

UNIVERSITE DE POITIERS
**UFR Sciences Fondamentales
et Appliquées**

MEMOIRE

présenté

pour obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques appliquées

Par

Madalina PETCU

MODELISATION, ANALYSE THEORIQUE ET NUMERIQUE
DE CERTAINES EQUATIONS DE LA MECANIQUE ET DE
LA PHYSIQUE

Soutenu le 8 décembre 2011 devant le jury :

- M. Pierre FABRIE (Université Bordeaux 1)
- M. Martin GANDER (Université de Genève)
- M. Olivier GOUBET (Université de Picardie Jules Vernes)
- M. Alain MIRANVILLE (Université de Poitiers)
- M. Frédéric PASCAL (CMLA, ENS de Cachan)
- M. Jean-Michel RAKOTOSON (Université de Poitiers)
- M. James ROBINSON (Warwick University)
- M. Roger TEMAM (Indiana University, Bloomington)

Après avis des rapporteurs :

- M. Olivier GOUBET (Université de Picardie Jules Vernes)
- M. James ROBINSON (Warwick University)
- M. Shouhong WANG (Indiana University, Bloomington)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mon entière reconnaissance aux rapporteurs de cette habilitation Olivier Goubet, James Robinson et Shouhong Wang, qui m'ont fait l'honneur d'accepter cette tâche. Je remercie également les membres du jury : Martin Gander, Pierre Fabrie, Alain Miranville, Frédéric Pascal, Jean-Michel Rakotoson et Roger Temam.

C'est avec une profonde gratitude que je témoigne ma reconnaissance à Roger Temam qui m'a toujours apporté un soutien sans faille. Quand j'évoque son soutien, je pense au fait qu'il a guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche mathématique et qu'il a veillé à mon évolution mais aussi à son amitié sincère, son aide et ses conseils très attentionnés lors des moments délicats de ma vie.

Il m'est également impératif de remercier chaleureusement George Dincă pour ses suggestions mathématiques, pour m'avoir montré le chemin vers les mathématiques appliquées mais aussi pour sa sympathie, son soutien et sa confiance.

Un grand merci également à Alain Miranville qui m'a toujours soutenue depuis mon arrivée à Poitiers et auprès duquel j'ai toujours trouvé de bons conseils et des encouragements appréciables.

Je souhaiterais remercier aussi tous mes collègues du Laboratoire de Mathématiques et Applications à Poitiers, ils en font un lieu accueillant, d'une ambiance agréable et très plaisante. Merci à Pol Vanhaecke pour son soutien, sa disponibilité et ses nombreux conseils, ainsi que pour ses encouragements constants pour les jeunes. Et en pensant aux encouragements constants donnés aux jeunes, je ne peux pas penser aussi, en les remerciant, à Abderrazak Bouaziz et à Patrice Tauvel.

Un grand merci aussi à Mima pour son aide affectueuse, sa présence attentionnée et surtout pour son amitié, à Brigitte Brault pour son travail au secrétariat, à Nathalie Marlet qui fait de la bibliothèque un endroit chaleureux pour nous tous et même pour mes fleurs, à Nathalie Mongin pour sa grande gentillesse et son assistance efficace, à Benoît Métrot pour ses conseils (en informatique et pas seulement !) et ses interventions techniques.

Mes pensées très reconnaissantes vont également à tous ceux avec lesquels j'ai partagé ma passion pour les chats, une belle ballade ou même un voyage, un bon resto, une leçon de conduite en auto, un fou rire ou des fois un grand souci, une sortie SVS, des menus plus ou moins malins ou tout simplement un bon moment pendant une pause café ! Parmi vous, je n'ai pas trouvé seulement des bons collègues, mais aussi des bons amis que je suis ravie d'avoir rencontrés.

Je remercie chaleureusement Arthur Bousquet, Laurence Cherfils, Brian Ewald, Sylvain Faure, Martin Gander, Aimin Huang, Chang-Yeol Jung, Carine Lucas, Morgan Pierre, Antoine Rousseau, Roger Temam, Joseph Tribbia, Ming-Cheng Shiue, Djoko Wirosoetisno pour nos collaborations, passées, présentes et futures j'espère.

Enfin, je remercie du fond du coeur ma toute petite famille (Pisicut incluse, bien évidemment !) pour son appui. Je pense tout particulièrement à ma mère : sans son amour inconditionnel, son soutien protecteur, ses encouragements permanents, rien n'aurait été possible... Ma plus grande chance est d'avoir une maman comme toi !

A la mémoire de mon grandpere...

Table des matières

1	Modélisation et étude des Equations Primitives de l'atmosphère et de l'océan	9
2	Modélisation des conditions aux limites pour les équations de Saint Venant dans un domaine borné	43
3	Applications et méthodes numériques	87
4	Liste de publications	121

Chapitre 1

Modélisation et étude des Equations Primitives de l'atmosphère et de l'océan

Ce chapitre décrit un certain nombre de résultats ayant pour objet la modélisation et l'analyse des équations de l'atmosphère et de l'océan, en dimension deux et trois d'espace. Plus précisément deux objectifs sont poursuivis dans ces travaux :

1). En liaison avec les théories phénoménologiques de la turbulence (Kolmogorov [24], [25], [26], Kraichnan [27]), démontrer la décroissance exponentielle des coefficients de Fourier des solutions de ces équations. Ces résultats montrent l'existence d'une zone de dissipation dans le spectre ("dissipative range" en anglais) dans laquelle l'énergie cinétique accumulée est négligeable. Ces résultats sont atteints en démontrant *la régularité de Gevrey* des solutions, c'est-à-dire que pour $\sigma > 0$, $m > 0$ et pour $t > 0$, $\sum_k |\hat{u}_k(t)|^2 \exp(2\sigma|k|^{2m}) < \infty$. L'obtention de cette régularité de Gevrey pour tout temps nécessite elle-même de démontrer la régularité H^2 (solutions dans $L^\infty(0, t_1, H^2)$, $\forall t_1$), une étude que nous étendons, avec les mêmes outils à tous les espaces H^m .

Nous revenons dans l'analyse de l'article [35] sur diverses définitions des longueurs de dissipation semblables à celles de la turbulence classique dont l'inverse définit le début du spectre de dissipation.

Ces études ainsi que d'autres études décrits ci-dessous (comme l'unicité retrograde des solutions pour les équations primitives), font l'objet des articles [36], [38], [39], [40], [41], [42], [35].

2). Une deuxième préoccupation qui a donné le fil directeur de mes travaux est la suivante : dans la version sans dimension des équations primitives apparaît un nombre

adimensionnel, dit nombre de Rossby, qui est petit. Sa position en facteur d'un opérateur antisymétrique fait que ce paramètre introduit de grandes oscillations dans les solutions et ainsi il introduit un bruit indésirable. Dans ce qui suit nous montrons comment la théorie de la renormalisation permet de "moyenner" des solutions oscillantes, en dimension deux d'abord et puis en dimension trois d'espace. Les résultats se trouvent dans les articles [37] et [43].

3). Un article distinct des études ci-dessus mais qui correspond aussi à des préoccupations numériques est l'article [30] qui étudie un modèle quasi-hydrostatique (par opposition aux équations primitives qui elles sont hydrostatiques); voir ci-dessous.

Les équations primitives sont des équations qui modélisent le mouvement de l'océan et de l'atmosphère. Elles sont obtenues à partir des lois fondamentales de la physique en utilisant les approximations de Boussinesq et hydrostatique. Ces lois comprennent : l'équation de conservation de la quantité de mouvement horizontale, l'équation hydrostatique, l'équation de conservation de la masse, l'équation de la température (conservation de l'énergie), l'équation de la salinité et l'équation d'état. Les équations s'expriment comme suit :

$$(1.1a) \quad \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* + w^* \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial z^*} + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}^* + \frac{1}{\rho_{\text{réf}}} \nabla p^* = \mu_{\mathbf{v}}^* \Delta_{\text{h}}^* \mathbf{v}^* + \nu_{\mathbf{v}}^* \frac{\partial^2 \mathbf{v}^*}{\partial z^{*2}},$$

$$(1.1b) \quad \frac{\partial p_{\text{tot}}^*}{\partial z^*} = -\rho_{\text{tot}}^* g,$$

$$(1.1c) \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0,$$

$$(1.1d) \quad \frac{\partial T}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) T + w^* \frac{\partial T}{\partial z^*} = \mu_T \Delta_{\text{h}}^* T + \nu_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^{*2}},$$

$$(1.1e) \quad \frac{\partial S}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) S + w^* \frac{\partial S}{\partial z^*} = \mu_S \Delta_{\text{h}}^* S + \nu_S \frac{\partial^2 S}{\partial z^{*2}},$$

$$(1.1f) \quad \rho_{\text{full}}^* = \rho_{\text{réf}} [1 - \beta_T (T - T_{\text{réf}}) - \beta_S (S - S_{\text{réf}})].$$

Ici $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*)$ représente la vitesse horizontale, w^* est la vitesse verticale, p_{tot}^* est la pression totale, T la température et S la salinité. Les quantités avec astérisques correspondent respectivement à des valeurs dimensionnées et $\rho_{\text{réf}}$, $T_{\text{réf}}$, $S_{\text{réf}}$ représentent les valeurs de référence (valeurs moyennes) pour la densité, la température et la salinité; g est la constante universelle de gravitation et f est le paramètre de Coriolis. Une simplification de ce système est obtenue en supposant que $\beta_T \nu_T = \beta_S \nu_S$ et $\beta_T \mu_T = \beta_S \mu_S$, et combinant alors (1.1d)–(1.1f) nous obtenons l'équation suivante pour la densité :

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho_{\text{tot}}^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \rho_{\text{tot}}^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \rho_{\text{tot}}^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial \rho_{\text{tot}}^*}{\partial z^*} = \mu_{\rho}^* \Delta_{\text{h}}^* \rho_{\text{tot}}^* + \nu_{\rho}^* \frac{\partial^2 \rho_{\text{tot}}^*}{\partial z^{*2}}.$$

Les détails concernant la façon d'obtenir ces équations se trouvent dans la littérature géophysique (voir par exemple, [34], [45]).

Les Equations Primitives sont au centre des études des sciences de l'atmosphère et des océans et leur intérêt pratique a amené de nombreux mathématiciens à les étudier du point

de vue mathématique et du point de vue de l'analyse numérique. Nous rappelons ici le travail fondateur de Lions, Temam et Wang, concentré sur une analogie entre les équations primitives et les équations de Navier-Stokes incompressibles. Dans ce travail, les auteurs ont montré l'existence globale en temps des solutions faibles (voir, par exemple, [28], [29] et l'article de synthèse [42]). Différents auteurs ont ensuite amélioré ces résultats obtenant en particulier des résultats d'existence et d'unicité pour tout temps en dimension deux d'espace et pour un temps limité en dimension trois. Une dernière étape importante a été récemment franchie avec les travaux de Cao et Titi (voir [7]) et de Kobelkov (voir [23]) qui ont montré l'existence globale en temps des solutions fortes en dimension trois, bien que le terme non-linéaire dans les équations primitives ait une structure plus compliquée que dans les équations de Navier-Stokes. La différence est liée à la structure de la pression qui est bidimensionnelle pour les équations primitives de ce fait les équations primitives tridimensionnelles ont plutôt une structure intrinsèque bidimensionnelle. Cette différence est liée au caractère fortement anisotrope des équations primitives.

Les équations primitives en dimension deux d'espace

L'étude du caractère bien-posé des équations primitives commence avec le cas $2D$. Nous allons d'abord considérer le cas où la densité ρ_{full}^* est de la forme :

$$\rho_{\text{tot}}^*(x, y, z, t) = \rho_{\text{réf}} + \bar{\rho}(z) + \rho^*(x, y, z, t),$$

où $\bar{\rho} = \bar{\rho}(z)$ est le profil de la stratification pour la densité. Nous introduisons la fréquence de Brunt-Väisälä N^* , qui est supposée constante :

$$(N^*)^2 = \frac{g}{\rho_{\text{réf}}} \frac{d\bar{\rho}}{dz}.$$

Cela signifie que le profil de stratification est une fonction presque linéaire. L'équation d'évolution pour la densité devient :

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \rho^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial \rho^*}{\partial z^*} - \frac{\rho_{\text{réf}}}{g} (N^*)^2 w^* = \mu_\rho \Delta_h^* \rho^* + \nu_\rho \frac{\partial^2 \rho^*}{\partial z^{*2}}.$$

Pour obtenir ce que nous appelons le modèle bidimensionnel, nous écrivons les équations sous leur forme adimensionnée et nous considérons toutes les fonctions comme indépendantes de la variable y . Le modèle obtenu est alors le suivant :

$$(1.4a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon} v + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu_v \Delta u + S_u,$$

$$(1.4b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} u = \nu_v \Delta v + S_v,$$

$$(1.4c) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho,$$

$$(1.4d) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(1.4e) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{N^2}{\varepsilon} w = \nu_\rho \Delta \rho + S_\rho,$$

où (S_u, S_v, S_ρ) est la densité volumique de force extérieure et les paramètres adimensionnés sont le nombre de Rossby ε , ainsi que les inverses du nombre de Reynolds ν_v et ν_ρ . Les détails concernant l'obtention de ce système sont rappelés dans [36].

Dans [36] nous travaillons dans le domaine $\mathcal{M} = (0, L_1) \times (-L_3/2, L_3/2)$ et nous considérons le système (1.4) avec des conditions aux limites périodiques; pour garantir le caractère bien posé du problème, nous exigeons que u , v , et p soient paires et w et ρ soient impaires en z .

Les espaces fonctionnels naturels pour ce problème sont :

$$(1.5) \quad V = \{(u, v, \rho) \in (\dot{H}_{\text{per}}^1(\mathcal{M}))^3, \\ u, v \text{ paires en } z, \rho \text{ impaire en } z, \int_{-L_3/2}^{L_3/2} u(x, z') dz' = 0\},$$

$$(1.6) \quad H = \bar{V} \text{ dans } (\dot{L}^2(\mathcal{M}))^3.$$

Ici le point sur le H ou L pour \dot{H}_{per}^1 ou \dot{L}^2 indique le fait que les fonctions sont à moyenne nulle sur \mathcal{M} . L'espace H est doté du produit scalaire hilbertien :

$$(1.7) \quad (U, \tilde{U})_H = (u, \tilde{u})_{L^2} + (v, \tilde{v})_{L^2} + \kappa(\rho, \tilde{\rho})_{L^2},$$

et sur V le produit scalaire est :

$$(1.8) \quad ((U, \tilde{U})) = ((u, \tilde{u})) + ((v, \tilde{v})) + \kappa((\rho, \tilde{\rho}));$$

où

$$(1.9) \quad ((\phi, \tilde{\phi})) = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \right) d\mathcal{M},$$

et κ est une constante positive ($\kappa = 1/N^2$).

Nous remarquons ici que les variables sont de deux types : les variables pronostiques u , v et ρ pour lesquelles il faut prescrire une condition initiale et les variables diagnostiques w et p qui peuvent être déterminées à chaque instant de temps en fonction des variables pronostiques. Ainsi, pour chaque $U = (u, v, \rho) \in V$, nous trouvons $w = w(U)$ de manière unique en utilisant l'équation de conservation de la masse et la condition $w = 0$ à $z = 0$ (w impaire) :

$$(1.10) \quad w(U) = w(x, z, t) = - \int_0^z u_x(x, z', t) dz'.$$

La pression est déterminée en utilisant l'équation hydrostatique :

$$(1.11) \quad p(x, z, t) = p_s(x, t) - \int_0^z \rho(x, z', t) dz',$$

avec $p_s = p(x, 0, t)$ la pression à la surface. Nous remarquons que la pression est définie de manière unique, à la pression de la surface près.

La formulation variationnelle des équations primitives en deux dimensions d'espace est alors :

Trouver $U : (0, t_1) \rightarrow V$ tel que :

$$(1.12) \quad \frac{d}{dt}(U, \tilde{U})_H + b(U, U, \tilde{U}) + a(U, \tilde{U}) + \frac{1}{\varepsilon}e(U, \tilde{U}) = (F, \tilde{U})_H, \quad \forall \tilde{U} \in V,$$

avec

$$\begin{aligned} a(U, \tilde{U}) &= \nu_v((u, \tilde{u})) + \nu_v((v, \tilde{v})) + \kappa\nu_\rho((\rho, \tilde{\rho})), \\ e(U, \tilde{U}) &= \int_{\mathcal{M}} (u\tilde{v} - v\tilde{u}) \, d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} (\rho\tilde{w} - \kappa N^2 w\tilde{\rho}) \, d\mathcal{M}, \\ b(U, U^\sharp, \tilde{U}) &= \int_{\mathcal{M}} \left(u \frac{\partial u^\sharp}{\partial x} + w(U) \frac{\partial u^\sharp}{\partial z} \right) \tilde{u} \, d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} \left(u \frac{\partial v^\sharp}{\partial x} + w(U) \frac{\partial v^\sharp}{\partial z} \right) \tilde{v} \, d\mathcal{M} \\ &\quad + \kappa \int_{\mathcal{M}} \left(u \frac{\partial \rho^\sharp}{\partial x} + w(U) \frac{\partial \rho^\sharp}{\partial z} \right) \tilde{\rho} \, d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

L'existence d'une solution faible et globale en temps pour (1.12), dans le sens que $U \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap L^2(0, t_\star; V)$, pour tout $t_\star > 0$ est un résultat déjà connu (voir [28], [29]). Dans l'article [36] nous montrons l'existence et l'unicité des solutions fortes (dans tous les espace H^k avec $k \in \mathbb{N}$) ainsi que l'existence d'ensembles absorbants dans tous les H^k avec $k \in \mathbb{N}$.

