tribu sur Ω tel que $X : \Omega \to E$ est mesurable, la tribu $\mathcal{E}$ sur E étant fixée.

Exercice 4. — Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, F un ensemble et $f : E \to F$ une application. Montrer que $\tau(f) = \{C \subset F : f^{-1}(C) \in \mathcal{E}\}$ est une tribu sur $\mathcal{F}$, et que c'est la plus grande tribu sur F telle que f soit mesurable.

Exercice 5. — Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables, une famille de parties $(B_i)_{i\in I} \subset \mathcal{E}$ telle que $\sigma((B_i)_{i\in I}) = \mathcal{E}$, et $X : \Omega \to E$ une application. Montrer que l'application X est $\mathcal{A}/\mathcal{E}$-mesurable si et seulement si pour tout $i \in I$, $X^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$.

Exercice 6. — Soient E et F deux espaces topologiques. Montrer que si $f : E \to F$ est continue alors f est borélienne, c'est-à-dire $\mathcal{E}/\mathcal{F}$-mesurable où $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(F)$ sont les tribus boréliennes de E et de F respectivement.

Exercice 7. — Soient I un ensemble non vide d'indices et $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables non vides.

Le produit $E = \prod_{i\in I} E_i$ est muni de la tribu produit $\mathcal{E} = \bigotimes_{i\in I}\mathcal{E}_i$ engendrée par les pavés élémentaires $\prod_{i\in I} B_i$, $B_i \in \mathcal{E}_i$, et $B_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$.

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $X_i : \Omega \to E_i$, $i \in I$ des applications.

Montrer que les $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E_i, \mathcal{E}_i)$ sont mesurables si et seulement si $X = (X_i) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ est mesurable.

Exercice 8 (lois binomiales négatives). — On considére le jeu classique et infini de « pile ou face » (schéma de Bernoulli infini), la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$.

(i) Décrire le modèle probabilisé filtré correspondant. On calculera aussi le cardinal de chaque tribu de la filtration associée.

(ii) Soit T_1 le premier instant d'obtention d'un « pile ». Montrer qu'il s'agit d'un temps d'arrêt et déterminer sa loi.

(iii) On définit T_n comme n-ième instant d'obtention de « pile ». Préciser sa définition, montrer qu'il s'agit d'un temps d'arrêt et déterminer sa loi.

(iv) Que dire si $p = 0$ ou $p = 1$?

Exercice 9. — Soient $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus adapté défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ et $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$ un temps d'arrêt. Montrer que X_T est une variable aléatoire et qu'elle est de plus $\mathcal{F}_T$-mesurable. Étendre ce résultat lorsque le temps d'arrêt $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ n'est pas nécessairement fini.

Exercice 10. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré avec $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$, et S, T deux temps d'arrêt, alors $S + T$ est un temps d'arrêt. Cette propriété vous paraît-elle vraie si l'ensemble des temps est $\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{R}_+$?

Exercice 11 *(identité de Wald)*. — On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \in \mathbb{N}^*$, intégrables de même espérance $\mathbb{E}[X_n] = m$. La filtration considérée est celle du processus X, avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ la tribu triviale. Dans cette filtration, nous considérons un temps d'arrêt $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ qui est supposé d'espérance finie ($\mathbb{E}[T] < \infty$).

Montrer que
$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{T} X_n\Big] = \mathbb{E}[T] \times m.$$
(On pourra commencer par considérer les X_n de signe constant et égal, puis passer au cas général.)

Exercice 12. — Soient $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ un processus défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace d'états $(E, \mathcal{E})$ et $A \in \mathcal{E}$ un sous-ensemble mesurable de E.

(i) Le temps atteinte de A par le processus X est
$$T^A = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}.$$
On définit naturellement T_r^A le temps de r-ième atteinte de A pour $r \geqslant 1$. Montrer que ce sont des temps d'arrêt pour la filtration naturelle $\mathcal{F}^X$ du processus X.

(ii) Le temps de dernier retour dans A par le processus X est
$$L^A = \sup\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}.$$
Constater que rien n'indique que ce soit un temps d'arrêt en général pour $\mathcal{F}^X$.

(iii) Supposons le processus déterministe : $X = (x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires constantes. Quelle est sa filtration naturelle ? Que dire des temps d'atteinte et de dernier retour ?

(iv) On suppose maintenant que le processus X est à accroissements indépendants à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et que plus précisément $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ où X_0 et les $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ identiquement distribuées de loi $(1 - p)\delta_{\{-1\}} + p\delta_{\{1\}}$ ($X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire simple [non nécessairement symétrique] sur $\mathbb{Z}$) avec $p \in \,]0, 1[$. Discuter, pour $A = \{\ldots, -2, -1\} = \mathbb{Z}_-^*$, du fait que L^A puisse être un temps d'arrêt du processus X ou non.

Exercice 13. — Le processus X considéré correspond encore au schéma de Bernoulli infini avec un paramètre $p \in \,]0, 1[$.

(i) On définit
$$T = \begin{cases} 2 & \text{si } X_0 = 1, \\ 3 & \text{si } X_0 = 0. \end{cases}$$
Montrer que c'est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle de X.

(ii) On définit

$$T' = \begin{cases} 2 & \text{si } X_3 = 1, \\ 3 & \text{si } X_3 = 0. \end{cases}$$

Montrer que ce n'est pas un temps d'arrêt dans cette même filtration.

(iii) Que dire de T' si $p = 0$ ou 1 ? (On pourra supposer les variables aléatoires identiquement égales à leurs valeurs presque sûres.)

Exercice 14. — Considérons une marche aléatoire $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ simple sur $\mathbb{Z}$, symétrique ($p = 1/2$) et issue de 0. Soit T le premier temps d'atteinte de $A = \{1\}$ par la marche X.

