Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Processus à temps discret
M1 MFA–MMAS, Année 2012–2013

PROCESSUS À TEMPS DISCRET. — EXAMEN DE SECONDE SESSION

26 juin 2013, 8h30–12h30, math 0-3

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est autorisé. L'examen est composé de questions de cours présentées sous la forme d'un exercice et de trois exercices à part entière. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation des copies.

EXERCICE 1 (QUESTION DE COURS). — Soient E un espace d'états au plus dénombrable.

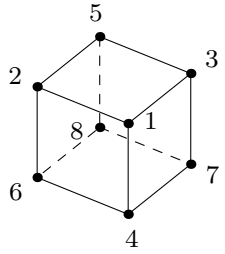
(i) Que signifie « P est une matrice de transition sur E » ?

(ii) Définir l'action d'une matrice de transition P sur E sur une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions constantes sont invariantes.

(iii) Définir l'action d'une matrice de transition P sur E sur une mesure $\pi : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente qu'il existe des mesures (non nécessairement positives !) invariantes.

(iv) Supposons E fini et P telle que pour un certain $x \in E$, $P^n(x, y)$ converge pour tout $y \in E$. Notons $\pi\{y\} = \lim_{n\to\infty} P^n(x, y)$. Montrer que π définit une mesure de probabilité sur E qui est invariante par P.

EXERCICE 2. — L'espace d'états E est le cube. Nous numérotons ses sommets de la manière suivante :



Considérons la chaîne de Markov homogène X évoluant ainsi dans E : depuis un sommet donné, elle transite sur un sommet voisin (relié par une arête du cube) avec probabilité $1/3$.

(i) Écrire la matrice de transition P correspondante en respectant la numérotation des sommets (on pourra mettre $1/3$ en facteur).

(ii) La matrice P est-elle irréductible ? En donner une courte justification.

(iii) Soient $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 1\}$ le temps d'atteinte de l'état 1 et, pour $x \in E$, $m_x = \mathbb{E}^x[T]$ le temps moyen d'atteinte de 1 en partant de x.
— Écrire le système linéaire/affine vérifié par $(m_x)_{1\leqslant x\leqslant 8}$.
— Résoudre ce système. Pour ce faire, on commencera par exploiter les symétries du problème afin de réduire au maximum le nombre de variables et d'équations. La résolution pourra alors se faire à la main ou à l'aide de la calculatrice.

(iv) Quel argument simple permet d'affirmer que la mesure de probabilité uniforme sur E est invariante par P ? Rappeler la justification de cet argument. (*Remarque.* — Ici, c'est nécessairement l'unique mesure de probabilité invariante.)

(v) On dit qu'un état $x \in E$ est apériodique s'il existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N(x)$, $P^n(x, x) > 0$ (ce qui équivaut à dire que x mène à x en n pas pour tout $n \geqslant N(x)$).
Par symétrie, il suffit de considérer le cas $x = 1$. Est-ce un état apériodique ?

(vi) Supposons la chaîne issue de $x \in \{1, \dots, 8\}$. Les lois des $(X_n)_{n\geqslant 0}$ convergent-elles ?

Exercice 3 *(identité de Wald).* — On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \in \mathbb{N}^*$, intégrable de même espérance $\mathbb{E}[X_n] = m$. La filtration considérée est celle du processus X, avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ la tribu triviale. Dans cette filtration, nous considérons un temps d'arrêt $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ qui est supposé d'espérance finie ($\mathbb{E}[T] < \infty$).

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{T} X_n\right] = \mathbb{E}[T] \times m.$$

(On pourra commencer par considérer les X_n de signe constant et égal, puis passer au cas général.)

Exercice 4. — Nous considérons l'urne de Polya : une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches ; on tire au hasard une boule ; on la remet dans l'urne avec en plus c boules de la même couleur (l'urne contient alors $a + b + c$ boules en tout) où c est un entier strictement positif fixé ; puis, on continue...

Nous allons décrire l'évolution du contenu de l'urne à l'aide d'une chaîne de Markov $Z = (X, Y)$ d'espace d'états $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash \{(0, 0)\}$ et de noyau de transition $P : E \times E \to [0, 1]$, où X_n, respectivement Y_n, est le nombre de boules rouges, respectivement blanches, à l'instant $n \geqslant 0$.

(i) Expliciter le noyau P, *i.e.* préciser ce que vaut $P(z, z')$ pour tout $z = (x, y)$, $z' = (x', y') \in E$. En déduire l'expression de $Pf : E \to \mathbb{R}$ en fonction de $f : E \to \mathbb{R}$ une application bornée, ou de signe constant.

(ii) Nous supposons l'urne initialement non vide. Soit $M_n = X_n/(X_n + Y_n)$ la proportion de boules rouges à l'instant $n \geqslant 0$. Montrer que $M = (M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale de l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle de la chaîne et $\mathbb{P}$ est la mesure de probabilité correspondant à la condition initiale envisagée.

(iii) Pour une condition initiale $(a, b) \in E$ donnée, que peut-on dire de simple sur le comportement asymptotique de la chaîne de Markov Z ? Qu'en est-il de la martingale M ?

(iv) Définir en pseudo-langage (voisin de Scilab) une commande `polyastep` d'arguments (a, b, c) retournant l'état de l'urne (x, y) après tirage aléatoire. L'utiliser dans un pseudo-script destiné à observer la convergence le long d'une trajectoire. L'utiliser dans un autre pseudo-script destiné à voir l'allure de la loi de la variable limite. Ces pseudo-programmes doivent virtuellement fonctionner, il faudra notamment donner des paramètres de simulation.