Nous démontrons d'abord l'existence et l'unicité des solutions fortes ainsi que l'existence des ensembles absorbants dans V :

Théorème 1.1. *Pour $U_0 \in V$ et $S \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H)$, il existe une unique solution U du problème (1.12) avec $U(0) = U_0$, telle que $U \in L^\infty(\mathbb{R}_+; V) \cap L^2(0, t_\star; H^2)$, pour tout $t_\star > 0$.*

De plus, pour tout $r > 0$ on a :

$$\int_t^{t+r} |U(t')|_{H^2}^2 \, dt' \leq a_2, \quad \forall t \geq t(U_0),$$

où a_2 est une constante qui dépend des données initiales mais qui ne dépend pas de U_0 .

Pour démontrer ce résultat, les méthodes classiques ne conviennent pas mais on obtient de manière plus élaborée une suite d'estimations a priori pour les dérivées : nous commençons par u_z , puis $u_x, v_z, v_x, \rho_z, \rho_x$.

De manière récursive nous démontrons aussi dans [36] que :

Théorème 1.2. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $U_0 \in V \cap (\dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M}))^3$ et $S \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H \cap (\dot{H}_{\text{per}}^{m-1}(\mathcal{M}))^3)$. L'équation (1.12) a une solution unique U et*

$$U \in L^\infty(\mathbb{R}_+, (\dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M}))^3) \cap L^2(0, t_\star, (\dot{H}_{\text{per}}^{m+1}(\mathcal{M}))^3), \quad \forall t_\star > 0.$$

En plus, pour tout $r > 0$, on a :

$$\int_t^{t+r} |U(t')|_{H^m}^2 \, dt' \leq a_m, \quad \forall t \geq t(U_0),$$

où a_m est une constante qui dépend des données initiales mais qui ne dépend pas de U_0 .

Ces résultats montrent l'existence d'ensembles absorbants dans tous les espaces H^m , pour tout m .

Decroissance exponentielle des coefficients de Fourier et régularité Gevrey

Dans [39] nous considérons ensuite un modèle pour les équations primitives bidimensionnelles, semblable à (1.4) mais sans stratification ($N^* = 0$), et donc nous remplaçons (1.2) par :

$$(1.13) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \nu_\rho \Delta \rho + S_\rho.$$

De fait, dans (1.13) ρ n'est plus une variation par rapport au profil de stratification mais c'est la différence entre la densité totale et sa valeur de référence : $\rho = \rho_{\text{tot}} - \rho_{\text{réf}}$. Le modèle est complété par des conditions aux limites périodiques et on étudie la régularité du type de Gevrey pour la solution du système. Ce travail a été inspiré par un article de Foias et Temam [16] où les auteurs ont montré pour la première fois la régularité Gevrey des solutions des équations de Navier-Stokes.

Les espaces de fonctions avec lesquels nous travaillons sont :

$$(1.14) \quad D(e^{\tau(-\Delta)^s}) = \{U \in H \text{ avec } |\mathcal{M}| \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{2\tau|k'|^{2s}} [U_k]^2 = |e^{\tau(-\Delta)^s} U|_H^2 < \infty\},$$

où $[U_k]^2 = |u_k|^2 + |v_k|^2 + \kappa |\rho_k|^2$, avec κ et H comme dans la partie précédente. La norme hilbertienne sur $D(e^{\tau(-\Delta)^s})$ est donnée par :

$$(1.15) \quad |U|_{D(e^{\tau(-\Delta)^s})} = |e^{\tau(-\Delta)^s} U|_H, \text{ for } U \in D(e^{\tau(-\Delta)^s}),$$

et le produit scalaire associé est :

$$(1.16) \quad (U, V)_{D(e^{\tau(-\Delta)^s})} = (e^{\tau(-\Delta)^s} U, e^{\tau(-\Delta)^s} V)_H, \text{ for } U, V \in D(e^{\tau(-\Delta)^s}).$$

Un autre espace de type Gevrey que nous utilisons est :

$$(1.17) \quad D((-\Delta)^{1/2} e^{\tau(-\Delta)^s}) = \{U \in H \text{ avec } |\mathcal{M}| \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |k'|^2 e^{2\tau|k'|^{2s}} [U_k]_\kappa^2 = \|e^{\tau(-\Delta)^s} U\|_V^2 < \infty\}.$$

La norme hilbertienne sur $D((-\Delta)^{1/2} e^{\tau(-\Delta)^s})$ est :

$$(1.18) \quad \begin{aligned} |U|_{D((-\Delta)^{1/2} e^{\tau(-\Delta)^s})}^2 &= |(-\Delta)^{1/2} e^{\tau(-\Delta)^s} U|_H^2 = \|e^{\tau(-\Delta)^s} U\|_V^2 \\ &= |\mathcal{M}| \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |k'|^2 e^{2\tau|k'|^{2s}} [U_k]_\kappa^2, \end{aligned}$$

et le produit scalaire associé est :

$$(1.19) \quad \begin{aligned} (U, V)_{D((-\Delta)^{1/2} e^{\tau(-\Delta)^s})} &= ((-\Delta)^{1/2} e^{\tau(-\Delta)^s} U, (-\Delta)^{1/2} e^{\tau(-\Delta)^s} V)_H \\ &= ((e^{\tau(-\Delta)^s} U, e^{\tau(-\Delta)^s} V))_V. \end{aligned}$$

Pour pouvoir démontrer la régularité de type de Gevrey pour les solutions des équations primitives, l'idée consiste à écrire les équations primitives comme une équation d'évolution, de prolonger cette équation dans le temps complexe et d'obtenir des estimations a priori. Nous pouvons voir que les équations primitives sont équivalentes à une équation d'évolution abstraite de la forme :

$$(1.20) \quad \begin{aligned} U' + AU + B(U, U) + EU &= F, \text{ in } V_2', \\ U(0) &= U_0, \end{aligned}$$

où $V_2 = \bar{V}$ est la fermeture de V dans \dot{H}_{per}^2 et V_2' le dual de V_2 .

Pour obtenir des estimations à priori nous utilisons le résultat suivant :

Lemme 1.1. *Soient U , U^\sharp et \tilde{U} dans $D(\Delta e^{\tau(-\Delta)^s})$, avec $\tau \geq 0$. Alors :*

$$(1.21) \quad \begin{aligned} |(e^{\tau(-\Delta)^{1/2}} B(U, U^\sharp), e^{\tau(-\Delta)^{1/2}} \Delta \tilde{U})_H| &\leq c_2 |e^{\tau(-\Delta)^{1/2}} (-\Delta)^{1/2} U|^{1/2} \\ &|e^{\tau(-\Delta)^{1/2}} \Delta U|^{1/2} |e^{\tau(-\Delta)^{1/2}} (-\Delta)^{1/2} U^\sharp|^{1/2} |e^{\tau(-\Delta)^{1/2}} \Delta U^\sharp|^{1/2} |e^{\tau(-\Delta)^{1/2}} \Delta \tilde{U}|. \end{aligned}$$

Quand nous essayons d'obtenir les estimations à priori, nous remarquons que, en raison de la vitesse verticale qui est ici une variable diagnostique, des difficultés supplémentaires apparaissent par rapport aux équations de Navier-Stokes. Les difficultés techniques peuvent être surmontées si on décompose l'équation d'évolution initiale en une partie linéaire :

$$(1.22) \quad \begin{aligned} \frac{dU^*}{dt} + AU^* + EU^* &= F, \\ U^*(0) &= U_0, \end{aligned}$$

et la partie nonlinéaire restante :

$$(1.23) \quad \begin{aligned} \frac{d\tilde{U}}{dt} + A\tilde{U} + B(\tilde{U}, \tilde{U}) + B(\tilde{U}, U^*) + B(U^*, \tilde{U}) + E\tilde{U} &= -B(U^*, U^*), \\ \tilde{U}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons d'abord des estimations a priori pour le problème linéaire : soient $U_0 \in D((-\Delta)^{1/2})$ et F une fonction analytique en temps à valeurs dans $D(e^{\sigma_1(-\Delta)^{1/2}})$, avec $\sigma_1 > 0$. Soit $\varphi(t) = \min(t, \sigma_1)$, nous appliquons l'opérateur $e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}}$ à (1.22) et nous prenons le produit scalaire avec $-\Delta e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*$ dans H . Nous obtenons l'inégalité suivante :

$$(1.24) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*|_H^2 + c_1 |\Delta e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*|_H^2 \\ \leq \frac{2}{c_1} |e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} F|_H^2 + \frac{2}{c_1} |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*|_H^2. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous trouvons :

$$(1.25) \quad |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*|_H^2 \leq |(-\Delta)^{1/2} U_0|_H^2 e^{\frac{2}{c_1} t} + \sup_{0 \leq s \leq t} |e^{\sigma_1(-\Delta)^{1/2}} F(s)|_H^2 e^{\frac{2}{c_1} t},$$

qui implique que $(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*$ est borné dans $L^\infty(0, t_*; H)$ pour tout $t_* > 0$.

Une fois les estimations a priori obtenues pour le cas linéaire, nous cherchons des estimations à priori pour la partie non-linéaire de la solution. En utilisant le même type de calculs ci-dessus pour les termes linéaires et le lemme précédent pour le terme nonlinéaire, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H^2 + (c_0 - c_1 |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H) |\Delta e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H^2 \\ \leq f(t) |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H^2 + g(t),$$

où

$$f(t) = c'_1 + c'_2 |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*(t)|_H^2 |\Delta e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*(t)|_H^2, \\ g(t) = c'_3 |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*(t)|_H^2 |\Delta e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U^*(t)|_H^2.$$

Comme $\tilde{U}(0) = 0$, nous pouvons supposer que sur un certain intervalle de temps $(0, t_0)$ nous avons :

$$(1.27) \quad |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H \leq \frac{c_1}{2c_2}.$$

Sur $(0, t_0)$ nous obtenons l'inégalité :

$$(1.28) \quad \frac{d}{dt} |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H^2 + \frac{c_1}{2} |\Delta e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H^2 \\ \leq f(t) |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H^2 + g(t).$$

En utilisant le lemme de Gronwall ainsi que les estimations à priori sur U^* , nous trouvons :

$$(1.29) \quad |(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}|_H^2 \leq \int_0^{t^*} g(s) \exp\left(\int_s^{t^*} f(\tau) d\tau\right) ds.$$

Comme f et g sont des fonctions localement intégrables positives, nous définissons $t^* = t(F, U_0, \sigma_1)$ comme le premier temps pour lequel nous avons :

$$(1.30) \quad \int_0^{t^*} g(s) \exp\left(\int_s^{t^*} f(\tau) d\tau\right) ds = \frac{c_1}{2c_2}.$$

Nous avons alors trouvé une borne pour $(-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}$ dans $L^\infty(0, t^*, H)$ et pour $\Delta e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} \tilde{U}$ dans $L^2(0, t^*, H)$.

Nous pouvons montrer plus; en fait nous montrons que la solution des équations primitives est la restriction à \mathbb{R}_+ d'une fonction analytique complexe :

Théorème 1.3. *Soit U_0 donné dans $D((-\Delta)^{1/2})$ et soit F une fonction analytique en temps à valeurs dans $D(e^{\sigma_1(-\Delta)^{1/2}})$ pour $\sigma_1 > 0$. Alors il existe en temps t_1 qui dépend des conditions initiales tel que la fonction*

$$t \rightarrow (-\Delta)^{1/2} e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}} U(t),$$

soit analytique en temps sur $(0, t_1)$.

Remarque 1.1. Comme t_1 dépend de la norme de U_0 dans $D((-\Delta)^{1/2})$ et comme nous connaissons déjà l'existence d'une borne uniforme pour la solution forte des équations primitives en dimension deux d'espace, nous remarquons que le résultat précédent est un résultat global en temps.

Solutions z -faibles

Tenant compte du fait que les équations primitives sont souvent comparées aux équations de Navier-Stokes (de plus nous avons les mêmes résultats d'existence et de régularité pour les solutions des équations primitives $2D$ que pour les équations de Navier-Stokes $2D$), une question naturelle est de savoir si la solution faible est unique. Ce résultat n'est pas connu pour les équations primitives mais nous avons tout de même démontré l'unicité, ainsi que l'unicité rétrograde, des solutions faibles dans la direction horizontale et fortes dans la direction verticale (appelées *solutions z -faibles*). Les détails pour ce résultat se trouvent dans [38] ainsi que dans [42].

Nous rappelons ici les résultats principaux : nous introduisons les espaces de fonctions nécessaires pour le problème ; tout d'abord

$$\mathcal{V} = \{U = (u, v, \rho) \in V, \frac{\partial U}{\partial x_3} \in (\dot{H}_{\text{per}}^1(\mathcal{M}))^3\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|U|_{\mathcal{V}}^2 = \|U\|^2 + \left\| \frac{\partial U}{\partial x_3} \right\|^2.$$

Un autre espace de fonctions qui sera utile est :

$$\mathcal{H} = \{U = (u, v, \rho) \in H, \frac{\partial U}{\partial x_3} \in (\dot{L}_{\text{per}}^2(\mathcal{M}))^3\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme :

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 = |U|_{L^2}^2 + \left| \frac{\partial U}{\partial x_3} \right|_{L^2}^2.$$

Le premier résultat à rappeler ici est l'existence et l'unicité, globalement en temps, de la solution z -faible (voir [38] pour plus de détails) :

Théorème 1.4. *Soit $U_0 \in \mathcal{H}$ et soit $F \in L^\infty(0, t_\star; \mathcal{H})$ donnés. Alors il existe une solution unique pour le problème variationnel (1.12) telle que $U(0) = U_0$ et*

$$U \in \mathcal{C}([0, t_\star]; \mathcal{H}) \cap L^2(0, t_\star; \mathcal{V}).$$

Nous pouvons aussi démontrer que la solution z -faible des équations primitives bidimensionnelles a la propriété d'unicité rétrograde (voir [38]). Cela veut dire que si deux solutions z -faibles U_1, U_2 définies sur l'intervalle $[0, T]$ coïncident en un point $t_\star \in (0, T)$, alors les solutions coïncident sur tout l'intervalle $[0, t_\star]$. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1.5. Soit $F \in L^2(0, T, \mathcal{V})$ et soient U_1, U_2 deux solutions z -faibles pour les équations primitives (1.12), U_1, U_2 dans $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V})$ telles que $U_1(t_\star) = U_2(t_\star)$. Alors $U_1 = U_2$ sur l'intervalle $[0, t_\star]$.

La démonstration du Théorème (1.5) utilise un résultat technique :

Lemme 1.2. Soient $F \in L^2(0, T, \mathcal{V})$, $U_0 \in \mathcal{V}$ et soit U la solution des équations primitives linéaires :

$$(1.31) \quad \begin{aligned} U'(t) + AU(t) + EU(t) &= F, \\ U(0) &= U_0. \end{aligned}$$

Pour tout t tel que $U(t) \neq 0$, on définit l'application

$$t \rightarrow \phi(t) = \frac{((A + E)U(t), U(t))_H}{|U(t)|_H^2}.$$

Alors, ϕ est différentiable pour presque tous les t dans le domaine de définition de ϕ et

$$(1.32) \quad \phi'(t) \leq \frac{|F(t)|_H^2}{|U(t)|_H^2}.$$

La même propriété d'unicité rétrograde peut être démontrée par des techniques similaires pour les solutions fortes aussi.

Oscillations dans les équations primitives en dimension deux

Une autre question intéressante concernant les équations primitives $2D$ est l'étude asymptotique de ces équations pour les petits nombres de Rossby. Quand le nombre de Rossby tend vers zéro, la solution exacte présente des oscillations qui peuvent être "moyennées" par une méthode provenant de la théorie de la renormalisation. Nous travaillons ici avec les équations primitives sous la forme (1.4).

La méthode de renormalisation utilisée est celle introduite par Schochet [46] et reformulée dans un contexte mathématique par Ziane [49]. La méthode a été indépendamment introduite par Chen, Goldenfeld et Oono [9] et utilisée dans un contexte mathématique pour les fluides en rotation et pour les fluides géophysiques, par Chemin [8], Embid-Majda [13] et Grenier [18]. La littérature mathématique contient de nombreuses applications de la méthode de renormalisation, voir en particulier Gallagher [17], Babin-Mahalov-Nicolaenko [1], [2], et les articles de Moise, Temam, Ziane [32], [33].