(i) Établir que

$$\mathbb{P}\big\{T \leqslant 2k+1, X_{2k+1} \leqslant 1\big\} = \mathbb{P}\big\{T \leqslant 2k+1, X_{2k+1} \geqslant 1\big\}. \tag{$*$}$$

(ii) Montrer que

$$\mathbb{P}\{T \leqslant 2k+1\} = 1 - \mathbb{P}\{X_{2k+1} = -1\}. \tag{$**$}$$

(iii) En déduire la fonction de répartition de T ainsi que sa loi.

Exercice 15 (le collectionneur de vignettes). — Pierre achète des tablettes de chocolat d'une certaine marque. Dans chaque tablettes, il trouve une vignette qu'il peut coller dans un album édité par cette même marque. L'album contient m emplacements. Soient $T_1 = 1$, puis T_2 le rang d'obtention d'une vignette différente de la première, puis T_3 celui d'obtention d'une vignette différente des deux première, etc., jusqu'à T_m le rang de complétion de l'album. On pose $U_1 = T_1 = 1$, $U_2 = T_2 - T_1, \ldots, U_m = T_m - T_{m-1}$.

(i) Modéliser le processus d'obtention des vignettes avec des hypothèses raisonnables.

(ii) Déterminer la loi de la variable aléatoire discrète $(U_1, \ldots, U_n)$.

(iii) En déduire que les variables $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes.

(iv) En déduire la fonction génératrice de T_m ainsi que son espérance.

Exercice 16 (contrôle des naissances). — Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli symétrique $\mathcal{B}(1, 1/2)$. Les valeurs obtenues correspondent à la naissance au n-ième essai d'un garçon ou d'une fille, et on suppose qu'il n'y a pas de naissance multiple. Les parents se fixent certains objectifs ce qui conduit à temps d'arrêt N qui est le nombre d'enfants obtenus.

D'après l'identité de Wald, quels que soient les objectifs choisis par les parents, la moyenne de garçons (ou de filles) obtenus est $\mathbb{E}[N]/2$, et donc, ne dépend que de l'espérance du temps d'arrêt N.

(i) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu deux garçons consécutivement. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille.

(ii) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu un garçon succédant immédiatement à une fille. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille.

FEUILLE D'EXERCICES N° 2. — ESPÉRANCES CONDITIONNELLES ET MARTINGALES À VALEURS DANS $\mathbb{R}^D$

Exercice 1. — Parmi 100 questions possibles pour un questionnaire à choix multiples de 20 questions, un étudiant en révise une proportion p (si $p < 1$ ce n'est pas un bon étudiant). Aux questions qu'il a révisé, il répond correctement à coup sûr. Pour les autres, il répond *au hasard* parmi les 4 choix possibles. Calculer l'espérance de sa note. (*Indication.* On posera X le nombre de questions parmi les 20 choisies connues par l'étudiant, et $N = Y + X$ sa note totale. On déterminera la loi de Y sachant X ce qui permettra de calculer $\mathbb{E}[N \mid X]$ et ainsi $\mathbb{E}[X]$. On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire de loi la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ est np.)

Exercice 2. — Un mineur est au fond d'une mine comportant trois portes. La première porte donne sur un tunnel qui le conduira à l'extérieur après trois heures de marche. La deuxième porte donne sur un tunnel qui le ramènera au fond de la mine après cinq heures de marche. La troisième porte donne sur un tunnel qui le ramènera au fond de la mine après sept heures de marche.

Si on suppose que le mineur choisit l'une des portes avec probabilité 1/3 à chaque passage, qu'elle est l'espérance du temps de parcours avant d'atteindre l'extérieur ?

Exercice 3. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré.

(i) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $X_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}_n)$ définit une martingale. Est-elle convergente ? Si oui, que dire de sa limite (noter qu'*a priori* on a seulement $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{A}$) ?

(ii) Montrer que pour tout $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $X_n = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$ définit une martingale. Est-elle convergente ? Si oui, que dire de sa limite ?

Exercice 4. — Soient $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées et intégrables. On pose $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ pour $n \geqslant 1$ et $X_0 = 0$. La filtration $\mathcal{F}$ considérée étant la filtration naturelle de $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ (avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$), que dire du processus X en fonction de $m = \mathbb{E}[\xi_1]$?

Exercice 5. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré où le temps est $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. En posant (avec $\mathcal{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}$), on dit qu'un processus $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ est prévisible si pour tout $n \geqslant 0$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Montrer que si X est une martingale et H un processus prévisible localement borné (ce qui signifie ici que chaque H_n est une variable aléatoire bornée), alors

$$Y_0 = 0, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^n H_k \times (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^n H_k \Delta X_k, \quad n \geqslant 1,$$

définit une martingale.

Remarque. — Cette manière d'obtenir une martingale à partir d'une autre est souvent appelée *transformée de Burkhölder*, c'est en fait la version discrète de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale.

Exercice 6 (martingale de Wald). — Soient $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées admettant une fonction génératrice $G(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{u\xi_n}] \in]0, \infty[$ pour au moins un réel $u \neq 0$.

(i) Montrer que

$$X_0 = 1, \qquad X_n = G(u)^{-n}\, \mathrm{e}^{u(\xi_1+\cdots+\xi_n)}, \qquad n \geqslant 1,$$

définit une martingale.

(ii) Préciser pourquoi cette martingale est presque sûrement convergente.

(iii) Que se passe-t-il si $u = 0$ ou ξ est presque sûrement constante ?

(iv) Qu'en est-il si aucune des deux conditions précédentes est satisfaite ?

Exercice 7 (rapport de vraisemblance). — Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la densité est ou bien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ou bien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Le problème est de déterminer laquelle de ces fonctions est la (une) densité de μ. Pour cela on se donne une suite $X = (X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de loi μ et on considère

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{g(X_k)}{f(X_k)}, \qquad n \geqslant 1,$$

où on aura convenu que $0/0 = 0$. Le processus $M = (M_n)_{n\geqslant 0}$ ($M_0 = 1$) est appelé « rapport de vraisemblance » ; il est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(i) Montrer que si la densité de μ est f alors le processus M est presque sûrement à valeurs finies.