Dans l'article [37] nous appliquons cette méthode de renormalisation pour obtenir une approximation d'ordre un. L'approche proposée par Ziane [49] consiste à écrire le système (1.4) comme un problème d'évolution abstrait de la forme :

$$(1.33) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\varepsilon}LU &= \mathcal{F}(U), \\ U(0) &= U_0, \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre petit et L est un opérateur antisymétrique (qui provoque les oscillations des solutions) ; L correspond à la force de Coriolis. Nous faisons un changement

de variable, nous écrivons (1.33) dans la variable rapide $s = t/\varepsilon$ et nous introduisons $F(s, \cdot) = e^{Ls} \mathcal{F}(e^{-Ls} \cdot)$. Nous partageons F en sa partie F_r indépendante du temps (la partie résonante) et en la partie restante F_n , dépendant du temps s . Puis nous considérons l'opérateur :

$$(1.34) \quad F_{np}(s, U) = \int_0^s F_n(s', U) ds'.$$

La solution approchée cherchée est alors de la forme :

$$(1.35) \quad \tilde{U}^1(s) = e^{-Ls} \{ \bar{U}(s) + \varepsilon F_{np}(s, \bar{U}(s)) \},$$

où \bar{U} est la solution de l'équation renormalisée :

$$(1.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{U}}{ds} = \varepsilon F_r(\bar{U}), \\ \bar{U}(0) = U_0. \end{array} \right.$$

Nous montrons d'abord que le système renormalisé (1.36) conserve les propriétés du système initial, à savoir la conservation de l'énergie pour le cas sans viscosité (donc la propriété d'orthogonalité du terme non-linéaire) et de dissipation (coercivité) en présence de viscosité. En utilisant ces propriétés, nous montrons l'existence et l'unicité pour tout temps d'une solution faible ou d'une solution très régulière pour le système (1.36). Outre l'étude du système renormalisé (1.36), un autre problème important est de montrer que la solution renormalisée est une bonne approximation de la solution exacte oscillante par nature. Nous démontrons que :

$$(1.37) \quad |\tilde{U}^1(t) - U(t)|_{L^2} \sim \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin d'utiliser des techniques de la théorie des nombres pour étudier les résonances causées par l'interaction de trois ondes. Dans l'article nous proposons deux façons différentes de traiter les résonances de trois ondes. Les deux méthodes conduisent aux résultats suivants :

Théorème 1.6. *Pour tout domaine $\mathcal{M} = (0, L_1) \times (0, L_3)$ et pour presque tous les nombres de Burgers $N \in \mathbb{R}$, pour $U_0 \in (H_{\text{per}}^{30}(\mathcal{M}))^3$ et $F \in (H_{\text{per}}^{29}(\mathcal{M}))^3 \cap \tilde{\mathbf{V}}$, la différence entre la solution U du système initial et la solution approchée donnée par (1.35) satisfait :*

$$(1.38) \quad |\tilde{U}^1(t) - U(t)|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^2 \kappa' e^{\kappa'' t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où κ' et κ'' sont des constantes qui dépendent de N , L_1 , L_3 , V_0 et F .

En estimant différemment les résonances des trois ondes, nous obtenons aussi :

Théorème 1.7. *Soient $\mu > 0$, et L_1 , L_3 donnés fixés. Soient $U_0 \in (H_{\text{per}}^{11}(\mathcal{M}))^3 \cap \tilde{\mathbf{V}}$ et $F \in (H_{\text{per}}^{10}(\mathcal{M}))^3 \cap \tilde{\mathbf{V}}$. Alors il existe un ensemble $\Theta_3^\mu(L_1, L_3)$ de mesure de Lebesgue mes $\Theta_3^\mu(L_1, L_3) \leq \mu$ tel que pour tous les nombres de Burgers $N \notin \Theta_3^\mu(L_1, L_3)$, la différence*

entre la solution exacte U du système initial et la solution approchée U^1 donnée par (1.35) satisfait :

$$(1.39) \quad |\tilde{U}^1(t) - U(t)|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^2 \kappa' e^{\kappa'' t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où κ' et κ'' sont des constantes qui dépendent de N , L_1 , L_3 , μ , U_0 and F .

Les équations primitives en dimension trois d'espace

Comme mentionné au début du chapitre, nous nous intéressons aussi à l'étude des équations primitives tridimensionnelles. Les équations considérées s'écrivent :

$$(1.40a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} + w \frac{\partial u}{\partial x_3} - fv + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \Delta u,$$

$$(1.40b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} + w \frac{\partial v}{\partial x_3} + fu + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2} = \nu \Delta v,$$

$$(1.40c) \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g,$$

$$(1.40d) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0,$$

$$(1.40e) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x_1} + v \frac{\partial T}{\partial x_2} + w \frac{\partial T}{\partial x_3} = \mu \Delta T + F_T.$$

La relation entre la température totale et la densité totale est donnée par l'équation d'état :

$$(1.41) \quad \rho_{\text{tot}} = \rho_0(1 - \beta_T(T_{\text{tot}} - T_0)),$$

et la relation entre les perturbations ρ et T par rapport aux valeurs moyennes ρ_0 et T_0 est donc :

$$(1.42) \quad \rho = -\beta_T \rho_0 T.$$

Pendant plus de 20 ans, ces équations ont été considérées comme plus compliquées que les équations de Navier-Stokes $3D$, et cela en raison des termes non-linéaires qui exigent plus de régularité car pour les équations primitives la vitesse verticale est une variable diagnostique qui s'exprime en fonction des dérivées des variables pronostiques. Un premier pas, fait dans [40], a été de considérer les équations primitives en $3D$ et d'étudier la régularité de type Sobolev et Gevrey, localement en temps, pour les solutions. Les méthodes utilisées sont semblables à celles du cas $2D$ mais avec des nouvelles difficultés techniques. Au vu des résultats de Cao et Titi [7] et de Kobelkov [23], qui ont démontré le caractère bien-posé, globalement en temps, des équations primitives $3D$, les résultats de [40] ont été généralisés dans [41]. Ainsi, en travaillant dans un domaine tridimensionnel avec des conditions aux limites périodiques en espace, nous avons obtenu l'existence globale en temps des solutions très régulières, ainsi que l'existence des ensembles absorbants dans tous les espaces de Sobolev H^m . La démonstration a pour point de départ l'idée de

Cao et Titi de décomposer la vitesse en sa partie barotrope (la moyenne de la vitesse dans la direction verticale) et sa partie barocline (le reste). On écrit donc pour ϕ quelconque :

$$\bar{\phi}(x, y) = \frac{1}{L_3} \int_{-L_3/2}^{L_3/2} \phi(x, y, z) dz, \quad \tilde{\phi} = \phi - \bar{\phi}.$$

En intégrant dans la direction verticale l'équation de la vitesse dans les équations primitives, nous obtenons l'équation pour la vitesse barotrope :

$$(1.43) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} - \nu \Delta_2 \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + \overline{(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}} + f \bar{\boldsymbol{\kappa}} \times \bar{\mathbf{v}} \\ & + \nabla [p_s(x, y, t) + \beta_T \rho_0 g \frac{1}{L_3} \int_{-L_3/2}^{L_3/2} \int_{-L_3/2}^z T(x, y, z', t) dz'] = 0, \\ & \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \text{in } (0, L_1) \times (0, L_2). \end{aligned}$$

Pour la vitesse barocline, nous obtenons l'équation suivante :

$$(1.44) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} - \left(\int_{-L_3}^z \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z', t) dz' \right) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial z} \\ & + \overline{(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + f \bar{\boldsymbol{\kappa}} \times \tilde{\mathbf{v}} \\ & + \nabla \left[\kappa_1 \int_{-L_3/2}^z T(x, y, z', t) dz' \right. \\ & \left. - \kappa_1 \frac{1}{L_3} \int_{-L_3/2}^{L_3/2} \int_{-L_3/2}^z T(x, y, z', t) dz' dz \right] = 0, \end{aligned}$$

avec $\kappa_1 = \beta_T g$.

Les espaces fonctionnels avec lesquels nous travaillons sont les suivants :

$$(1.45) \quad V = \{U = (u, v, T) \in (\dot{H}_{\text{per}}^1(\mathcal{M}))^3, u, v \text{ pair en } x_3, T \text{ impair en } x_3, \\ \int_{-L_3/2}^{L_3/2} (u_{x_1}(x_1, x_2, x'_3) + v_{x_2}(x_1, x_2, x'_3)) dx'_3 = 0\},$$

$H =$ la fermeture de V dans $(\dot{L}^2(\mathcal{M}))^3$,

$$(1.46) \quad V_2 = \text{ la fermeture de } V \cap (\dot{H}_{\text{per}}^2(\mathcal{M}))^3 \text{ dans } (\dot{H}_{\text{per}}^2(\mathcal{M}))^3.$$

La formulation variationnelle du problème est celle-ci :

Trouver $U : [0, t_0] \rightarrow V$, tel que,

$$(1.47) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt}(U, U^b)_H + a(U, U^b) + b(U, U, U^b) + e(U, U^b) = (F, U^b)_H, \quad \forall U^b \in V_2, \\ & U(0) = U_0, \end{aligned}$$

avec : $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue :

$$(1.48) \quad a(U, U^b) = \nu((u, u^b)) + \nu((v, v^b)) + \kappa \mu((T, T^b)),$$

$b : V \times V \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ trilinéaire, continue sur $V \times V_2 \times V$:

$$(1.49) \quad \begin{aligned} b(U, U^\#, U^b) &= \int_{\mathcal{M}} \left(u \frac{\partial u^\#}{\partial x} u^b + v \frac{\partial u^\#}{\partial y} u^b + w(U) \frac{\partial u^\#}{\partial z} u^b \right) d\mathcal{M} \\ &+ \int_{\mathcal{M}} \left(u \frac{\partial v^\#}{\partial x} v^b + v \frac{\partial v^\#}{\partial y} v^b + w(U) \frac{\partial v^\#}{\partial z} v^b \right) d\mathcal{M} \\ &+ \int_{\mathcal{M}} \left(u \frac{\partial T^\#}{\partial x} T^b + v \frac{\partial T^\#}{\partial y} T^b + w(U) \frac{\partial T^\#}{\partial z} \tilde{T} \right) d\mathcal{M}, \end{aligned}$$

$e : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue :

$$(1.50) \quad e(U, U^b) = f \int_{\mathcal{M}} (uv^b - vu^b) d\mathcal{M} - g\beta_T \int_{\mathcal{M}} Tw(U^b) d\mathcal{M}.$$

Dans [7] les auteurs observent que la pression de surface n'apparaît plus dans l'équation (1.44) et nous pouvons donc obtenir des estimations pour $\tilde{\mathbf{v}}$ dans $L^6(\mathcal{M})$ semblables aux estimations pour l'équation de la chaleur. Nous allons rappeler ici les étapes de la démonstration, en tenant compte des améliorations proposées par Ju [22]. Tout d'abord, des estimations sur T et $\tilde{\mathbf{v}}$ dans $L^6(\mathcal{M})$ sont obtenues en multipliant respectivement l'équation (1.40e) et l'équation (1.44) par T^5 et $|\tilde{\mathbf{v}}(t)|^4 \tilde{\mathbf{v}}(t)$ et en intégrant sur \mathcal{M} . Nous obtenons en outre l'existence des ensembles absorbants pour T et $\tilde{\mathbf{v}}$ dans $L^6(\mathcal{M})$.

L'étape suivante pour pouvoir obtenir des estimations a priori pour la solution forte est d'estimer $\tilde{\mathbf{v}}$ dans $H^1(\mathcal{M})$. Ensuite, nous obtenons des estimations à priori pour v_{x_3} dans $L^2(\mathcal{M})$ et finalement nous pouvons estimer $\nabla_3 \mathbf{v}$ dans $L^2(\mathcal{M})$ et en déduire l'existence d'un ensemble absorbant pour \mathbf{v} dans $H^1(\mathcal{M})$. Dans l'article de Cao et Titi [7] le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 1.8. *Soit $U_0 \in V$ et $F \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$, alors il existe une unique solution $U = U(t)$ définie sur \mathbb{R}_+ , pour les équations primitives tridimensionnelles (1.47), telle que :*

$$U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; V) \cap L^2(0, t'; (\dot{H}_{\text{per}}^2(\mathcal{M}))^3), \forall t' > 0.$$

Dans [22], Ju a aussi démontré l'existence d'un attracteur global pour les solutions fortes des équations primitives.

Dans l'article [41], nous montrons l'existence des ensembles absorbants pour U dans tous les espaces de Sobolev $H^m(\mathcal{M})$, l'existence d'un attracteur global est ensuite une conséquence de la théorie générale des attracteurs globaux.

Pour obtenir des estimations a priori dans $H^2(\mathcal{M})$, nous multiplions (1.40a) par $(-\Delta)^2 u$, (1.40b) par $(-\Delta)^2 v$, nous ajoutons ces équations et nous intégrons sur \mathcal{M} . Nous trouvons :

$$(1.51) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta \mathbf{v}|^2 + \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot (-\Delta)^2 \mathbf{v} d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} w(\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} (-\Delta)^2 \mathbf{v} d\mathcal{M} \\ &+ f \int_{\mathcal{M}} (\kappa \times \mathbf{v}) \cdot (-\Delta)^2 \mathbf{v} d\mathcal{M} + \frac{1}{\rho_0} \int_{\mathcal{M}} \nabla p_s \cdot (-\Delta)^2 \mathbf{v} d\mathcal{M} \\ &+ \kappa_1 \int_{\mathcal{M}} \nabla \left(\int_0^{x_3} T(z) dz \right) \cdot (-\Delta)^2 \mathbf{v} d\mathcal{M} + \nu |(-\Delta)^{3/2} \mathbf{v}|^2 \\ &= \int_{\mathcal{M}} F_{\mathbf{v}} \cdot (-\Delta)^2 \mathbf{v} d\mathcal{M}, \end{aligned}$$

où F est une force extérieure introduite pour la généralité mathématique (ou pour traiter des problèmes avec conditions aux limites non-homogènes, ce qui n'est pas développé ici).

En estimant chaque terme, nous arrivons à l'inégalité suivante :

$$(1.52) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|_2^2 + \nu |\mathbf{v}|_3^2 \leq \frac{5\nu}{6} |\mathbf{v}|_3^2 + \alpha(t) |\mathbf{v}|_2^2 + \beta(t),$$

où α et β sont les fonctions suivantes :

$$\alpha(t) = c_1 |T|_2^2 + c_2,$$

$$\beta(t) = c_3 |\mathbf{v}_{x_3}|_{L^6}^4 + |\mathbf{v}_{x_3}|_{H^1}^{4/3}.$$

Pour pouvoir utiliser le lemme de Gronwall uniforme dans (1.52) et pour obtenir des bornes uniformes pour \mathbf{v} dans $H^2(\mathcal{M})$, nous devons d'abord estimer la norme de \vec{v}_{x_3} dans $L^6(\mathcal{M})$. L'équation pour \vec{v}_{x_3} est :

$$(1.53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_{x_3}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v}_{x_3} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_2) \mathbf{v}_{x_3} - \left(\int_0^{x_3} \nabla_2 \cdot \mathbf{v}(\xi) d\xi \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{x_3}}{\partial x_3} \\ + (\mathbf{v}_{x_3} \cdot \nabla_2) \mathbf{v} - (\nabla_2 \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}_{x_3} + f \kappa \vec{v}_{x_3} + \kappa_1 \nabla_2 T = 0. \end{aligned}$$

En multipliant (1.53) par $|\mathbf{v}_{x_3}|^4 \mathbf{v}_{x_3}$ et en intégrant sur \mathcal{M} , nous obtenons :

$$(1.54) \quad \begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}_{x_3}|_{L^6}^6 + \nu \int_{\mathcal{M}} (|\nabla \mathbf{v}_{x_3}|^2 |\mathbf{v}_{x_3}|^4 + |\nabla |\mathbf{v}_{x_3}|^2|^2 |\mathbf{v}_{x_3}|^2) d\mathcal{M} \\ + f \int_{\mathcal{M}} \kappa \times \mathbf{v}_{x_3} \cdot |\mathbf{v}_{x_3}|^4 \mathbf{v}_{x_3} d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{v} \cdot \nabla_2) \mathbf{v}_{x_3} \cdot |\mathbf{v}_{x_3}|^4 \mathbf{v}_{x_3} d\mathcal{M} \\ - \int_{\mathcal{M}} \left(\int_0^{x_3} \nabla_2 \cdot \mathbf{v}(\xi) d\xi \right) \frac{\partial \mathbf{v}_{x_3}}{\partial x_3} \cdot |\mathbf{v}_{x_3}|^4 \mathbf{v}_{x_3} d\mathcal{M} \\ + \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{v}_{x_3} \cdot \nabla_2) \mathbf{v} \cdot |\mathbf{v}_{x_3}|^4 \mathbf{v}_{x_3} d\mathcal{M} - \int_{\mathcal{M}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}_{x_3} \cdot |\mathbf{v}_{x_3}|^4 \mathbf{v}_{x_3} d\mathcal{M} \\ + \kappa_1 \int_{\mathcal{M}} \nabla_2 T \cdot |\mathbf{v}_{x_3}|^4 \mathbf{v}_{x_3} d\mathcal{M} = 0. \end{aligned}$$

Après avoir estimé chaque terme dans (1.54), nous trouvons l'inégalité suivante :

$$(1.55) \quad \frac{1}{6} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}_{x_3}|_{L^6}^6 + \frac{\nu}{2} \int_{\mathcal{M}} |\nabla_2 \mathbf{v}_{x_3}|^2 |\mathbf{v}_{x_3}|^4 d\mathcal{M} \leq c(|\mathbf{v}|_{H^2} + |T|_{H^2}) |\mathbf{v}_{x_3}|_{L^6}^6.$$

Appliquant le lemme de Gronwall uniforme, nous trouvons une borne uniforme pour $|\mathbf{v}_{x_3}|_{L^6}$ et donc une borne uniforme pour \mathbf{v} dans $H^2(\mathcal{M})$. Par le même type d'estimations, nous montrons l'existence d'un ensemble absorbant pour T dans $H^2(\mathcal{M})$.

Nous montrons aussi l'existence des ensembles absorbants dans $H^m(\mathcal{M})$ pour $m \geq 2$. La démonstration est directe, on prend $(-\Delta)^m U$ comme fonction test dans la formulation variationnelle des équations primitives et après une estimation assez technique du terme non-linéaire on trouve l'existence d'une borne uniforme pour la solution U dans $H^m(\mathcal{M})$.

Nous concluons avec le résultat suivant [41] :

Théorème 1.9. Soient $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $U_0 \in V \cap (\dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M}))^3$ et $F \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H \cap (\dot{H}_{\text{per}}^{m-1}(\mathcal{M}))^3)$ donnés. Alors il existe une unique solution des équations primitives (1.47) telle que :

$$(1.56) \quad U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; (\dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M}))^3) \cap L^2(0, t'; (\dot{H}_{\text{per}}^{m+1}(\mathcal{M}))^3), \quad \forall t' > 0.$$

De plus, si $U_0 \in V$ et $F \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H \cap (\dot{H}_{\text{per}}^{m-1}(\mathcal{M}))^3)$, alors la solution U appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*; \dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M}))^3$.

Grâce aux résultats démontrés auparavant sur l'existence des solutions fortes globales en temps, nous pouvons démontrer que sur tout intervalle $(0, t)$ avec $t > 0$, la solution des équations primitives tridimensionnelles est la restriction d'une fonction complexe analytique à valeurs dans un espace de Gevrey.

Par des méthodes similaires à celles du cas bidimensionnel, nous montrons en fait qu'il existe un temps t'_* qui dépend de la force F (supposée analytique en temps à valeurs dans $D(e^{\sigma_1(-\Delta)^{1/2}}(-\Delta)^{1/2})$ avec $\sigma_1 > 0$) et de la donnée initiale U_0 tel que :

$$(1.57) \quad |e^{\varphi(s \cos \theta)(-\Delta)^{1/2}} \Delta U(se^{i\theta})|_H^2 \leq 1 + 2|\Delta U_0|_H^2, \quad \forall 0 \leq s \leq t'_*(F, U_0),$$

avec $\varphi(t) = \min(t, \sigma_1)$.

Comme nous connaissons l'existence d'un ensemble absorbant dans $\dot{H}_{\text{per}}^2(\mathcal{M})$ pour la solution U (et soit M une borne uniforme pour U dans $\dot{H}_{\text{per}}^2(\mathcal{M})$), nous pouvons réitérer l'argument précédent pour tout temps. Nous obtenons alors le résultat suivant [41] :

Théorème 1.10. Soient U_0 donné dans $\dot{H}_{\text{per}}^2(\mathcal{M})$ et F une fonction analytique en temps à valeurs dans $D(e^{\sigma_1(-\Delta)^{1/2}}(-\Delta)^{1/2})$ avec $\sigma_1 > 0$. Alors l'unique solution des équations primitives tridimensionnelles est analytique en temps sur $(0, t_*)$ avec $t_* = \min(\sigma_1, t'_*(F, M))$, à valeurs dans $D(e^{\varphi(t)(-\Delta)^{1/2}}(-\Delta)^{1/2})$ avec $\varphi(t) = \min(t, \sigma_1, t'_*(F, M))$ et analytique en temps sur $(t_*, +\infty)$ à valeurs dans $D(e^{\sigma_1(-\Delta)^{1/2}}(-\Delta)^{1/2})$.

Modes et points déterminants et théorie de la turbulence

Dans [35] nous montrons comment représenter les solutions des équations primitives en dimension trois d'espace à l'aide d'un espace de dimension finie. L'idée est de voir si, comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, les modes correspondants aux hautes fréquences décroissent rapidement si bien que l'énergie est en fait donnée par les basses fréquences. Cette question, dans le cadre des équations de Navier-Stokes, a été traitée par Foias et Temam [15] et ensuite par Constantin, Doering et Titi [10], par Doering et Titi [12], par Jones et Titi [21], etc. Un travail de synthèse peut être aussi trouvé dans Foias, Manley, Rosa et Temam [14].

Dans le cadre des équations primitives, nous cherchons à déterminer le nombre de points (appelés *points déterminants*) ou le nombre de sous-cubes (appelés *volumes déterminants*), nécessaires pour pouvoir suivre l'évolution du fluide et bien le représenter. Une autre question intéressante est le nombre de basses fréquences (appelées *fréquences*

déterminantes) dont nous avons besoin pour pouvoir déterminer le comportement des fréquences restantes.

Nous considérons F et G des forces qui ont le même comportement asymptotique en temps, plus exactement nous supposons que :

$$(1.58) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} |F(x, t) - G(x, t)| \, d\mathcal{M} \rightarrow 0,$$

ou bien

$$(1.59) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} \|F(x, t) - G(x, t)\| \, d\mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Nous considérons un ensemble de N points distribués uniformément dans le domaine dans le sens que le domaine \mathcal{M} peut être couvert par N cubes identiques Q_1, \dots, Q_N tels que chaque cube contient un et un seul point x^i :

$$(1.60) \quad \mathcal{E} = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}.$$

Nous disons que \mathcal{E} est un ensemble de points déterminants si U_1 et U_2 étant des solutions de (1.40) correspondant respectivement aux forces F et G qui vérifient (1.58) ou (1.59), le fait que U_1 et U_2 ont le même comportement asymptotique dans les points de \mathcal{E} , c'est-à-dire :

$$(1.61) \quad \max_{j=1,2,\dots,N} |U_1(x^j, t) - U_2(x^j, t)| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

implique :

$$(1.62) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} |U_1(x, t) - U_2(x, t)| \, d\mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Nous allons montrer en fait que :

$$(1.63) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} |(-\Delta)U_1(x, t) - (-\Delta)U_2(x, t)| \, d\mathcal{M} \rightarrow 0.$$

La démonstration nécessite le résultat technique suivant :

Lemme 1.3. *Nous supposons que le domaine \mathcal{M} est couvert par N cubes identiques de type $Q = (0, l) \times (0, l) \times (0, l)$ avec $l > 0$ et nous considérons l'ensemble des points $\mathcal{E} = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}$ uniformément distribués dans chaque cube. Alors pour toute fonction $f \in D((-\Delta)^{3/2})$, f satisfait :*

$$|\Delta f|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq c_1 l^{-1} \eta(f)^2 + c_2 l^2 |(-\Delta)^{3/2} f|_{L^2(\mathcal{M})}^2,$$

avec $\eta(f) = \max_{1, \dots, N} |f(x^j)|$.

Nous utilisons aussi une généralisation du lemme de Gronwall (voir [14] pour une démonstration) :

Lemme 1.4. Soient $\alpha = \alpha(t)$ et $\beta = \beta(t)$ des fonctions localement intégrables sur $[0, \infty)$ satisfaisant les conditions suivantes pour un certain $T > 0$:

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha(\tau) \, d\tau &> 0, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \alpha^-(\tau) \, d\tau &< \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \beta^+(\tau) \, d\tau &= 0, \end{aligned}$$

où $\alpha^-(t) = \max(-\alpha(t), 0)$ et $\beta^+(t) = \max(\beta(t), 0)$. Soit $\xi = \xi(t)$ une fonction absolument continue positive, définie sur $[0, \infty)$ qui satisfait l'inégalité suivante presque partout sur $[0, \infty)$:

$$(1.64) \quad \frac{d\xi}{dt} + \alpha\xi \leq \beta.$$

Alors, $\xi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Nous démontrons alors le résultat suivant [35] :

Théorème 1.11. Nous supposons que le domaine \mathcal{M} est couvert par N cubes identiques de volume l^3 et soit \mathcal{E} l'ensemble des points dans \mathcal{M} , $\mathcal{E} = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}$, uniformément distribués dans chaque cube. Soient F et G deux forces dans $L^\infty(0, \infty; V)$ satisfaisant (1.59). Alors, il existe une constante $C = C(F, G, \nu, \mu, \mathcal{M})$ telle que si

$$l^{-2} \geq C(F, G, \nu, \mu, \mathcal{M}),$$

\mathcal{E} est un ensemble de points déterminants.

Par une approche similaire nous pouvons étudier le nombre de volumes déterminants nécessaires mais le problème est que nous n'obtenons pas alors une constante satisfaisante du point de vue physique. Suivant l'idée de Constantin, Doering et Titi [10] pour les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles, nous pouvons par contre trouver des estimations locales sur la longueur de volumes déterminants et les estimations sont données en terme du taux moyen de dissipation de l'énergie.

Dans cette démarche nous avons besoin de la version suivante de l'inégalité de Poincaré (voir par exemple [10]).

Lemme 1.5. Soit $u \in H^1(\mathcal{M})$, alors u satisfait les relations suivantes :

$$\begin{aligned} |u|_{L^2(Q_j)}^2 &\leq 2|\bar{u}_j|^2 l^3 + c_1 l^2 |\nabla u|_{L^2(Q_j)}^2, \\ |u|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &\leq 2(\bar{\eta}(u))^2 l^3 + c_1 l^2 |\nabla u|_{L^2(\mathcal{M})}^2, \end{aligned}$$

où

$$\bar{u}_j = \frac{1}{l^3} \int_{Q_j} u(x) \, dx,$$

est la moyenne de la fonction u sur le cube Q_j et $\bar{\eta}(u) = (\sum_{j=1}^N |\bar{u}_j|^2)^{1/2}$.

Nous obtenons le résultat suivant [41] :

Théorème 1.12. *Nous supposons que le domaine \mathcal{M} est couvert par N cubes identiques de volume l^3 et que l soit suffisamment petit pour que :*

$$(1.65) \quad \begin{aligned} l^{-2} &\geq \inf_{s>0} (\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 c'_1 L^2}{\nu^2 s} \int_t^{t+s} |\nabla_2 \vec{u}|_{L^\infty}^2 ds'), \\ l^{-2} &\geq \inf_{s>0} (\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 c'_1 L^2 \kappa}{\nu \mu s} \int_t^{t+s} |\nabla_2 T|_{L^\infty}^2 ds'), \end{aligned}$$

où $\vec{u} = (u, v)$ et $U = (\vec{u}, T)$ est la solution des équations primitives et c'_1, c_1 sont des constantes absolues. Alors, pour toute solution V telle que $\bar{\eta}(U(t) - V(t)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, on a $|U - V|_H \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Nous remarquons ici que l'estimation obtenue est locale dans le sens qu'elle dépend d'une solution individuelle.

Remarque 1.2. Le résultat donné par le Théorème 1.12 peut être réécrit de la manière suivante : nous définissons le taux moyen modifié de dissipation de l'énergie par $\varepsilon_\infty = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec

$$\varepsilon_1 = \nu \inf_{s>0} (\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_t^{t+s} |\nabla_2 \vec{u}|_{L^\infty}^2 ds'),$$

et

$$\varepsilon_2 = \nu \inf_{s>0} (\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\nu^2 \kappa}{\mu s} \int_t^{t+s} |\nabla_2 T|_{L^\infty}^2 ds').$$

Nous définissons aussi

$$(1.66) \quad l_\infty = \frac{1}{\sqrt{c_1 c'_1} L} \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon_\infty} \right)^{1/2}.$$

Alors, si les cubes sont de volume l^3 avec $l \leq l_\infty$, les cubes sont des volumes déterminants.

Nous remarquons que l_∞ est une expression semblable à la longueur de dissipation classique de Kolmogorov pour les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. Le résultat n'est pas surprenant car même si nous travaillons avec les équations primitives tridimensionnelles nous avons vu dans la démonstration du caractère bien posé globalement en temps pour les équations primitives tridimensionnelles que le modèle a plutôt une structure bidimensionnelle.

Dans le même travail [35] nous montrons aussi l'existence des fréquences déterminantes. Pour cela nous considérons $\{\lambda_m\}_m$ les valeurs propres correspondant aux vecteurs propres $\{W_m\}$ pour l'opérateur GFD-Stokes, qui forment une famille complète orthonormale. Soit P_m la projection orthogonale associée aux m -premières fréquences et soit $Q_m = I - P_m$. Nous considérons F et G deux termes de forçage dans $L^\infty(0, \infty, H)$ et nous supposons que F et G ont le même caractère asymptotique quand $t \rightarrow \infty$:

$$(1.67) \quad \int_{\mathcal{M}} |F(t, x) - G(t, x)|^2 d\mathcal{M} \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Soient alors U et V les solutions correspondant respectivement aux force F et G . L'ensemble $\{W_i\}_{i=1}^m$ est appelle une famille de fréquences déterminantes si (1.67) et

$$(1.68) \quad \int_{\mathcal{M}} |P_m U(t, x) - P_m V(t, x)|^2 d\mathcal{M} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

entraînent

$$(1.69) \quad \int_{\mathcal{M}} |U(t, x) - V(t, x)|^2 d\mathcal{M} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1.13. *Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_m \geq K(c_0, F, G, \mathcal{M})$, avec K une constante qui ne dépend que du domaine \mathcal{M} , de la viscosité et des forces F et G . Alors les m -premières fréquences sont déterminantes dans le sens défini ci-dessus.*

Oscillations dans les équations primitives en dimension trois

Une continuation naturelle des travaux existant pour les équations primitives bidimensionnelles est d'étudier le comportement asymptotique des équations primitives tridimensionnelles quand le nombre de Rossby tend vers zéro. Ce travail est en cours, en collaboration avec R. Temam et D. Wirosoetisno. Comme pour le cas bidimensionnel, nous considérons les équations primitives tridimensionnelles sous leur forme adimensionnelle :

$$(1.70a) \quad u_t + uu_x + vv_y + ww_z - v/\varepsilon + p_x/\varepsilon = \nu_v \Delta u + S_u,$$

$$(1.70b) \quad v_t + uv_x + vv_y + ww_z + u/\varepsilon + p_y/\varepsilon = \nu_v \Delta v + S_v,$$

$$(1.70c) \quad p_z = -N\rho,$$

$$(1.70d) \quad u_x + v_y + w_z = 0,$$

$$(1.70e) \quad \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z - Nw/\varepsilon = \nu_\rho \Delta \rho + S_\rho,$$

où ε est le nombre de Rossby et N une constante liée à la fréquence de Brunt–Väisälä. Nous travaillons dans le domaine $\mathcal{M} = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (-L_3/2, L_3/2)$ et nous considérons des conditions au bord périodiques. Les espaces fonctionnels avec lesquels nous travaillons sont les mêmes que dans (1.45).

Les équations primitives tridimensionnelles peuvent être écrites comme une équation d'évolution abstraite :

$$(1.71) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dt} + AU + B(U, U) + \frac{1}{\varepsilon}LU &= S, \quad \text{dans } \mathbf{V}'_2, \\ U(0) &= U_0, \end{aligned}$$

où A , B et L ont les propriétés suivantes :

$$(1.72) \quad \langle AU, U \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \geq c_0 \|U\|^2, \quad \langle B(U, U), U \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = 0, \quad \langle LU, U \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = 0,$$

et S est le terme de forçage.

Le système peut donc être écrit sous la forme :

$$(1.73) \quad \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\varepsilon}LU = \mathcal{F}(U),$$

avec $\mathcal{F}(U) = S - AU - B(U, U)$.

En appliquant la méthode de renormalisation décrite dans la première partie du chapitre, dédiée aux équations primitives bidimensionnelles, nous cherchons à déterminer la partie résonante F_r (qui ne dépend pas explicitement du temps) et la partie nonrésonante F_n (qui dépend explicitement du temps) dans $F(s, \cdot) = e^{Ls}\mathcal{F}(e^{-Ls}\cdot)$, où $s = t/\varepsilon$ est la variable de temps rapide. Pour cela, nous écrivons les équations pour chaque mode de Fourier.

Pour $k_3 \neq 0$, nous trouvons :

$$(1.74) \quad A_k = \begin{pmatrix} \nu_v |k'|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_v |k'|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_\rho |k'|^2 \end{pmatrix},$$

$$(1.75) \quad L_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -k'_1/k'_3 \\ 1 & 0 & -k'_2/k'_3 \\ Nk'_1/k'_3 & Nk'_2/k'_3 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$(1.76) \quad B_k = \begin{pmatrix} \sum_{j+l=k} i(l'_1 - \delta_j^1 l'_3) u_j u_l + \sum_{j+l=k} (l'_2 - \delta_j^2 l'_3) v_j u_l \\ \sum_{j+l=k} i(l'_1 - \delta_j^1 l'_3) u_j v_l + \sum_{j+l=k} (l'_2 - \delta_j^2 l'_3) v_j v_l \\ \sum_{j+l=k} i(l'_1 - \delta_j^1 l'_3) u_j \rho_l + \sum_{j+l=k} (l'_2 - \delta_j^2 l'_3) v_j \rho_l \end{pmatrix},$$

avec

$$\delta_k^i = k'_i/k'_3 \text{ pour } i = 1, 2, \text{ si } k'_3 \neq 0 \text{ et } \delta_k^i = 0 \text{ si } k'_3 = 0,$$

et $k'_j = 2\pi k_j/L_j$, pour $j = 1, 2, 3$.