(ii) Montrer que si la densité de μ est f, alors le processus M est une martingale. En déduire que M est presque sûrement convergent.

(iii) Si de plus $f \neq g$ (sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle), quelle est la variable aléatoire limite de M ?

(iv) De ce qui précède, que devrait-on observer si la densité de μ est en réalité g ?

Exercice 8 (variation quadratique). — Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale réelle telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ pour tout n.

(i) Que dire de $X^2 = (X_n^2)_{n\geqslant 0}$?

(ii) On définit la variation quadratique (crochet droit) de X par

$$[X,X]_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1})^2 = \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k^2, \quad \text{pour } n \geqslant 1, \qquad \text{et} \qquad [X,X]_0 = 0.$$

Que peut-on dire du processus $X^2 - [X,X]$?

(iii) On définit la variation quadratique prévisible (crochet oblique) de X par

$$\langle X,X\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta X_k^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}], \quad \text{pour } n \geqslant 1,$$

et $\langle X,X\rangle_0 = 0$. Que peut-on dire du processus $X^2 - \langle X,X\rangle$?

(iv) Exprimer les variations quadratiques d'une transformée de Burkhölder.

FEUILLE D'EXERCICES N° 3. — PROCESSUS DE MARKOV, GÉNÉRALITÉS

Exercice 1. — (i) Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

(ii) Montrer qu'une combinaison barycentrique de matrices stochastiques est une matrice stochastique.

(iii) Montrer que la matrice d'une permutation est bistochastique.

Exercice 2. — Considérons 2 urnes contenant au total N boules. Une boule est choisie au hasard et transvasée dans l'autre urne. Décrire ce mécanisme à l'aide d'une matrice stochastique en s'intéressant, par exemple, au nombre de boules contenues dans l'une des deux urnes.

Exercice 3. — Le temps est supposé discret. Un processus X est markovien dans la filtration $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tous $0 \leqslant n < m$, et toute application $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ bornée, on a

$$\mathbb{E}[f(X_m) \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_m) \,|\, X_n] \qquad \text{presque sûrement,} \qquad [A]$$

où le second conditionnement est effectué par rapport à la tribu engendrée par X_n.

Montrer que la condition précédente équivaut à : pour tous $n \geqslant 0$, et toute application $f : E \to \mathbb{R}$ bornée, on a

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, X_n] \qquad \text{presque sûrement.} \qquad [B]$$

(*Indication.* — Pour le sens $[B]$ implique $[A]$, on pourra utiliser le fait que si Z est une variable aléatoire intégrable [bornée par exemple], alors une version de $\mathbb{E}[Z \,|\, X_k]$ peut s'écrire $f_k(X_k)$ [lemme de Doob].)

Exercice 4. — Soient $X_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, et on considère ce processus dans sa filtration naturelle.

(i) Montrer que le processus X est markovien.

(ii) Lorsque les $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ sont identiquement distribuées, montrer que le processus X est homogène et déterminer son semi-groupe de transition.

Remarque. — On pourra se contenter de considérer des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ avec $d = 1$.

Exercice 5. — Soit X un processus markovien admettant une fonction de transition

$$(P_{s,t})_{0 \leqslant s \leqslant t}$$

a priori inhomogène. Que dire du processus espace-temps $(X_t, t)_{t \geqslant 0}$?

Exercice 6. — Soit P un noyau de probabilité sur un espace d'états $(E, \mathcal{E})$. Une application $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ est dite harmonique (resp. sur, sous-harmonique) si $Pf = f$ (resp. $Pf \leqslant f$, $Pf \geqslant f$).

Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus markovien homogène admettant P pour noyau de transition. Que dire de $f(X) = (f(X_n))_{n\geqslant 0}$ lorsque f est harmonique (resp. sur, sous-harmonique) et vérifie des hypothèses d'intégrabilité convenables ?

Exercice 7. — Nous considérons deux noyaux P et Q sur $\mathbb{R}^d$ homogènes en espace, c'est-à-dire qu'il existe deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathbb{R}^d$ telles que $P(x, \mathrm{d}y) = \mu(\mathrm{d}y - x)$ et $Q(x, \mathrm{d}y) = \nu(\mathrm{d}y - x)$.

(i) Exprimer la mesure de probabilité $(PQ)(0, \mathrm{d}z)$ en fonction de μ et ν.

(ii) Reprendre le calcul pour $(PQ)(x, \mathrm{d}z)$ en fonction de μ et ν avec $x \in \mathbb{R}^d$.

(iii) Constater le lien avec les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Remarque. — L'espace d'états dans l'exercice précédent pourraît être aussi bien $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{N}^d$, etc.

Exercice 8 (semi-groupe de Poisson). — Soit $P_t(x, \mathrm{d}y) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda t)^n}{n\,!} \delta_{\{x+n\}}(\mathrm{d}y)$ où $\lambda > 0$ est une constante, $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que pour chaque $t \geqslant 0$, P_t est un noyau de probabilité (ou markovien) sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $(P_t)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de transition sur $\mathbb{R}$.

Remarque. — Dans cet exercice, nous avons pris pour espace d'états $\mathbb{R}$. Généralement, on considère plutôt $\mathbb{N}$ voire $\mathbb{Z}$.

Exercice 9 (semi-groupe brownien). — Soit $P_t(x, \mathrm{d}y) = \exp(-(y - x)^2/2t)/\sqrt{2\pi t}\,\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}$ pour $t > 0$, et $P_0(x, \mathrm{d}y) = \delta_{\{x\}}(\mathrm{d}y)$.