Les valeurs propres et les vecteurs propres de L_k sont :

Si $\tilde{k}' = (k'_1, k'_2) \neq 0$, alors les valeurs propres sont $\omega_k^\pm = \pm i|k'|_N/k'_3$ avec $|k'|_N = \sqrt{N(k_1'^2 + k_2'^2) + k_3'^2}$ et $\omega_k^0 = 0$ et les vecteurs propres correspondants sont :

$$(1.77) \quad X_k^0 = \frac{1}{|k'|} \begin{pmatrix} k'_2 \\ -k'_1 \\ k'_3 \end{pmatrix}, X_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}|k'| |\tilde{k}'|} \begin{pmatrix} -k'_2 k'_3 \pm i k'_1 |k'| \\ k'_1 k'_3 \pm i k'_2 |k'| \\ |\tilde{k}'|^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\tilde{k}' = (k'_1, k'_2) = 0$, alors les valeurs propres sont $\omega_k^\pm = \pm \text{sgn}(k_3) i$ et $\omega_k^0 = 0$ et les vecteurs propres correspondants sont :

$$(1.78) \quad X_k^0 = \frac{1}{|k'|} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sgn}(k_3) \end{pmatrix}, X_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \text{sgn}(k_3) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $k_3 = 0$, nous savons déjà que $\rho_k = 0$ et $k'_1 u_k + k'_2 v_k = 0$, donc l'espace des solutions est de dimension un et $L_k = 0$. Pour avoir une formule générale valable pour tous les k'_3 et pour $\tilde{k}' \neq 0$, nous prenons $\omega_k^0 = 0$, $\omega_k^\pm = 0$ et

$$(1.79) \quad X_k^0 = \frac{1}{|\tilde{k}'|} \begin{pmatrix} k'_2 \\ -k'_1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}|\tilde{k}'|} \begin{pmatrix} \pm k'_1 \\ \pm k'_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Après le calcul, nous trouvons le système renormalisé suivant :
Pour $k_3 \neq 0$:

$$(1.80) \quad \begin{aligned} \frac{dv_k^+}{dt} + \nu_+(k)|k'|^2 v_k^+ + \sum_{\substack{\omega_j^{s_1} + \omega_l^{s_2} = \omega_k^+ \\ s_1, s_2 = \pm}}^{c,n} B_{jlk}^{s_1 s_2 +} X_k^+ \cdot X_l^{-s_2} v_j^{s_1} v_l^{s_2} \\ + \sum_{\substack{\omega_j^{s_1} = \omega_k^+ \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{s_1 0 +} X_k^+ \cdot X_l^0 v_j^{s_1} v_l^0 + \sum_{\substack{\omega_l^{s_1} = \omega_k^+ \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{0 s_1 +} X_k^+ \cdot X_l^{-s_1} v_j^0 v_l^{s_1} = S_k^+, \end{aligned}$$

$$(1.81) \quad \begin{aligned} \frac{dv_k^-}{dt} + \nu_-(k)|k'|^2 v_k^- + \sum_{\substack{\omega_j^{s_1} + \omega_l^{s_2} = \omega_k^- \\ s_1, s_2 = \pm}}^{c,n} B_{jlk}^{s_1 s_2 -} X_k^- \cdot X_l^{-s_2} v_j^{s_1} v_l^{s_2} \\ + \sum_{\substack{\omega_j^{s_1} = \omega_k^- \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{s_1 0 -} X_k^- \cdot X_l^0 v_j^{s_1} v_l^0 + \sum_{\substack{\omega_l^{s_1} = \omega_k^- \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{0 s_1 -} X_k^- \cdot X_l^{-s_1} v_j^0 v_l^{s_1} = S_k^-, \end{aligned}$$

$$(1.82) \quad \frac{dv_k^0}{dt} + \nu_0(k)|k'|^2 v_k^0 + i \sum^c \frac{\tilde{l} \wedge \tilde{j}}{|j||k|} |l| v_j^0 v_l^0 = S_k^0.$$

Pour $k_3 = 0$ nous trouvons :

$$(1.83) \quad \frac{dv_k^0}{dt} + \nu_0(k)|k'|^2 v_k^0 + i \sum^c \frac{\tilde{l} \wedge \tilde{j} \cdot \tilde{k}}{|j||l||k|} v_j^0 v_l^0 = S_k^0,$$

avec

$$(1.84) \quad \begin{aligned} \nu_+(k) &= \nu_\rho k'^2_2 + \nu_v (k'^2_1 + k'^2_3), \\ \nu_-(k) &= \nu_\rho k'^2_1 + \nu_v (k'^2_3 + k'^2_3), \\ \nu_0(k) &= \nu_\rho k'^2_3 + \nu_v (k'^2_1 + k'^2_2). \end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus, \sum^c est la somme cyclique $j + l = k$, \sum^n est la somme quand $j_3 \neq 0$, $l_3 \neq 0$, $k_3 \neq 0$ et $l \wedge k = l_1 k_2 - l_2 k_1$. Les coefficients $B_{jlk}^{s_1 s_2 s_3}$ satisfont les

relations de symétrie suivantes :

$$\begin{aligned}
B_{jlk}^{+++} &= \frac{i}{\sqrt{2}|\tilde{j}'||\tilde{j}'|} \{j'_3 \tilde{j}' \wedge \tilde{l}' - i \tilde{j}' \cdot \tilde{l}' |j'| + i |\tilde{j}'|^2 |j'| \frac{l'_3}{j'_3}\}, \\
B_{jlk}^{-++} &= \frac{i}{\sqrt{2}|\tilde{j}'||\tilde{j}'|} \{j'_3 \tilde{j}' \wedge \tilde{l}' + i \tilde{j}' \cdot \tilde{l}' |j'| - i |\tilde{j}'|^2 |j'| \frac{l'_3}{j'_3}\}, \\
(1.85) \quad B_{jlk}^{0++} &= \frac{i}{|\tilde{j}'|} \tilde{l}' \wedge \tilde{j}', \\
B_{jlk}^{+++} &= B_{jlk}^{+-+} = B_{jlk}^{+0+} = B_{jlk}^{++0} = B_{jlk}^{+--} = B_{jlk}^{+0-} = B_{jlk}^{+0-}, \\
\overline{B_{jlk}^{+++}} &= B_{jlk}^{-++} = B_{jlk}^{-+-} = B_{jlk}^{-0+} = B_{jlk}^{-+0} = B_{jlk}^{-0-} = B_{jlk}^{-+-} = B_{jlk}^{-0-} = B_{jlk}^{-0-}, \\
B_{jlk}^{0++} &= B_{jlk}^{0-+} = B_{jlk}^{000} = B_{jlk}^{0+-} = B_{jlk}^{0--}.
\end{aligned}$$

Nous remarquons d'abord que l'équation pour v_k^0 est découplée des autres équations en v_k^+ et v_k^- . En introduisant le potentiel quasi-géostrophique $q_k = |k|v_k^0$ comme nouvelle inconnue, on trouve :

$$(1.86) \quad \frac{dq_k}{dt} + \nu_0(k)|k'|^2 q_k + i \sum \frac{\tilde{l}' \wedge \tilde{j}'}{|\tilde{j}'|^2} q_l q_j = S_k^0 |k'|.$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation quasi-géostrophique tridimensionnelle et elle a été étudiée par Babin, Mahalov et Nicolaenko [3]. Pour cette équation nous connaissons l'existence de solutions globales en temps dans tous les espaces de Sobolev H^s , avec $s \geq 0$, ainsi que l'existence des ensembles absorbants dans les espaces H^s .

Nous remarquons d'abord que nous ne nous intéressons pas au cas où la constante de Brünt-Väisälä tend vers zéro ou l'infini. Pour étudier le système renormalisé complet, nous supposons que la constante de Brünt-Väisälä est choisie de telle manière que le cas des interactions à trois fréquences est exclu, donc nous ne pouvons pas avoir :

$$\omega_j^{s_1} + \omega_l^{s_2} = \omega_k^{s_3}.$$

Pour cela nous montrons de la même manière que dans le cas des équations primitives bidimensionnelles, que pour exclure le cas des interactions de trois fréquences, nous devons exclure une famille dénombrable de valeurs possibles de la constante de Brünt-Väisälä. Avec ces hypothèses simplificatrices, le système renormalisé devient :

$$\begin{aligned}
(1.87) \quad \frac{dv_k^+}{dt} + \nu_+(k)|k'|^2 v_k^+ &+ \sum_{\substack{\omega_j^{s_1} = \omega_k^+ \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{s_1 0+} X_k^+ \cdot X_l^0 v_j^{s_1} v_l^0 + \sum_{\substack{\omega_l^{s_1} = \omega_k^+ \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{0 s_1+} X_k^+ \cdot X_l^{-s_1} v_j^0 v_l^{s_1} = S_k^+, \\
\frac{dv_k^-}{dt} + \nu_-(k)|k'|^2 v_k^- &+ \sum_{\substack{\omega_j^{s_1} = \omega_k^- \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{s_1 0-} X_k^- \cdot X_l^0 v_j^{s_1} v_l^0 + \sum_{\substack{\omega_l^{s_1} = \omega_k^- \\ s_1 = \pm}}^c B_{jlk}^{0 s_1-} X_k^- \cdot X_l^{-s_1} v_j^0 v_l^{s_1} = S_k^-, \\
\frac{dv_k^0}{dt} + \nu_0(k)|k'|^2 v_k^0 &+ i \sum \frac{\tilde{l}' \wedge \tilde{j}'}{|\tilde{j}'||k|} |l| v_j^0 v_l^0 = S_k^0.
\end{aligned}$$

Connaissant les résultats sur la régularité de v_k^0 , nous pouvons obtenir des bornes uniformes pour v^+ et v^- dans tous les espaces de Sobolev. Plus exactement, nous démontrons le résultat suivant [43] :

Théorème 1.14. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $V_0 = (v_0^+, v_0^-, v_0^0) \in \dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M})$ et $S \in \dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M})$. Alors, le système (1.87) possède une unique solution V telle que :*

$$V = (v^+, v^-, v^0) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{H}_{\text{per}}^m(\mathcal{M})) \quad \text{et} \quad V(0) = V_0.$$

De plus, $\int_t^{t+r} |V(s)|_{m+1}^2 ds \leq b_m$, $\forall t \geq t_0(V_0)$, où b_m est une constante qui ne dépend pas de la condition initiale.

La difficulté technique du problème consiste à estimer l'erreur entre la solution exacte des équations primitives et la solution approchée, donnée par :

$$(1.88) \quad \tilde{V}^1(s) = e^{-sL}[\bar{V}(s) + \varepsilon F_{np}(\bar{V}, s)],$$

où \bar{V} est la solution du système renormalisé (1.87) et F_{np} est la primitive de la partie non-résonante F_n de F .

L'erreur $W(s) = \tilde{V}^1(s) - V(s)$ satisfait :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{ds} + LW + \varepsilon AW + \varepsilon B(W, W) + \varepsilon B(\tilde{V}^1, W) + \varepsilon B(W, \tilde{V}^1) &= \varepsilon^2 R_\varepsilon, \\ W(0) &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &= -Ae^{-sL}F_{np} - B(e^{-sL}\bar{V}, e^{-sL}F_{np}) - B(e^{-sL}F_{np}, e^{-sL}\bar{V}) \\ &\quad - \varepsilon B(e^{-sL}F_{np}, e^{-sL}F_{np}) - e^{-sL}\nabla_{\bar{V}}F_{np} \cdot F_r(\bar{V}). \end{aligned}$$

Nous voulons d'abord borner la norme de W dans $L^2(\mathcal{M})$. Mais quand nous essayons de faire cela, nous avons une difficulté technique qui est de trouver une borne supérieure pour les termes dans F_{np} contenant les intégrales en s de $e^{i\omega_k^\pm s}$, $e^{i(\omega_k^{s_1} + \omega_j^{s_2})s}$, $e^{i(\omega_k^{s_1} + \omega_j^{s_2} + \omega_l^{s_3})s}$. La principale difficulté technique est de borner :

$$I = \frac{1}{\omega_k^{s_1} + \omega_j^{s_2} + \omega_l^{s_3}},$$

ce qui est équivalent à borner : $I' = 1/|N^2\sigma_1 + N\sigma_2 + \sigma_3|$, avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2|\tilde{j}|^2 j_3^2 |\tilde{l}|^2 l_3^2 k_3^4 + 2|\tilde{j}|^2 j_3^2 |\tilde{k}|^2 k_3^2 l_3^4 + 2|\tilde{l}|^2 l_3^2 |\tilde{k}|^2 k_3^2 j_3^4 - |\tilde{j}|^4 l_3^4 k_3^4 - |\tilde{k}|^4 j_3^4 k_3^4 - |\tilde{l}|^4 j_3^4 l_3^4, \\ \sigma_2 &= 2(|\tilde{j}|^2 l_3^4 k_3^4 j_3^2 + |\tilde{l}|^2 l_3^2 j_3^4 k_3^4 + |\tilde{k}|^2 k_3^2 j_3^4 l_3^4), \\ \sigma_3 &= 3j_3^4 l_3^4 k_3^4, \end{aligned}$$

et où N' est le nombre de Burgers.

Pour surmonter cette difficulté, nous adaptons une idée de Babin, Mahalov et Nicolaenko [4] (voir aussi [37] pour la renormalisation appliquée aux équations primitives bidimensionnelles).

Nous trouvons que si $\eta > 0$ et $\mu > 0$ alors pour tous $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{R}$ il existe un ensemble $\Theta^\mu(L_1, L_2, L_3)$ dont la mesure de Lebesgue $\text{mes } \Theta^\mu(L_1, L_2, L_3) \leq \mu$, tel que pour $N \notin \Theta^\mu(L_1, L_2, L_3)$ nous avons $\omega_j^{s_1} + \omega_l^{s_2} + \omega_k^{s_3} \neq 0$ pour tous les j, l, k tels que $j+l+k=0$, et

$$\frac{1}{|\omega_j^{s_1} + \omega_l^{s_2} + \omega_k^{s_3}|} \leq \max\left(2, C(N, L_1, L_2, L_3, \eta) \frac{(|k'| + |j'| + |l'|)^3}{\mu} |l'|^{2+\eta} |j'|^{2+\eta}\right).$$

Nous obtenons le résultat suivant [43] :

Théorème 1.15. *Soient $\mu > 0$, L_1, L_2, L_3 des constantes données, fixées et $V_0 \in (\dot{H}_{\text{per}}^{11}(\mathcal{M}))^3 \cap \mathbf{V}$, $S \in (\dot{H}_{\text{per}}^{10}(\mathcal{M}))^3 \cap \mathbf{V}$. Alors pour tout $N \notin \Theta^\mu(L_1, L_2, L_3)$, l'erreur entre la solution V des équations primitives et la solution approchée \tilde{V}^1 donnée par (1.88) satisfait :*

$$|\tilde{V}^1(t) - V(t)|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^2 \kappa' e^{\kappa'' t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où κ' et κ'' sont des constantes qui dépendent de $N, L_1, L_2, L_3, \mu, V_0, S$.

Nous pouvons aussi estimer l'erreur dans tous les espaces de Sobolev H^m avec $m \geq 1$. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.16. *Soient $\mu > 0$, $m > 0$, L_1, L_2, L_3 des constantes données, fixées et $V_0 \in (\dot{H}_{\text{per}}^{11+m}(\mathcal{M}))^3 \cap \mathbf{V}$, $S \in (\dot{H}_{\text{per}}^{10+m}(\mathcal{M}))^3 \cap \mathbf{V}$. Alors pour tout $N \notin \Theta^\mu(L_1, L_2, L_3)$, et pour tout $t_* > 0$ il existe $\varepsilon_{t_*} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_{t_*}$ l'erreur entre la solution V des équations primitives et la solution approchée \tilde{V}^1 donnée par (1.88) satisfait :*

$$|\tilde{V}^1(t) - V(t)|_{H^m}^2 \leq \varepsilon^2 \kappa, \quad \forall t \in [0, t_*] \quad \forall t \geq 0,$$

où κ est une constante qui dépend de $N, L_1, L_2, L_3, \mu, V_0, S$ et t_* .

Equations primitives quasi-hydrostatiques

Dans un travail en collaboration avec K. Lucas et A. Rousseau [30] nous avons étudié les équations primitives quasi-hydrostatiques, un nouveau modèle de circulation océanique à grande échelle. Les modèles numériques pour la circulation océanique cherchent, pour simuler l'écoulement d'un fluide, à trouver le meilleur compromis entre les coûts de calcul et la réalité physique. D'une part, les équations de Navier-Stokes complètes contenant tous les processus dynamiques pouvant décrire de manière exacte le phénomène physique sont trop coûteuses à implémenter dans un grand domaine. D'autre part, les équations primitives hydrostatiques représentent un bon compromis entre un modèle viable du point de vue calcul scientifique mais aussi du point de vue de la réalité physique.

Les équations primitives sont, comme nous avons déjà vu dans ce chapitre, plus simples que les équations physiques complètes. Nous rappelons ici qu'elles sont obtenues en utilisant l'approximation hydrostatique, qui prend en compte le fait que la longueur L du domaine est beaucoup plus grande que sa profondeur H , en fait le rapport $\varepsilon = H/L$ est typiquement d'ordre 10^{-3} pour les modèles de circulation océanique à grande échelle. Dans les équations de conservation du mouvement, nous négligeons aussi les termes de Coriolis

contenant $2\Omega \cos \theta$, où $\vec{\Omega} = \Omega(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ est le vecteur de rotation de la Terre à la latitude θ . Des études numériques ([31], [48]) montrent que les équations primitives gardant les termes de type $\Omega \cos \theta$ fournissent de meilleurs résultats. Ces équations sont appelées les équations primitives quasi-hydrostatiques.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord justifier par une analyse d'échelle l'obtention du modèle des équations primitives quasi-hydrostatiques (QHPE) et ensuite nous allons montrer le caractère bien-posé du modèle.

Nous partons des équations de Navier-Stokes régissant le mouvement d'un fluide incompressible en rotation :

$$(1.89a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)u - fv + f^*w + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_v \Delta_h u - \nu_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1.89b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)v + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_v \Delta_h v - \nu_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1.89c) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)w - f^*u + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \mu_v \Delta_h w - \nu_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\rho_0} g,$$

$$(1.89d) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(1.89e) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)T - \mu_T \Delta_h T - \nu_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = F_T,$$

$$(1.89f) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)S - \mu_S \Delta_h S - \nu_S \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0.$$

Ici $\mathbf{V}_3 = (u, v, w)$ est la vitesse tridimensionnelle, ρ la densité, T la température, S la salinité, ϕ la pression renormalisée ($\phi = p/\rho_0$). Les constantes f et f^* sont définies par $f = 2\Omega \sin \theta$ et $f^* = 2\Omega \cos \theta$. Le vecteur $\vec{\Omega} = \Omega(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ représente le vecteur rotation de la Terre à la latitude θ , g est la constante de gravité universelle et ρ_0 désigne la densité moyenne du fluide. Les constantes (μ_v, μ_T, μ_S) et (ν_v, ν_T, ν_S) représentent les viscosités respectivement horizontales et verticales et F_T est un terme lié à la chaleur externe.