(i) Montrer que pour chaque t, P_t est un noyau de probabilité (ou markovien) sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $(P_t)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de transition sur $\mathbb{R}$.

FEUILLE D'EXERCICES N° 4. — CHAÎNES DE MARKOV À ESPACE D'ÉTATS DISCRET

Exercice 1. — (i) Soient A, B et $C \in \mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Montrer que A et B sont indépendants conditionnellement à C si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \,|\, B \cap C) = \mathbb{P}(A \,|\, C).$$

On pourra noter au passage qu'ici on a nécessairement $\mathbb{P}(C) > 0$.

(ii) Soient E, F et G des ensembles au plus dénombrables munis de leurs tribus discrètes, et $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to E$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to F$ et $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to G$ trois variables aléatoires (discrètes, donc).

Montrer que X et Y sont indépendantes conditionnellement à Z si et seulement si, pour tout $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$ tel que $\mathbb{P}\{Z = z\} > 0$,

$$\mathbb{P}\{X = x, Y = y \,|\, Z = z\} = \mathbb{P}\{X = x \,|\, Z = z\} \times \mathbb{P}\{Y = y \,|\, Z = z\}.$$

Exercice 2. — Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. Pour tout $n \geqslant 0$, soient $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \ldots, X_n\}$ et $\mathcal{G}_n = \sigma\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ les tribus respectivement du passé et du futur à l'instant n.

Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov si et seulement si pour tout $n \geqslant 0$, $x \in E$, les tribus $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ sont indépendantes conditionnellement à $\{X_n = x\}$.

Exercice 3 (algorithmes markoviens). — Dans cet exercice, nous supposerons l'espace d'états E fini ou dénombrable muni de sa tribu discrète. Cette restriction peut être largement levée avec du travail.

(i) Soient $U = (U_1, \ldots, U_n)$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace mesurable $(F, \mathcal{F})$, et $f_1, \ldots, f_n : F \times E \to E$ des applications mesurables. Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E indépendante de U. En posant

$$X_k = f_k(U_k, X_{k-1}), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

alors $(X_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une chaîne de Markov finie.

(ii) Réciproquement, on peut réaliser toute chaîne de Markov de cette manière : étant donnée la loi d'une chaîne de Markov $(Y_0, \ldots, Y_n)$, c'est-à-dire la donnée de la mesure de probabilité initiale λ, et des matrices de transition $P_{0,1}, \ldots, P_{n-1,n}$, il est possible de construire de la manière précédente une chaîne de Markov ayant même loi.

Exercice 4. — Considérons la chaîne de Markov à 2 états de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

avec α, $\beta \in [0, 1]$.

(i) Discuter en fonction de α et de β des classes communicantes et de leur fermeture.

(ii) Calculer les coefficients $P^n(x, y)$.

(iii) Le critère de récurrence $\sum_{n\geqslant 0} P^n(x,x)$ est-il cohérent avec l'analyse faite en (i) ?

Exercice 5. — On considère une chaîne de Markov à 3 états $\{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Trouver une formule générale pour la suite $(P^n(1,1))_{n\geqslant 0}$. (*Indication :* on pourra se servir des valeurs propres de P.)

Exercice 6. — Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P (et de loi initiale λ) et k entier strictement positif. Montrer que si on pose $Y_n = X_{kn}$, pour tout $n \geqslant 0$, alors la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P^k (et de loi initiale λ).

Exercice 7. — On suppose que la matrice de transition P de X n'a pas d'état absorbant. On définit

$$S_0 = 0, \qquad S_{m+1} = \inf\{n \geqslant S_m : X_n \neq X_{S_m}\}, \quad m \geqslant 0.$$

Montrer que $(S_m)_{m\geqslant 0}$ est une suite de temps d'arrêt, finis.

En posant $Z_m = X_{S_m}$, on définit alors une nouvelle chaîne de Markov : c'est la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ observée uniquement lorsqu'elle « bouge ». Montrer que sa matrice de transition $\bar{P}$ vérifie

$$\bar{P}(x,x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in E, \qquad \text{et} \qquad \bar{P}(x,y) = \frac{P(x,y)}{\sum_{z\neq x} P(x,z)}$$

pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$.

Exercice 8 (Marches aléatoires simples dans $\mathbb{Z}$). — On considère pour espace d'états $E = \mathbb{Z}$ et $p \in [0,1]$ un réel. En posant $q = 1-p$, on définit une matrice de transition P par

$$P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ q & \text{si } y = x-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$P^n(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\binom{n}{(n+y-x)/2} p^{(n+y-x)/2} q^{(n-y-x)/2} & \text{si } n+y-x \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ pour $k \in \{0,\dots,n\}$ et 0 sinon.

Exercice 9. — Dans le cas d'une chaîne de Markov à deux états, discuter en fonction de α et β des relations entre les deux points, des classes communicantes, des classes fermées.

Exercice 10. — Identifier les classes communicantes, en précisant lesquelles sont fermées, associées respectivement aux matrices de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. — Montrer que toute matrice de transition sur un espace d'état fini a au moins une classe fermée. Trouver un exemple de matrice de transition sans classe fermée.

Université de Poitiers — Processus à temps discret
Département de Mathématiques — M1 MFA–MMAS, année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES N° 5. — CHAÎNES DE MARKOV À ESPACE D'ÉTATS DISCRET (SUITE)

EXERCICE 1. — Soient E un espace d'états au plus dénombrable et P une matrice de transition.

(i) Montrer que si P est bistochastique, alors les mesures uniformes sont invariantes.