L'équation d'état complète le système et nous donne la relation entre la densité, la température et la salinité :

$$(1.90) \quad \rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T^*) + \beta_S(S - S^*)),$$

où T^* , S^* sont respectivement des valeurs moyennes pour la température et la salinité et β_T , β_S sont deux constantes positives.

Pour pouvoir faire une analyse d'échelle et sélectionner les termes à négliger, nous regardons les valeurs des paramètres physiques (longueur et profondeur du domaine, vitesse angulaire de la rotation de la terre, vitesse horizontale et vitesse verticale). Les ordres de grandeur considérés ici (voir le Tableau (1.1)) correspondent au mouvement planétaire, par exemple à une configuration réaliste pour l'océan Atlantique Nord et nous avons $WL/UH \approx 1$ (voir aussi [6]).

Le rapport entre la profondeur et la longueur du domaine est :

$$\varepsilon = \frac{H}{L} = \frac{W}{U} \simeq 10^{-3}.$$

Hauteur (H)	1000 m
Longueur (L)	1000 km
Vitesse horizontale (U)	1.0 $m \cdot s^{-1}$
Vitesse verticale (W)	$10^{-3} m \cdot s^{-1}$
Temps ($T = L/U$)	$10^6 s$
Vitesse de rotation terrestre (Ω)	$7.10^{-5} rad \cdot s^{-1}$

TABLE 1.1 – Les ordres de grandeur pour l’océan Atlantique Nord

Si nous comparons la dérivée totale :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)w,$$

avec le terme de Coriolis f^*u dans l’équation du mouvement verticale (1.89c), nous remarquons que le rapport entre les deux termes est :

$$(1.91) \quad \frac{W/T}{2\Omega \cos \theta U} = \frac{\varepsilon}{2T\Omega \cos \theta} < \varepsilon,$$

ce qui justifie que nous négligeons les termes contenant la vitesse verticale.

Les équations primitives hydrostatiques sont obtenues en négligeant le terme f^*w car il est petit par rapport à fv (W est comparable à εU) ; pour des raisons de conservation de l’énergie nous allons aussi négliger le terme f^*u dans l’équation pour la conservation de la quantité de mouvement horizontale.

Si nous comparons les termes que nous avons négligé, le terme le plus grand est celui qui contient $\cos \theta$. Si nous comparons le terme f^*w avec le terme du/dt dans (1.89a), le rapport entre ces termes est :

$$\frac{2\Omega \cos \theta W}{U/T} = \frac{2\varepsilon\Omega}{T} \cos \theta = 14\% \cos \theta,$$

donc il est désirable de garder le terme f^*w . Dans l’équation pour la conservation de la quantité de mouvement verticale nous proposons de garder le terme $2\Omega \cos \theta u$. La raison pour garder ce terme n’est pas liée exclusivement à la conservation de l’énergie mais aussi au fait que si nous comparons ce terme avec $\partial\phi/\partial z$, le rapport de magnitude est :

$$\frac{2\Omega \cos \theta U}{P/\rho H} = \frac{2\varepsilon\Omega \cos \theta U}{U\Omega/\varepsilon} = 2\varepsilon \cos \theta.$$

Ce rapport est petit mais pas aussi petit que le rapport entre dw/dt et $\partial\phi/\partial z$ qui est d’ordre $\varepsilon^2/70$. Nous pouvons donc dire que nous gardons dans le nouveau modèle les termes d’ordre 0 et ceux d’ordre ε , en négligeant les termes d’ordre ε^2 . Nous obtenons

alors les équations primitives quasi-hydrostatiques :

$$(1.92a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)u - fv + f^*w + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_v \Delta_h u - \nu_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1.92b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)v + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_v \Delta_h v - \nu_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1.92c) \quad -f^*u + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_0} g,$$

$$(1.92d) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(1.92e) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)T - \mu_T \Delta_h T - \nu_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = F_T,$$

$$(1.92f) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V}_3 \cdot \nabla)S - \mu_S \Delta_h S - \nu_S \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0.$$

Comme l'équation pour la salinité a la même structure que celle pour la température et n'apporte pas de difficulté mathématique supplémentaire, nous allons négliger cette équation dans tout ce qui suit.

Nous considérons les équations dans un domaine cylindrique $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \times (-h, 0)$, où \mathcal{M}' est un domaine borné régulier dans \mathbf{R}^2 , comme dans la Figure (1.1) :

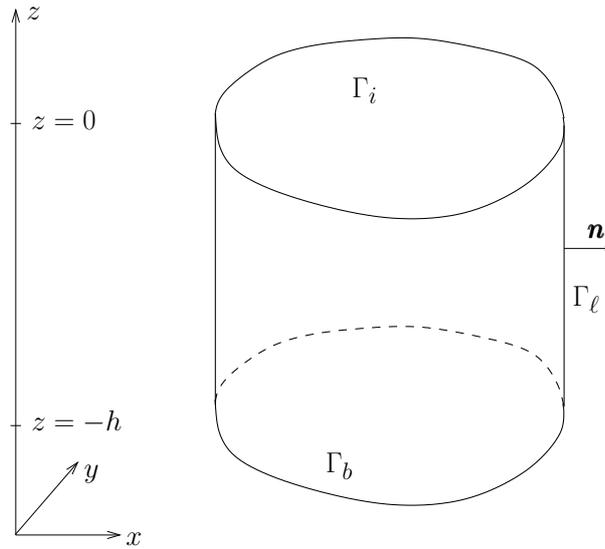


FIGURE 1.1 – Le domaine cylindrique pour les équations QHPE

Les conditions au bord pour ce système sont :

$$(1.93a) \quad \text{sur } \Gamma_i : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = h\tau, \quad w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha_T(T - T^*),$$

$$(1.93b) \quad \text{sur } \Gamma_b : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$(1.93c) \quad \text{sur } \Gamma_l : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

où \mathbf{v} est la vitesse horizontale (u, v) , \mathbf{n} est le vecteur normal et τ est la contrainte de cisaillement du vent (mais sans perte de généralité mathématique nous pouvons supposons que $\tau = 0$ et $T^* = 0$). Dans (1.93) nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \{(x, y, z) \in \mathcal{M} \mid z = 0\}, \\ \Gamma_b &= \{(x, y, z) \in \mathcal{M} \mid z = -h\}, \\ \Gamma_l &= \{(x, y, z) \in \mathcal{M} \mid (x, y) \in \partial\mathcal{M}'\}.\end{aligned}$$

Le modèle (1.92) est complété par les conditions initiales :

$$(1.94) \quad \mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0(x, y, z), \quad T(t = 0) = T_0(x, y, z).$$

De la même manière que pour les équations primitives hydrostatiques, nous montrons le caractère bien-posé, globalement en temps, pour le modèle (1.92), (1.93), (1.94). Plus précisément, nous introduisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \{U = (\mathbf{v}, T) \in (H^1(\mathcal{M}))^3 \mid \int_{-h}^0 \nabla_2 \cdot \mathbf{v} \, dz = 0, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_b \cup \Gamma_l\}, \\ \mathbf{H} &= \{U = (\mathbf{v}, T) \in (L^2(\mathcal{M}))^3 \mid \int_{-h}^0 \nabla_2 \cdot \mathbf{v} \, dz = 0, \mathbf{n}_h \cdot \int_{-h}^0 \mathbf{v} \, dz = 0 \text{ sur } \Gamma_l\}.\end{aligned}$$

Nous démontrons l'existence de solutions faibles [30] :

Théorème 1.17. *Soient $t_1 > 0$, $U_0 = (\mathbf{v}_0, T_0)$ dans \mathbf{H} et F_T dans $L^2(0, t_1, L^2(\mathcal{M}))$. Alors il existe une solution faible U de (1.92) avec la condition initiale $U(t = 0) = U_0$, telle que :*

$$U \in L^\infty(0, t_1, \mathbf{H}) \cap L^2(0, t_1, \mathbf{V}).$$

Nous démontrons aussi, de la même manière que pour les équations primitives hydrostatiques (voir Théorème 1.8), l'existence globale en temps et l'unicité des solutions fortes [30] :

Théorème 1.18. *Soient $U_0 = (\mathbf{v}_0, T_0)$ dans \mathbf{V} et F_T dans $L^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{H})$. Alors il existe une unique solution U pour (1.92), définie sur \mathbf{R}_+ , et telle que :*

$$U \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{V}) \cap L^2(0, t_1, (H^2(\mathcal{M}))^3), \quad \forall t_1 > 0.$$

Bibliographie

- [1] A. BABIN, A. MAHALOV ET B. NICOLAENKO, *Global splitting, integrability and regularity of 3d Euler and Navier–Stokes equations for uniformly rotating flows*, Eur. J. Mech. B/Fluids, 15 (1996), pp. 291–300.
- [2] A. BABIN, A. MAHALOV ET B. NICOLAENKO, *Integrability and regularity of 3d Euler and Navier–Stokes equations for uniformly rotating fluids*, Comp. Math. Appl., 31 (1996), pp. 35–42.
- [3] A. BABIN, A. MAHALOV ET B. NICOLAENKO, *On the regularity of three-dimensional rotating Euler–Boussinesq equations*, Math. Models Methods Appl. Sci., 9 (1999), pp. 1089–1121.
- [4] A. BABIN, A. MAHALOV ET B. NICOLAENKO, *Fast singular oscillating limits and global regularity for the 3D primitive equations of geophysics*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 34 (2000), pp. 201–222.
- [5] P. BARTELLO, *Geostrophic adjustment and inverse cascades in rotating stratified turbulence*, J. Atmos. Sci., 52 (1995), pp. 4410–4428.
- [6] A. P. BURGER, *The potential vorticity equation : from planetary to small scale*, Tellus (1991), pp. 191–197.
- [7] C. CAO ET E. TITI, *Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics*, Ann. of Math. (2), vol. 166, pp. 245–267, (2007)
- [8] J. -Y. CHEMIN, *Système primitif de l’océan-atmosphère et limite quasi-géostrophique*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1995–1996, Exp. No. VII, Ecole Polytech., Palaiseau, 1996.
- [9] L.-Y. CHEN, N. GOLDENFELD ET Y. OONO, *Renormalization group theory and variational calculations for propagating fronts*, Phys. Rev. E (3), 49 (1994), pp. 4502–4511.
- [10] P. CONSTANTIN, C. R. DOERING, ET E. S. TITI, *Rigorous estimates of small scales in turbulent flows*, J. Math. Phys., 37 (1996), pp. 6152–6156.
- [11] B. CUSHMAN-ROISIN, *Introduction to geophysical fluid dynamics*, Prentice–Hall, 1994.

- [12] C. R. DOERING ET E. S. TITI, *Exponential decay rate of the power spectrum for solutions of the Navier-Stokes equations*, Phys. Fluids, 7 (1995), pp. 1384–1390.
- [13] P. T. EMBID ET A. J. MAJDA, *Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with arbitrary potential vorticity*, Comm. P.D.E., 21 (1996), pp. 619–658.
- [14] C. FOIAS, O. MANLEY, R. ROSA, ET R. TEMAM, *Navier-Stokes equations and turbulence*, vol. 83 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [15] C. FOIAS ET R. TEMAM, *Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values*, Math. Comp., 43 (1984), pp. 117–133.
- [16] C. FOIAS ET R. TEMAM, *Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations*, J. Funct. Anal., 87 (1989), pp. 359–369.
- [17] I. GALLAGHER, *Applications of Schochet’s methods to parabolic equations*, J. Math. Pures Appl., 77 (1998), pp. 989–1054.
- [18] E. GRENIER, *Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl., (9), 76 (1997), pp. 477–498.
- [19] G. J. HALTINER, *Numerical weather prediction*, Wiley, 1971.
- [20] G. J. HALTINER ET T. WILLIAMS, *Numerical prediction and dynamic meteorology, 2ed.*, Wiley, 1980.
- [21] D. A. JONES ET E. S. TITI, *Upper bounds on the number of determining modes, nodes, and volume elements for the Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J., 42 (1993), pp. 875–887.
- [22] N. JU, *The global attractor for the solutions to the 3d viscous primitive equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 17 (2007), no. 1, pp. 159–179.
- [23] G. KOBELKOV, *Existence of a solution ‘in the large’ for the 3D large-scale ocean dynamics equations*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 343 (2006), pp. 283–286
- [24] A. N. KOLMOGOROV, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.), 30 (1941), pp. 301–305
- [25] A. N. KOLMOGOROV, *On the generation of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.), 31 (1941), pp. 528–540
- [26] A. N. KOLMOGOROV, *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*, J. Fluid Mech., 13 (1962), pp. 82–85

-
- [27] R. H. KRAICHNAN, *Inertial ranges in two-dimensional turbulence*, Phys. Fluids, 10 (1967), pp. 1417–1423
- [28] J.-L. LIONS, R. TEMAM ET S. WANG, *New formulations of the primitive equations of the atmosphere and applications*, Nonlinearity, 5 (1992), pp. 237–288.
- [29] J.-L. LIONS, R. TEMAM ET S. WANG, *On the equations of the large-scale ocean*, Nonlinearity, 5 (1992), pp. 1007–1053.
- [30] K. LUCAS, M. PETCU ET A. ROUSSEAU. *Quasi-hydrostatic primitive equations for ocean global circulation models*, Chin. Ann. Math., 31B(5), (2010) pp. 1–20.
- [31] J. MARSHALL, C. HILL, L. PERELMAN ET A. ADCROFT, *Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling*, J. Geophys. Research, 102 : (1997), pp. 5733–5752.
- [32] I. MOISE ET R. TEMAM, *Renormalization group method. Applications to Navier–Stokes equation*, Discr. and Cont. Dyn. Syst., 6 (2000), pp. 191–200.
- [33] I. MOISE ET M. ZIANE, *Renormalization group method. Applications to partial differential equations*, J. Dyn. and Diff. Syst., 13 (2001), pp. 275–321.
- [34] J. PEDLOSKY, *Geophysical fluid dynamics, 2nd Edition*, Springer, 1987.
- [35] M. PETCU, *Exponential Decay of the Power Spectrum and Finite Dimensionality for Solutions of the Three Dimensional Primitive Equations*, à paraître dans Numerische Mathematik.
- [36] M. PETCU, R. TEMAM ET D. WIROSOETISNO, *Existence and regularity results for the primitive equations in two space dimensions*, Comm. Pure Appl. Anal., 3 (2004), 115–131.
- [37] M. PETCU, R. TEMAM ET D. WIROSOETISNO, *Renormalization group method applied to the primitive equations*, Journal of Differential Equations, 208 (2005), pp. 215–257.
- [38] M. PETCU, *On the backward uniqueness of the primitive equations*, J. Math. Pures Appl. (9) 87 (2007), no. 3, 275–289.
- [39] M. PETCU, *Gevrey class regularity for the primitive equations in space dimension 2*, Asymptot. Anal. 39 (2004), no. 1, 1–13.
- [40] M. PETCU ET D. WIROSOETISNO, *Sobolev and Gevrey regularity for the primitive equations in a space dimension 3*, Applic. Anal., 84, 8 (2005), 769–788.
- [41] M. PETCU, *On the three dimensional primitive equations*, Advances in Differential Equations, 11, (2006), 1201–1226.
- [42] M. PETCU, R. TEMAM ET M. ZIANE, *Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics*, Handbook of Numerical Analysis special volume on Computational Methods for the Ocean and the Atmosphere, 577-750, 2009.

- [43] M. PETCU, R. TEMAM ET D. WIROSOETISNO, *Renormalization group method applied to the three dimensional primitive equations*, en preparation.
- [44] R. TEMAM, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, 2ed*, Springer, 1997.
- [45] R. SALMON, *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1998.
- [46] S. SCHOCHET, *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Differential Equations, 114 (1994), pp. 476–512.
- [47] W. WASHINGTON ET C. PARKINSON, *An introduction to three-dimensional climate modelling*, Oxford Univ. Press, 1986.
- [48] A. A. WHITE ET R. A. BROMLEY, *Dynamically consistent, quasi-hydrostatic equations for global models with a complete representation of the coriolis force*, Q. J. R. Meteorol. Soc., 121 (1995), pp. 399–418.
- [49] M. ZIANE, *On a certain renormalization group method*, J. Math. Phys., 41 (2000), pp. 3290–3299.

Chapitre 2

Modélisation des conditions aux limites pour les équations de Saint Venant dans un domaine borné

L'étude de l'évolution régionale de la météorologie et du climat conduit à l'introduction de modèles dans des régions limitées (LAM-Limited Area Models). En général les régions considérées n'ont pas de signification physique particulière et il n'y a donc pas de lois physiques naturelles permettant d'écrire des conditions aux limites sur la frontière du domaine de calcul. Les spécialistes pensent qu'à moyen terme, les méthodes employées actuellement ne seront plus valables lorsque les ordinateurs permettront d'utiliser des discrétisations nettement plus fines. Ce problème est largement ouvert dans le cas des équations primitives de l'océan et de l'atmosphère considérées au chapitre 1 ; voir [29] pour une explication détaillée de l'importance du problème pour la prévision du temps. Notons aussi que le problème a été résolu dans [25] dans le cas des équations primitives linéarisées, mais le cas non-linéaire reste largement ouvert, bien que les simulations numériques de [25] laissent penser que les conditions aux limites du cas linéaire sont encore valables dans le cas non-linéaire dans des conditions proches du linéaire.

Les articles décrits dans ce chapitre portent sur la modélisation des conditions aux limites pour des équations plus simples que les équations primitives, à savoir les équations de Saint-Venant (*Shallow Water equations* en anglais), *sans viscosité*. Les équations de Saint-Venant constituent en effet un modèle simplifié pour les équations primitives sans viscosité : dans le développement modal vertical introduit dans [20] et [27], il apparaît en fait une infinité de modes où chacun est sensiblement identique aux équations de Saint-Venant (lorsque les modes sont découplés).

Les équations que nous considérons sont les équations *sans viscosité*. Rappelons un point de terminologie pour justifier notre motivation. Il est d'usage, depuis déjà von

Neumann [8], de faire la différence entre la prévision du temps et celle du climat. La prévision du temps cherche à prévoir l'évolution par exemple du vent, des températures et de l'hydrométrie sur des périodes courtes de quelques jours à deux semaines. La prévision du climat cherche à prévoir l'évolution de tendances sur de longues périodes de quelques mois à des centaines ou milliers d'années. On considère que les effets de viscosité ne se font pas sentir pour les échelles de temps correspondant à la prévision du temps et il est donc d'usage d'utiliser dans ce contexte des équations sans viscosité.

Nous commençons par justifier par des simulations numériques l'importance du choix des conditions aux limites ; les résultats présentés ici sont issus de l'article [5]. La question principale que nous adressons dans cet article est le fait que les équations de Saint-Venant sont des équations hyperboliques qui génèrent des ondes qui se déplacent librement de l'intérieur vers l'extérieur du domaine et vice-versa. Nous nous sommes intéressés à trouver des conditions aux bords pour lesquelles le problème est bien-posé et qui n'introduisent pas des effets indésirables et des réflexions artificielles d'ondes à la frontière. Dans la littérature mathématique des conditions aux limites qui ne produisent pas des réflexions artificielles sont appelées des *conditions aux limites transparentes*. Nous avons concentré notre attention aux conditions aux limites transparentes dans le contexte des équations de Saint-Venant, qui est un modèle pour le mouvement de l'atmosphère et de l'océan, mais la question des conditions aux limites fictives apparaît et joue un rôle fondamental dans beaucoup d'autres domaines scientifiques, notamment en électromagnétisme. Pour plus de références nous renvoyons le lecteur intéressé à, e.g., [2], [3], [9], [10], [13], [18], [19].

Nous présentons à présent des simulations numériques faites sur les équations de Saint-Venant non-visqueuses bidimensionnelles dans un rectangle. Précisons tout d'abord que l'étude théorique du caractère bien-posé de ces équations dans un rectangle accompagnées des conditions aux limites que nous proposons, n'est pas disponible présentement car le rectangle est un domaine non-régulier. Nous allons présenter plus loin dans ce chapitre des résultats théoriques sur le caractère bien-posé des équations de Saint-Venant sur un intervalle, en considérant d'abord des conditions de type Dirichlet pour la vitesse et ensuite des conditions au bord transparentes. Ensuite, pour l'étude numérique, nous considérons comme condition initiale le soliton équatorial de Rossby, qui est un test classique dans la littérature et nous comparons les résultats obtenus en utilisant des conditions aux limites de type Dirichlet et des conditions aux limites transparentes. Du point de vue expérimental (numérique), nous allons remarquer que les simulations montrent des réflexions artificielles dans le premier cas. Par contre, pour le deuxième cas, l'onde solitaire équatoriale de Rossby sort du domaine sans réflexion, ce qui confirme que les conditions sont vraiment transparentes dans ce cas, contrairement aux conditions de type Dirichlet.

Les simulations numériques sont faites en utilisant la méthode des volumes finis avec un schéma saute-mouton.

Nous considérons les équations de Saint-Venant bidimensionnelles avec force de Coriolis, écrites sous la forme suivante :

$$(2.1a) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_2) \mathbf{u} + g \operatorname{grad}_2 h + f \vec{\kappa} \times \mathbf{u} = 0,$$

$$(2.1b) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}_2(h\mathbf{u}) = 0,$$

où h est la hauteur du fluide par rapport au fond du domaine (supposé plat ici), $\mathbf{u} = (u, v)$ est la vitesse bidimensionnelle du fluide, g est l'accélération gravitationnelle (dans notre cas, $g = 1$), f est le paramètre de Coriolis, égal à $f_0 + \bar{f}y$ avec $f_0 = 0$ et $\bar{f} = 1$. Les équations et les quantités sont adimensionnelles, considérées dans le domaine $\{\mathcal{M} = (-24, 24) \times (-8, 8)\} \times \{0 < t < T\}$, avec \mathcal{M} illustré dans la Figure 2.1

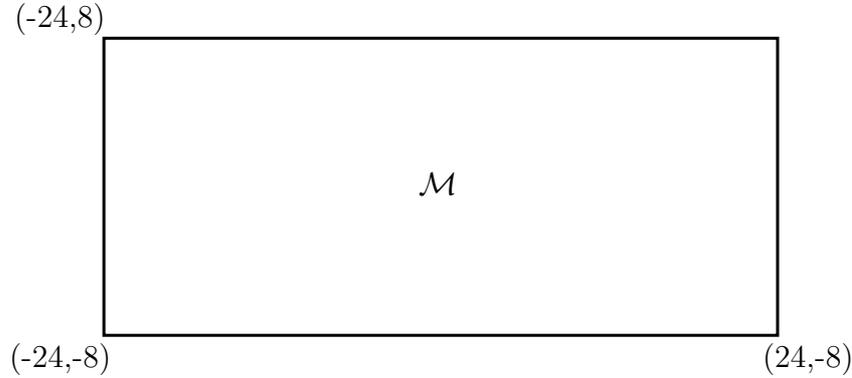


FIGURE 2.1 – Domaine \mathcal{M} pour le soliton de Rossby

Nous considérons la condition initiale suivante :

$$(2.2) \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = \phi(x) \frac{(-9 + 6y^2)}{4} e^{-y^2/2}, \\ v(x, y, 0) = 2y\phi'(x) e^{-y^2/2}, \\ h(x, y, 0) = \phi(x) \frac{(3 + 6y^2)}{4} e^{-y^2/2} + 1, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= A \operatorname{sech}^2 Bx, \\ \phi'(x) &= -2B \tanh(Bx) \phi, \end{aligned}$$

où

$$B = 0.395, \quad A = 0.7771B^2.$$

Nous nous plaçons dans le cas sous-critique (subsonique), c.a.d. le cas d'un régime pour lequel les valeurs de référence (moyennes) satisfont $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - gh < 0$ et les vitesses sont positives ; ici \mathbf{n} représente la normale extérieure à la frontière du domaine.

Les conditions aux limites de type Dirichlet s'écrivent :

$$(2.3) \quad \begin{cases} h_{\partial\mathcal{M}} = 1, \\ u_{\partial\mathcal{M}} = 0, \\ v_{\partial\mathcal{M}} = 0. \end{cases}$$

Les conditions aux limites transparentes sont de deux types différentes, des conditions sur les frontières Nord et Sud et des conditions sur les frontières Est et Ouest.

Nous écrivons, pour commencer, les équations (2.1) sous forme vectorielle :

$$(2.4) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} + B(U) \frac{\partial U}{\partial y} + C(U) = 0,$$

où $U = (u, v, h)$ et

$$(2.5) \quad A(U) = \begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ h & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B(U) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & h & v \end{pmatrix}, \quad C(U) = \begin{pmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les conditions sur les frontières Est et Ouest, nous cherchons les valeurs propres (appelées aussi les vitesses caractéristiques) pour la matrice $A(U)$ et les vecteurs propres correspondants. Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + \sqrt{gh},$$

et les vecteurs propres associés ont pour composantes :

$$(2.6) \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{g/h} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{g/h} \end{pmatrix}.$$

En faisant les combinaisons des équations (2.1) correspondant aux composantes des vecteurs propres X_1 , X_2 et X_3 , nous arrivons au système suivant :

$$(2.7a) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mp \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \lambda_{1,3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mp \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \dots = 0,$$

$$(2.7b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \dots = 0,$$

qui peut être réécrit sous la forme :

$$(2.8a) \quad \frac{\partial \alpha^{OE}}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \alpha^{OE}}{\partial x} + \dots = 0,$$

$$(2.8b) \quad \frac{\partial \beta^{OE}}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \beta^{OE}}{\partial x} + \dots = 0,$$

$$(2.8c) \quad \frac{\partial \gamma^{OE}}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \gamma^{OE}}{\partial x} + \dots = 0.$$

Les points du suspension correspondent aux termes nonderivés ou ceux associés à la dérivées $\partial/\partial y$. Ici α^{OE} , β^{OE} et γ^{OE} les variables caractéristiques données par :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \alpha^{OE} = \frac{u}{2} - \sqrt{gh}, \\ \beta^{OE} = v, \\ \gamma^{OE} = \frac{u}{2} + \sqrt{gh}. \end{cases}$$

En supposant le régime sous-critique, nous avons seulement besoin d'imposer la valeur de α^{OE} sur la frontière Est et les valeurs de β^{OE} , γ^{OE} sur la frontière Ouest. Nous proposons les conditions aux limites suivantes :

- Frontière Est :

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{OE} = \alpha_{\partial\mathcal{M}}^{OE}, \\ \frac{\partial\beta^{OE}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\gamma^{OE}}{\partial x} = 0, \end{array} \right.$$

- Frontière Ouest :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\alpha^{OE}}{\partial x} = 0, \\ \beta^{OE} = \beta_{\partial\mathcal{M}}^{OE}, \\ \gamma^{OE} = \gamma_{\partial\mathcal{M}}^{OE}, \end{array} \right.$$

avec $\alpha_{\partial\mathcal{M}}^{OE} = u_{\partial\mathcal{M}}/2 - \sqrt{gh_{\partial\mathcal{M}}}$, $\beta_{\partial\mathcal{M}}^{OE} = v_{\partial\mathcal{M}}$, $\gamma_{\partial\mathcal{M}}^{OE} = u_{\partial\mathcal{M}}/2 + \sqrt{gh_{\partial\mathcal{M}}}$ et $u_{\partial\mathcal{M}}$, $v_{\partial\mathcal{M}}$ et $h_{\partial\mathcal{M}}$ donnés par (2.3).

Pour les frontières Nord et Sud nous raisonnons de façon analogue pour la direction y en utilisant la matrice $B(U)$. Les valeurs propres de $B(U)$ sont :

$$\lambda_1 = v - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + \sqrt{gh},$$

et les vecteurs propres associés s'écrivent :

$$(2.12) \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{g/h} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{g/h} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, les variables caractéristiques sont :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{NS} = \frac{v}{2} - \sqrt{gh}, \\ \beta^{NS} = u, \\ \gamma^{NS} = \frac{v}{2} + \sqrt{gh}. \end{array} \right.$$

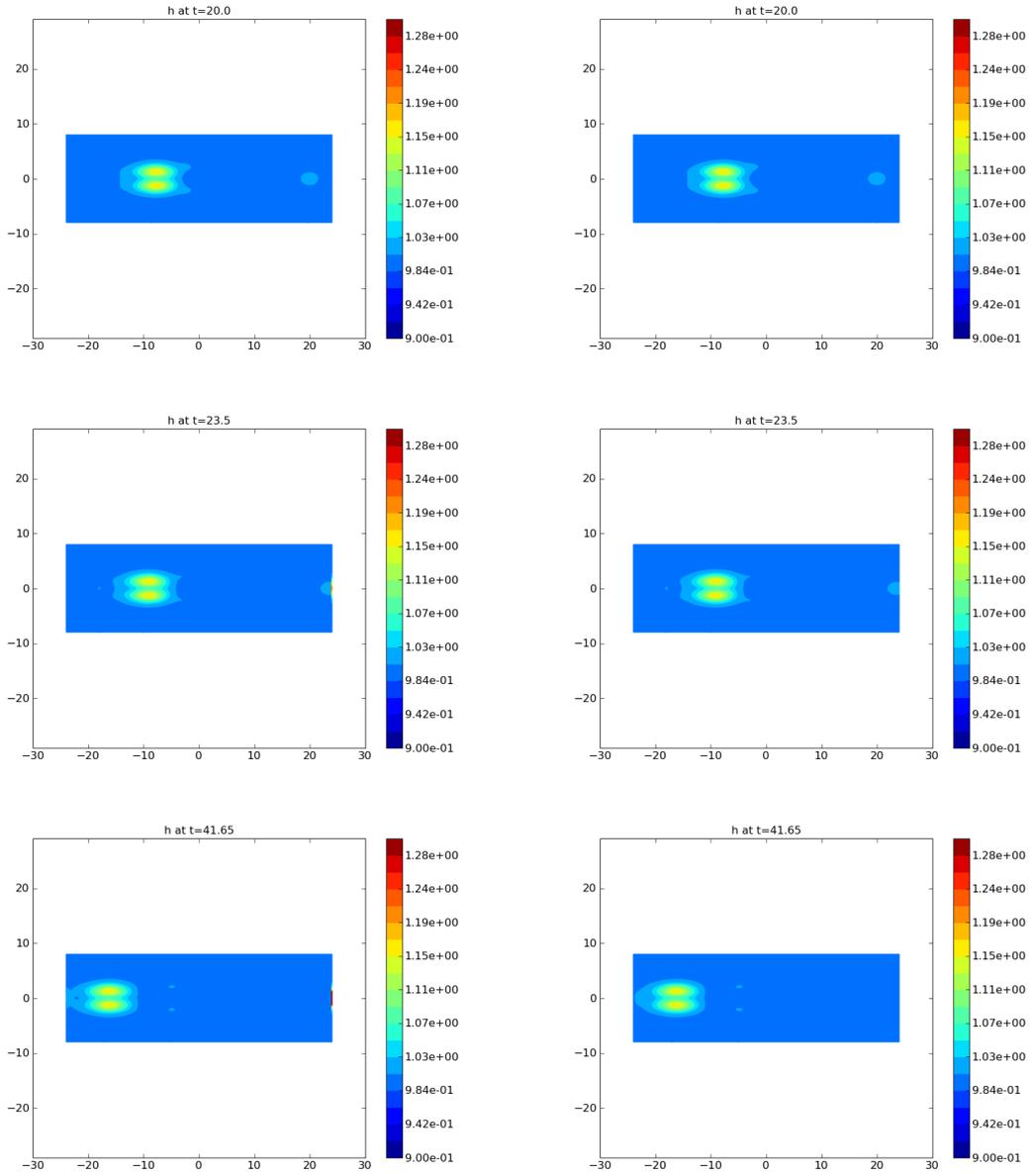
En supposant toujours le régime sous-critique (subsonique), nous avons seulement besoin d'imposer la valeur de α^{NS} sur la frontière Nord et les valeurs de β^{NS} , γ^{NS} sur la frontière Sud ; nous proposons les conditions suivantes :

- Frontière Nord :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{NS} = \alpha_{\partial\mathcal{M}}^{NS}, \\ \frac{\partial\beta^{NS}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial\gamma^{NS}}{\partial y} = 0, \end{array} \right.$$

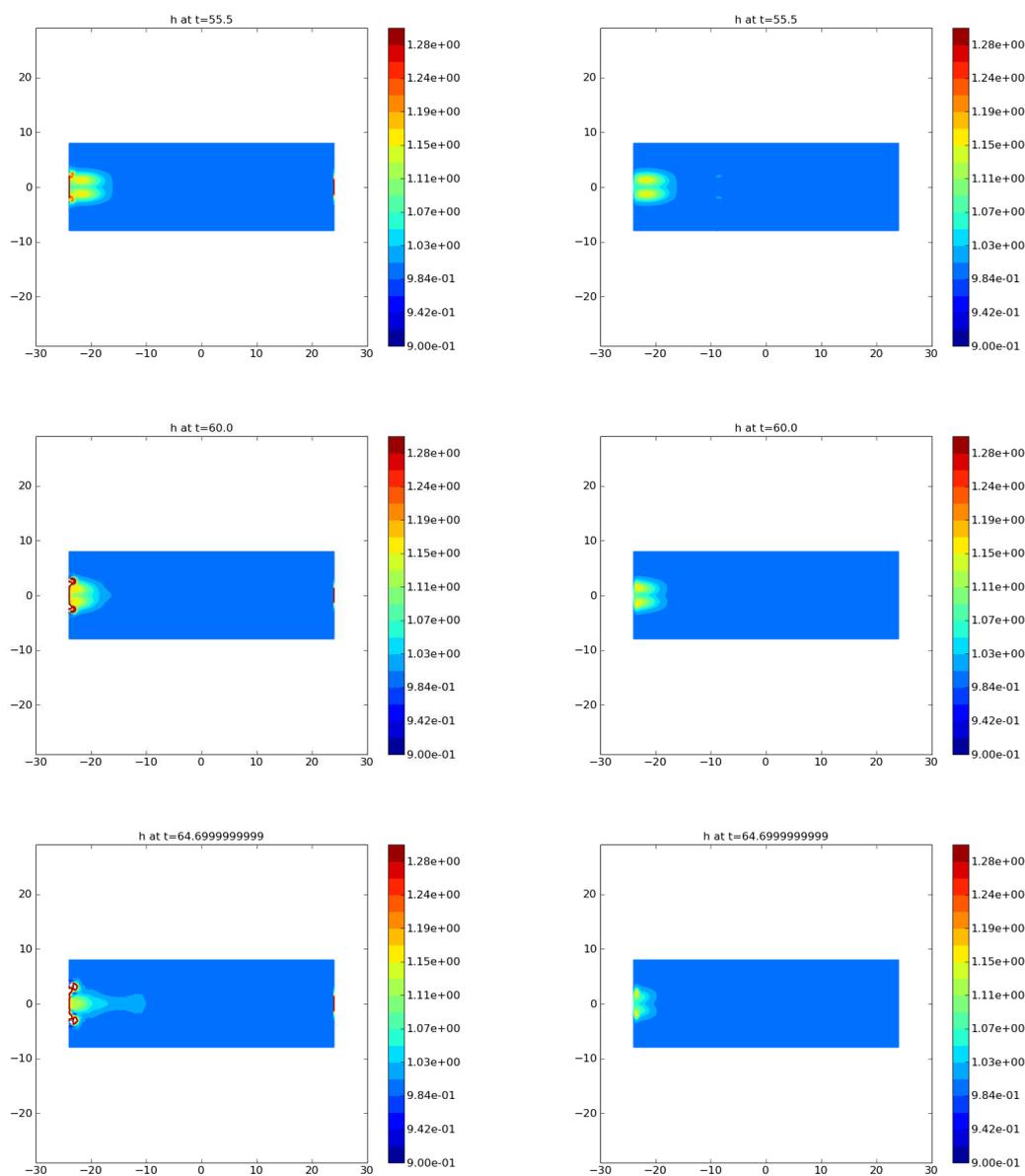
Conditions de Dirichlet

Conditions transparentes

FIGURE 2.2 – Evolution en temps du soliton , $t=(20, 23.5, 41.65)$

Conditions de Dirichlet

Conditions transparentes

FIGURE 2.3 – Evolution en temps du soliton, $t = (55.5, 60, 64.7)$

- Frontière Sud :

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha^{NS}}{\partial y} = 0, \\ \beta^{NS} = \beta_{\partial\mathcal{M}}^{NS}, \\ \gamma^{NS} = \gamma_{\partial\mathcal{M}}^{NS}, \end{cases}$$

avec $\alpha_{\partial\mathcal{M}}^{NS} = v_{\partial\mathcal{M}}/2 - \sqrt{gh_{\partial\mathcal{M}}}$, $\beta_{\partial\mathcal{M}}^{NS} = u_{\partial\mathcal{M}}$, $\gamma_{\partial\mathcal{M}}^{NS} = v_{\partial\mathcal{M}}/2 + \sqrt{gh_{\partial\mathcal{M}}}$ et $u_{\partial\mathcal{M}}$, $v_{\partial\mathcal{M}}$ et $h_{\partial\mathcal{M}}$ donnés par (2.3). Une fois les valeurs de α , β et γ connues sur la frontière ou dans une cellule fictive de calcul, nous pouvons récupérer facilement h , u et v par inversion des équations (2.9) ou (2.13).