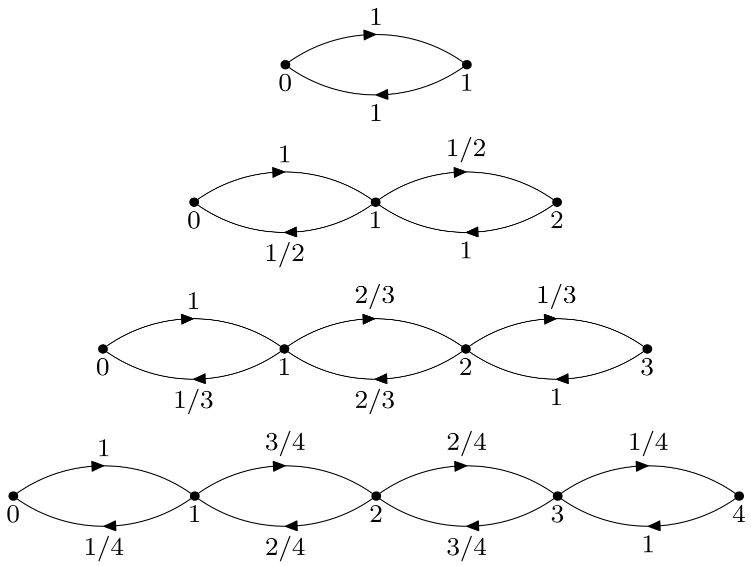
(ii) En déduire que si P est symétrique ($P(x,y) = P(y,x)$ pour tous $x, y \in E$), alors les mesures uniformes sont invariantes.

EXERCICE 2 (L'URNE D'EHRENFEST, RÉSUMÉ ET SUITE). — Nous considérons deux urnes A et B et N boules numérotées de 1 à N réparties dans les deux urnes. On tire uniformément un nombre entre 1 et N. La boule portant ce numéro est alors déplacée dans l'autre urne (si elle est dans A, elle va dans B, si elle est dans B, elle va dans A). Et on continue...

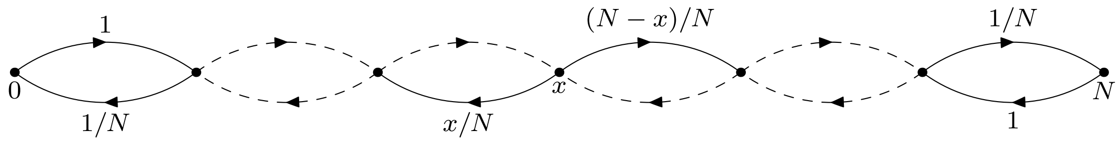
Soit X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'étape n, qui est une variable aléatoire à valeurs dans $E = \{0, 1, \ldots, N\}$. En admettant que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bien une chaîne de Markov homogène, sa matrice de transition s'écrit alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{N-2}{N} & 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voici quelques diagrammes de transition pour $N = 1, \ldots, 4$:



et plus généralement



(i) Classification des états : les diagrammes montrent clairement que la chaîne est irréductible. Il est aussi facile d'expliciter un chemin joignant deux points x et y quelconques de l'espace d'états $E = \{0, \dots, N\}$ et ainsi de trouver une probabilité $P^n(x, y)$ qui soit strictement positive. L'espace d'états étant fini, tous les états sont récurrents.

(ii) La matrice de transition P est réversible par rapport à la mesure de probabilité π définie par

$$\pi\{x\} = \binom{N}{x} \times \frac{1}{2^N}, \qquad x \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

En effet, si $0 \leqslant x < N$, on a

$$\pi\{x\} \times P(x, x+1) = \binom{N}{x} \times \frac{1}{2^N} \times \frac{N-x}{N} = \binom{N-1}{x} \times \frac{1}{2^N}$$

et

$$\pi\{x+1\} \times P(x+1, x) = \binom{N}{x+1} \times \frac{1}{2^N} \times \frac{x+1}{N} = \binom{N-1}{x} \times \frac{1}{2^N},$$

et toutes les autres relations envisageables donnent l'égalité de 0 avec lui-même car $P(x, y) = 0$ si $x = y$ ou $|x - y| \geqslant 2$. Comme P est réversible par rapport à la mesure de probabilité π, cette mesure est aussi invariante. On en déduit que π, qui est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, 1/2)$, est l'unique mesure de probabilité invariante.

(iii) La chaîne est-t-elle apériodique ? Que se passe-t-il simplement qui prévient d'une convergence vers l'équilibre ?

(iv) On s'intéresse à la matrice de transition P^2. Puisque π est invariante par P, elle est aussi invariante par P^2. Montrer que P^2 est réversible par rapport à π.

Soit E_p l'ensemble des états pairs, E_i l'ensemble des états impairs. Posons $Q_p = P^2_{|E_p}$ et $Q_i = P^2_{|E_i}$. Le symbole $*$ désignera l'une ou l'autre des lettres $\{p, i\}$.

(v) Montrer que Q_* est irréductible et récurrente, que $\pi_* = \pi_{|E_*}/\pi(E_*)$ est une mesure de probabilité par rapport à laquelle Q_* est réversible donc invariante de Q_*.

(vi) Montrer que Q_* est apérodique. En déduire la convergence vers l'équilibre : pour toute mesure de probabilité λ_* portée par E_*, on a $\lambda_* Q_*^n \to \pi_*$.

(vii) En déduire que pour toute mesure de probabilité λ sur E, $\lambda P^{2n} \to \lambda(E_i)\pi_i + \lambda(E_p)\pi_p$ et $\lambda P^{2n+1} \to \lambda(E_i)\pi_p + \lambda(E_p)\pi_i$ et qu'ainsi $\lambda(P^n + P^{n+1})/2$ converge quand n tend vers l'infini (la limite est presque π mais pas tout à fait).

(viii) Le théorème ergodique s'applique-t-il ? Qu'affirme-t-il ?

Exercice 3. — Considérons un graphe connexe fini $(E, \mathcal{R})$ (la relation $\mathcal{R}$ est nulle part réflexive). Soit P définie par

$$P(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{v\{x\} + 1} & \text{si } x \mathcal{R} y \text{ ou } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que P est une matrice stochastique irréductible, récurrente et apériodique. Déterminer sa mesure de probabilité invariante.

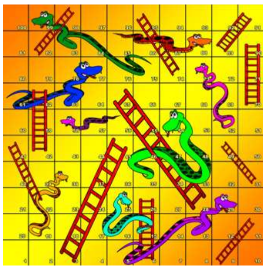
Exercice 4. — Une particule se déplace sur les 8 sommets d'un cube de la manière suivante : à chaque pas la particule a la même probabilité d'aller sur chacun des trois sommets adjacents, indépendamment de ce qui a pu se passer auparavant. Soit i le sommet initialement occupé par la particule, o le sommet opposé. Calculer chacune des quantités suivantes :

(i) le nombre moyen de pas avant que la particule ne revienne en i ;

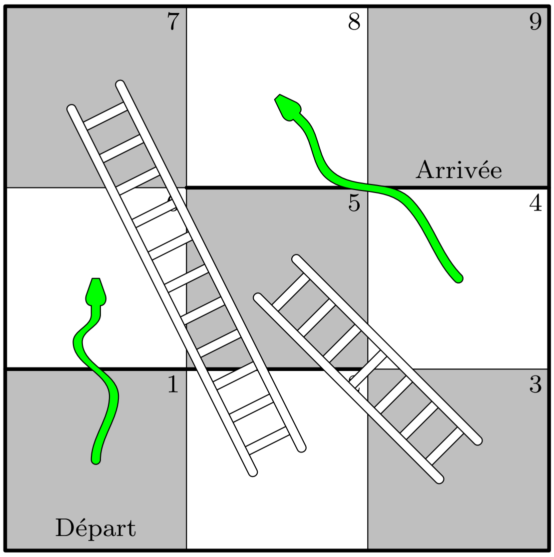
(ii) le nombre moyen de visites de o avant son premier retour en i ;

(iii) le nombre moyen de pas avant la première visite de o.

Exercice 5 (*Snakes & Ladders*). — Le jeu « Snakes & Ladders » (serpents et échelles) est un jeu anglo-saxon destiné aux jeunes enfants. On dispose d'un plateau carré divisé en $n \times n$ cases numérotées où sont dessinés des serpents et des échelles joignant certaines cases. Partant de la case 1, on lance un dé et avance d'autant de cases dans l'ordre de leur numérotation. Si la case atteinte correspond à une tête de serpent, on saute immédiatement à la case correspondant à l'extrémité de sa queue. Si la case correspond à un pied d'échelle, on saute immédiatement à la case correspondant au haut de l'échelle. Si la case est vierge, on ne fait rien. Ceci peut se jouer à plusieurs, le gagnant étant celui qui aura atteint ou dépassé la dernière case en effectuant le moins de tours de jeu. Des variantes plus ou moins éducatives existent.



Nous considérons une version simplifiée de « Snakes & Ladders ». Le plateau de jeu comporte 9 cases et est représenté ci-dessous



La progression se fait en lançant une pièce de monnaie : en obtenant pile, on avance d'une case ; en obtenant face, on avance de deux cases.

(i) En moyenne, combien faut-il de tours pour terminer la partie ?

(ii) Quelle est la probabilité qu'un joueur qui a atteint la case du milieu termine le jeu sans retourner à la case de départ ?

Exercice 6 (ruine du joueur). — On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 0}$ d'espace d'états $E = \mathbb{N}$ et de matrice de transition P vérifiant

$$P(0,0) = 1, \qquad \text{et} \qquad P(x, x+1) = p, \quad P(x, x-1) = 1 - p = q, \quad \text{pour tout } x \in \{1, 2, \ldots\},$$

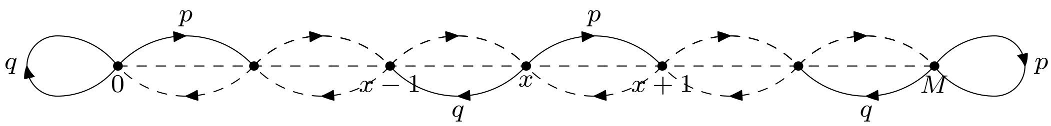
les autres coefficients étant nuls, $p \in [0,1]$ étant un réel donné. La variable X_n représente la fortune d'un joueur à l'instant n jouant contre un adversaire infiniment riche, la probabilité $p_{\mathrm{a}}^0(x) = \mathbb{P}^x\{T^0 < \infty\}$ est alors la probabilité de perdre avec une fortune initiale $x \in \mathbb{N}$. On note $k^0(x) = \mathbb{E}^x[T^0]$.

(i) Montrer que si $p \leqslant q$, $p_{\mathrm{a}}(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ (distinguer les cas $p < q$ et $p = q = 1/2$), et si $p > q$, $p_{\mathrm{a}}^0(x) = (q/p)^x$. On établira une relation de récurrence entre les $p_{\mathrm{a}}^0(x)$.

(ii) Montrer que si $p < q$ on a $k^0(x) = x/(1-2p)$, et si $p \geqslant q$ on a $k^0(x) = \infty$ (distinguer les cas $p > q$ et $p = q = 1/2$). On établira une relation de récurrence entre les $k^0(x)$.

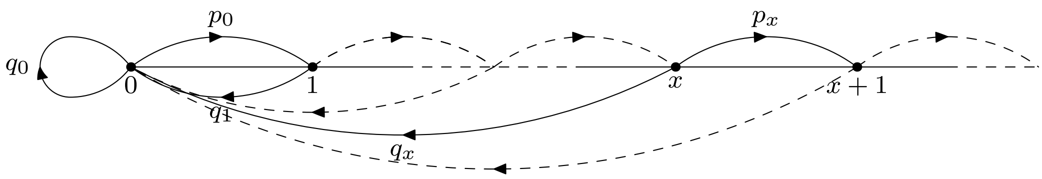
Exercice 7. — Soient l'espace d'états $E = \{0, 1, \ldots, M\}$, $p = 1 - q \in\,]0,1[$, et la matrice de transition P définie par

$$P(0,0) = q, \qquad P(x+1,x) = p, \qquad 0 \leqslant i \leqslant M-1\,;$$
$$P(x,x-1) = q, \quad 1 \leqslant x \leqslant M\,; \quad P(M,M) = p,$$



les autres coefficients étant nuls. Montrer que P est réversible par rapport à la mesure $\mu = ((p/q)^x)_{0\leqslant x\leqslant M}$. En déduire une mesure de probabilité par rapport à laquelle P soit réversible.

Exercice 8. — Nous considérons la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ représentée par la figure suivante :



c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $P(x,x+1) = p_x$, $P(x,0) = q_x = 1 - p_x$, $p_x \in [0,1]$, les autres coefficients étant nuls. Sous l'hypothèse de la convergence du produit infini $\prod_{i=0}^{\infty} p_x$, montrer que cette matrice de transition n'a pas de mesure positive invariante (autre que nulle).

Exercice 9. — Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dont les probabilités de transition sont données par

$$P(0,1) = 1, \qquad P(x,x+1) + P(x,x-1) = 1, \qquad P(x,x+1) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 P(x,x-1), \quad x \geqslant 1.$$

Montrer que si $X_0 = 0$ alors la probabilité que $X_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ est égale à $6/\pi^2$.

Exercice 10. — Soit P une matrice de transition sur un espace d'états fini E.

(i) Montrer qu'une mesure de probabilité π est invariante si et seulement si

$$\pi \times \left(\mathrm{Id} - P + \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right) = (1, \ldots, 1).$$

(ii) En déduire que si P est irréductible, alors

$$M = \mathrm{Id} - P + \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Remarque. — Cet exercice montre comment utiliser des méthodes matricielles pour déterminer la probabilité invariante d'une matrice de transition irréductible. Dans un cadre plus général, toujours avec E fini, il faudrait considérer chacune des sous-matrices associées à chaques classes récurrentes.

Exercice 11. — Montrer qu'un état $x \in E$ est apériodique si et seulement si

$$n_x = \text{pgcd}\big\{n \geqslant 0 : P^n(x,x) > 0\big\} = 1,$$

où pgcd est l'opérateur « plus grand commun diviseur ». (Lorsque n_x est en entier supérieur ou égal à 2, l'état x est dit périodique de période n_x.)

Exercice 12 (théorème de renouvellement). — Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ indépendantes et de même loi. On suppose que

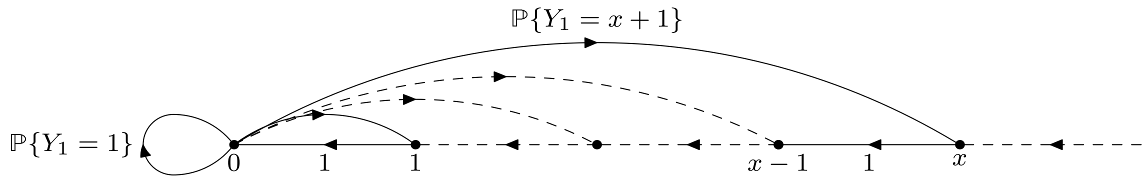
$$\text{pgcd}\big\{n \geqslant 1 : \mathbb{P}\{Y_1 = n\} > 0\big\} = 1,$$

et on pose $\mu = \mathbb{E}[Y_1] \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Montrer que le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ défini par $X_0 = 0$ et

$$X_n = \inf\{m \geqslant n : \exists\, k \geqslant 0,\, m = Y_1 + \cdots + Y_k\} - n, \qquad n \geqslant 1,$$

est une chaîne de Markov de matrice de transition P vérifiant $P(0,x) = \mathbb{P}\{Y_1 = x+1\}$, $x \geqslant 0$, et $P(x, x-1) = 1$, $i \geqslant 1$, les autres coefficients étant nuls.



On pourra poser $S_0 = 0$ et $S_k = Y_1 + \cdots + Y_k$ pour $k \geqslant 1$, et utiliser le fait que, si $S_{k-1} < n \leqslant S_k$, alors $X_n = S_k - n = Y_k - (n - S_{k-1})$.

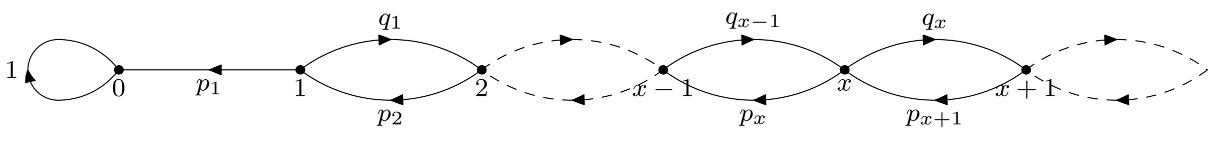
Déterminer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 0\}$ et en déduire que

$$\mathbb{P}\{\exists\, k \geqslant 0 : n = Y_1 + \cdots + Y_k\} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Exercice 13 (naissance et mort). — On considère $E = \mathbb{N}$, $(p_x)_{x\geqslant 1}$ une suite de réels dans $[0,1]$ et la matrice de transition P définie par

$$P(0,0) = 1, \qquad \text{et} \qquad P(x,x-1) = p_x, \quad P(x,x+1) = 1 - p_x = q_x, \quad \text{pour tout } x \geqslant 1,$$

tous les autres coefficients étant nuls. Chaque variable X_n représente la taille de la population après n changements, si la population est de taille x, p_x est la probabilité qu'il y ait une mort, $q_x = 1 - p_x$ est celle qu'il y ait une naissance. La probabilité d'extinction de la population est alors $p_\mathrm{a}(x) = p^0_\mathrm{a}(x)$ lorsque la taille de la population est initialement x.



En posant $u(x) = p_\mathrm{a}(x-1) - p_\mathrm{a}(x)$, montrer que $p_x \times u(x+1) = q_x \times u(x)$, puis que

$$u(x+1) = \frac{q_x}{p_x}\, u(x) = \frac{q_x \times \cdots \times q_1}{p_x \times \cdots \times p_1}\, u(x) = \gamma(x) \times u(1).$$

En constatant que $u(1) + \cdots + u(x) = p_\mathrm{a}(0) - p_\mathrm{a}(x)$, en déduire que

$$p_\mathrm{a}(x) = 1 - u(1)(\gamma(0) + \cdots + \gamma(x-1))$$

où $\gamma(0) = 1$. Il reste à déterminer $u(1)$.

Si $\sum_{x=0}^{\infty} \gamma(x) = \infty$, montrer que $u_1 = 0$ et qu'ainsi $p_{\mathrm{a}}(x) = 1$ pour tout x.

Si $\sum_{x=0}^{\infty} \gamma(x) < \infty$, montrer que $u_1 = 1/\sum_{x=0}^{\infty} \gamma(x)$ est le choix qui donne les $\gamma(x)$ et que

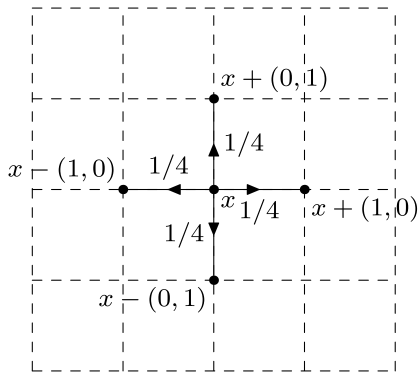
$$p_{\mathrm{a}}(x) = \frac{\sum_{y=x}^{\infty} \gamma(y)}{\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y)}.$$

Ainsi, lorsque $x \geqslant 1$, on a $p_{\mathrm{a}}(x) < 1$, donc la population survit avec une probabilité strictement positive.

Exercice 14 (marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}$, suite). — Montrer que si $1 > p > q > 0$, alors l'unique classe communicante est $\mathbb{Z}$ et elle est transiente. Montrer que si $p = q = 1/2$, l'unique classe communicante est $\mathbb{Z}$ et qu'elle est récurrente. On pourra dans ce dernier cas utiliser la formule de Stirling

$$m\,! \approx \sqrt{2\pi m} \times \left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m \qquad \text{lorsque } m \to \infty.$$

Exercice 15 (marche aléatoire simple symétrique dans $\mathbb{Z}^2$). — La marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^2$ est une chaîne de Markov telle que, pour tout n, X_n a probabilité 1/4 de passer à l'un des 4 sites voisins



autrement dit, sa matrice de transition P est définie, pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$, par

$$P\big(x, x + (1,0)\big) = P\big(x, x + (0,1)\big) = P\big(x, x - (1,0)\big) = P\big(x, x - (0,1)\big) = \frac{1}{4},$$

les autres coefficients étant nuls.

On pose X_n^+ la projection orthogonale de X_n sur la diagonale $\{x = y\}$ et X_n^- la projection orthogonale de X_n sur l'anti-diagonale $\{x = -y\}$. Montrer que X_n^+ et X_n^- sont des marches aléatoires simples symétriques dans $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}$, qui sont de plus indépendantes. En déduire que

$$P^{2n}(0,0) = \left(\binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^2 \approx \frac{1}{\pi n} \qquad \text{quand } n \to \infty,$$

puis que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est récurrente, c'est à-dire qu'il n'y a qu'une seule classe communicante (irréductibilité), et que celle-ci est récurrente.

Exercice 16 (marche aléatoire simple symétrique dans $\mathbb{Z}^3$). — La marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^3$ est une chaîne de Markov telle que, pour tout n, X_n a probabilité 1/6 de passer à l'un des 6 sites voisins, autrement dit, sa matrice de transition P est définie par, pour tout $x \in \mathbb{Z}^3$,

$$\begin{aligned} P\big(x, x + (1,0,0)\big) &= P\big(x, x + (0,1,0)\big) = P\big(x, x + (0,0,1)\big) \\ &= P\big(x, x - (1,0,0)\big) = P\big(x, x - (0,1,0)\big) = P\big(x, x - (0,0,1)\big) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

les autres coefficients étant nuls.

Montrer que

$$P^{2n}(0,0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \times \sum_{\substack{i,y,k\geqslant 0\\ i+y+k=n}} \binom{n}{i\quad y\quad k}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

où

$$\binom{n}{i\quad y\quad k} = \frac{n\,!}{i\,!\;y\,!\;k\,!}$$

est un coefficient multinomial. En utilisant la formule de Stirling, montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} P^n(0,0) = \sum_{n\geqslant 0} P^{2n}(0,0) < \infty.$$

En déduire que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est transiente, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule classe communicante (irréductibilité), et que celle-ci est transiente.

Exercice 17 (décomposition du premier retour). — Soit T_{r}^y le premier temps de retour dans l'état y, et

$$f^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}^x\{T_{\mathrm{r}}^y = n\}.$$

Montrer que

$$P^n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x,y) \times P^{n-k}(y,y) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

En déduire que

$$P(x,y)(s) = \delta(x,y) + F(x,y)(s) \times P(y,y)(s)$$

où

$$P(x,y)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,y) \times s^n \qquad \text{et} \qquad F(x,y)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x,y) \times s^n.$$

En déduire que $\mathbb{P}^x\{T_{\mathrm{r}}^x < \infty\} = 1$ si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} = \infty$ et ce, sans utiliser le théorème correspondant.