Les résultats des simulations numériques se trouvent dans les Figures 2.2 et 2.3, la colonne de gauche correspondant aux conditions aux limites de type Dirichlet et la colonne de droite correspondant aux conditions aux limites transparentes. Comme escompté, le soliton a le même comportement dans le deux cas jusqu'au moment où il atteint la frontière, au temps $t = 41.65$. Une fois la frontière atteinte, le comportement diffère de manière fondamentale, des grandes valeurs de h apparaissant sur les frontières de gauche et de droite ($x = \pm 24$) dans le cas des conditions aux bords de type Dirichlet. Nous remarquons au temps $t = 64.69$ qu'une partie importante de l'onde est réfléchiée dans la colonne gauche, par contre dans la colonne droite le soliton quitte le domaine sans faire apparaître une quelconque réflexion. Après $t \simeq 65$, les simulations numériques pour le cas des conditions Dirichlet ne sont plus valides et elles nous donnent l'indication que la solution explose et que les équations de Saint-Venant ne sont pas bien-posées lorsqu'elles sont associées à des conditions aux limites de type Dirichlet. Par contre, dans la colonne droite le soliton continue de sortir du domaine jusqu'à sa disparition complète.

*Les équations de Saint-Venant en dimension un d'espace
avec des conditions de type Dirichlet sur la vitesse*

Après avoir justifié expérimentalement l'importance des conditions aux limites pour les équations de Saint-Venant non-visqueuses, nous nous intéressons à présent aux aspects théoriques (c'est-à-dire montrer le caractère bien-posé des problèmes aux limites), en considérant différentes conditions aux limites. Le premier résultat dans cette direction, obtenu dans [21], consiste à montrer le caractère bien-posé, localement en temps, pour les équations de Saint-Venant en dimension un d'espace, en imposant une condition au limite de type Dirichlet pour la vitesse. Du point de vue physique ce type des conditions aux bords (Dirichlet pour la vitesse et Neumann pour la pression/la hauteur) correspond à imaginer un domaine avec des murs latéraux. Nous notons ici que nous étudions le cas où la hauteur h reste toujours strictement positive, l'annulation de la hauteur introduisant de nouvelles difficultés mathématiques non abordées dans ces travaux (valeurs propres doubles ou triples).

Les équations de Saint-Venant non-visqueuses en dimension un d'espace, sur l'inter-

valle $0 < x < 1$, s'écrivent :

$$(2.16) \quad \begin{cases} u_t + uu_x + gh_x = 0, \\ \Phi_t + (uh)_x = 0, \end{cases}$$

où v est la vitesse, h la hauteur et le paramètre g représente l'accélération gravitationnelle.

Les conditions initiales s'écrivent :

$$(2.17) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad h(0, x) = h_0(x),$$

et les conditions aux limites sont :

$$(2.18) \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0.$$

Nous considérons le cas où la hauteur initiale h_0 est strictement positive ; plus exactement, nous supposons que $h_0(x) \geq \underline{h}_0 > 0$, $\forall x \in (0, 1)$. Nous notons ici qu'a priori il n'y a pas de condition initiale sur la hauteur, mais nous notons tout de même le fait que les conditions $h_x(t, 0) = h_x(t, 1) = 0$ (donc une condition de type Neumann sur la hauteur) sont impliquées par (3.56)-(3.58).

Dans [21] nous montrons que le problème (2.16)-(2.18) est localement bien-posé. Plus exactement, nous obtenons :

Théorème 2.1. *Soit (u_0, h_0) donnés dans $(H^2(0, 1))^2$ avec $h_0(x) \geq \underline{h}_0 > 0$, $\forall x \in (0, 1)$. Alors il existe un temps $T_* > 0$ qui dépend de $|u_0|_{H^2}$ et $|h_0|_{H^2}$ et une unique solution (u, h) du problème (2.16)-(2.18) sur $(0, T_*)$, tels que :*

$$(2.19) \quad (u, h) \in L^\infty(0, T_*, H^2(0, 1)^2).$$

De plus, $h(x, t) \geq \underline{h}_0/2$, $\forall t \in (0, T_*)$.

Pour démontrer ce résultat, nous avons construit une suite de solutions approchées et nous avons montré la convergence de cette suite vers la solution du problème (2.16)-(2.18). Nous commençons par définir $u^0(t, x) = u_0(x)$, $h^0(t, x) = h_0(x)$ et nous construisons de manière itérative u^{k+1} , h^{k+1} comme les solutions du problème linéaire suivant :

$$(2.20) \quad \begin{cases} u_t^{k+1} + u^k u_x^{k+1} + gh_x^{k+1} = 0, \\ h_t^{k+1} + h^k u_x^{k+1} + u^k h_x^{k+1} = 0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$(2.21) \quad u^{k+1}(t, 0) = u^{k+1}(t, 1) = 0,$$

et les conditions initiales :

$$(2.22) \quad u^{k+1}(0, x) = u_0(x), h^{k+1}(0, x) = h_0(x).$$

Nous supposons que $u^k, h^k \in L^\infty(0, T; H^2(0, 1))$, $u_t^k, h_t^k \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$ et $h^k(t, x) \geq \underline{h}_0$ et nous montrons que u^{k+1}, h^{k+1} jouissent des mêmes propriétés.

Tout d'abord nous obtenons des estimations a priori pour u^{k+1} , h^{k+1} dans $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$. Pour cela, nous multiplions (2.20)₁ par $u^{k+1}h^k$ et (2.20)₂ par $g\Phi^{k+1}$, nous ajoutons les équations obtenues et intégrons sur \mathcal{M} . Après calcul, nous trouvons l'inégalité d'énergie suivante :

$$(2.23) \quad \frac{d}{dt} I_0^{k+1}(t) \leq c_0 \eta^k(t) I_0^{k+1}(t),$$

où I_0^{k+1} est la fonction suivante :

$$(2.24) \quad I_0^{k+1}(t) = \int_0^1 \Phi^k(u^{k+1})^2 dx + \int_0^1 g(\Phi^{k+1})^2 dx,$$

et η^k est donné par :

$$(2.25) \quad \eta^k(t) = |u^k|_{H^2(0,1)} + |\Phi^k|_{H^2(0,1)} + |u^k|_{H^2(0,1)} |\Phi^k|_{H^2(0,1)} + |\Phi_t^k|_{H^1(0,1)}.$$

En utilisant l'hypothèse faite sur u^k et h^k , nous pouvons appliquer l'inégalité de Gronwall et nous obtenons :

$$(2.26) \quad I_0^{k+1}(t) \leq I_0^{k+1}(0) \exp\left(c_0 \int_0^t \eta^k(z) dz\right).$$

Ensuite, nous obtenons des estimations a priori pour u^{k+1} , h^{k+1} dans $L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$. Nous dérivons l'équation (2.20) par rapport à x et nous obtenons :

$$(2.27) \quad \begin{cases} u_{tx}^{k+1} + u_x^k u_x^{k+1} + u^k u_{xx}^{k+1} + g h_{xx}^{k+1} = 0, \\ h_{tx}^{k+1} + h_x^k u_x^{k+1} + h^k u_{xx}^{k+1} + u_x^k h_x^{k+1} + u^k h_{xx}^{k+1} = 0. \end{cases}$$

En multipliant (2.27)₁ par $h^k u_x^{k+1}$ et (2.27)₂ par $g h_x^{k+1}$, rajoutant les équations obtenues et intégrant le résultat sur \mathcal{M} , nous trouvons, après calcul, l'inégalité d'énergie suivante :

$$(2.28) \quad \frac{d}{dt} I_1^{k+1}(t) \leq c_1 \eta^k(t) I_1^{k+1}(t).$$

où η^k est comme ci-dessus et

$$(2.29) \quad I_1^{k+1}(t) = \int_0^1 \Phi^k(u_x^{k+1})^2 dx + \int_0^1 g(\Phi_x^{k+1})^2 dx.$$

Les hypothèses sur u^k et h^k nous permettent d'appliquer l'inégalité de Gronwall à (2.28) et nous obtenons :

$$(2.30) \quad I_1^{k+1}(t) \leq I_1^{k+1}(0) \exp\left(c_1 \int_0^t \eta^k(z) dz\right).$$

De la même manière, nous obtenons des estimations a priori pour u^{k+1} et h^{k+1} dans $L^\infty(0, T; H^2(0, 1))$. Nous arrivons à l'estimation d'énergie suivante :

$$(2.31) \quad \frac{d}{dt} I_2^{k+1}(t) \leq c_2 \eta^k(t) I_2^{k+1}(t) + c_2 \eta^k(t) I_1^{k+1}(t),$$

avec η^k donné par (2.25) et

$$(2.32) \quad I_2^{k+1}(t) = \int_0^1 \Phi^k (u_{xx}^{k+1})^2 dx + g \int_0^1 (\Phi_{xx}^{k+1})^2 dx.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall à (2.31), nous trouvons :

$$(2.33) \quad \begin{aligned} I_2^{k+1}(t) &\leq I_2^{k+1}(0) \exp \left(c_2 \int_0^t \eta^k(z) dz \right) \\ &+ \int_0^t c_2 \eta^k(z) I_1^{k+1}(z) \exp \left(-c_2 \int_t^z \eta^k(s) dz \right) dz, \end{aligned}$$

et, utilisant (2.30), l'inégalité (2.33) devient :

$$(2.34) \quad I_2^{k+1}(t) \leq \left(I_2^{k+1}(0) + c_3 I_1^{k+1}(0) \int_0^t c_3 \eta^k(z) dz \right) \exp \left(c_4 \int_0^t \eta^k(z) dz \right).$$

Nous avons aussi besoin des estimations analogues pour u_t^{k+1} et h_t^{k+1} . Pour estimer u_t^{k+1} et h_t^{k+1} dans $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ nous utilisons directement l'équation (2.20). Nous arrivons à montrer que :

$$(2.35) \quad |u_t^{k+1}|_{L^2(0,1)}^2 \leq c_5 \left(|u^k|_{H^2(0,1)}^2 + 1 \right) I_1^{k+1}(0) \exp \left(c_1 \int_0^t \eta^k(z) dz \right),$$

et

$$(2.36) \quad |h_t^{k+1}|_{L^2(0,1)}^2 \leq c_5 \left(|u^k|_{H^2(0,1)}^2 + |h^k|_{H^2(0,1)}^2 \right) I_1^{k+1}(0) \exp \left(c_1 \int_0^t \eta^k(z) dz \right).$$

Finalement pour pouvoir estimer u_t^{k+1} et h_t^{k+1} dans $L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$, nous avons besoin d'estimer les normes de u_{tx}^{k+1} et h_{tx}^{k+1} dans $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$. En utilisant les équations (2.27), nous obtenons :

$$(2.37) \quad \begin{aligned} |u_{tx}^{k+1}|_{L^2(0,1)}^2 &\leq c_6 |u^k|_{H^2(0,1)}^2 I_1^{k+1}(0) \exp \left(\int_0^t c_1 \eta^k(z) dz \right) \\ &+ c_6 I_2^{k+1}(0) \exp \left(\int_0^t c_2 \eta^k(z) dz \right), \end{aligned}$$

et

$$(2.38) \quad \begin{aligned} |h_{tx}^{k+1}|_{L^2(0,1)}^2 &\leq c_6 \left\{ |u^k|_{H^2(0,1)}^2 + |h^k|_{H^2(0,1)}^2 \right\} \left\{ I_1^{k+1}(0) \exp \left(\int_0^t c_1 \eta^k(z) dz \right) + \right. \\ &\left. + I_2^{k+1}(0) \exp \left(\int_0^t c_2 \eta^k(z) dz \right) \right\}. \end{aligned}$$

Nous montrons ensuite par récurrence l'existence de bornes uniformes pour u^{k+1} et h^{k+1} . Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux constantes telles que :

$$(2.39) \quad c_\infty |u_0|_{H^2(0,1)}^2 |h_0|_{H^2(0,1)} = \frac{\mathcal{A}}{12} \text{ et } |h_0|_{H^2(0,1)}^2 = \frac{\mathcal{B}}{12},$$

où c_∞ est tel que $|u|_{L^\infty(0,1)} \leq c_\infty |u|_{H^1(0,1)}$ pour tout $u \in H^1(0,1)$. Nous montrons par récurrence que, pour un temps $T = T_*$ suffisamment petit, qui ne dépend que de \mathcal{A} et \mathcal{B} , nous avons :

$$(2.40) \quad \underline{h}_0 |u^{k+1}|_{L^\infty(0,T_*;H^2(0,1))}^2 + g |h^{k+1}|_{L^\infty(0,T_*;H^2(0,1))}^2 \leq \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

et

$$(2.41) \quad \begin{aligned} |u_t^{k+1}|_{L^\infty(0,T_*;H^1(0,1))}^2 &\leq (c_5 + c_6) \left(1 + \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{\underline{h}_0}\right) \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{2}, \\ |h_t^{k+1}|_{L^\infty(0,T_*;H^1(0,1))}^2 &\leq (c_5 + c_6) \left(1 + \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{\underline{h}_0}\right) \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{2}. \end{aligned}$$

En choisissant T_* suffisamment petit (avec T_* qui ne dépend que de \mathcal{A} et \mathcal{B}), nous montrons aussi que :

$$h^{k+1}(t, x) \geq \underline{h}_0, \quad \forall t \in [0, T_*], \forall x \in \mathcal{M}.$$

Nous avons donc montré que l'hypothèse de récurrence persiste sur toute la suite des solutions approchées (u^k, h^k) . Nous voulons ensuite démontrer la convergence forte de la suite des solutions approchées (u^k, h^k) ; pour cela nous montrons que la suite (u^k, h^k) est Cauchy.

Nous écrivons

$$w^{k+1} = u^{k+1} - u^k, \quad \Phi^{k+1} = h^{k+1} - h^k,$$

où w^{k+1}, Φ^{k+1} satisfont :

$$(2.42) \quad \begin{cases} w_t^{k+1} + u^k w_x^{k+1} + w^k u_x^k + g \Phi_x^{k+1} = 0, \\ \Phi_t^{k+1} + u^k \Phi_x^{k+1} + w^k h_x^k + h^k w_x^{k+1} + u_x^k \Phi^k = 0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$(2.43) \quad w^{k+1}(0, x) = 0, \quad \Phi^{k+1}(0, x) = 0,$$

et les conditions aux limites :

$$(2.44) \quad w^{k+1}(t, 0) = w^{k+1}(t, 1) = 0.$$

De manière classique, nous obtenons des estimations a priori sur w^{k+1}, Φ^{k+1} dans $L^\infty(0, T_*, H^1(0, 1))$. Nous notons :

$$M_0^{k+1}(t) = \int_0^1 h^k (w^{k+1})^2 dx + g \int_0^1 (\Phi^{k+1})^2 dx,$$

et en utilisant l'inégalité de Gronwall et le fait que $M^{k+1}(0) = 0$, nous trouvons :

$$(2.45) \quad \begin{aligned} M_0^{k+1}(t) &\leq c_1 \int_0^t \eta^k(z) M^k(z) dz \exp\left(\int_0^t c_2 \eta^k(z) dz\right) \\ &\leq c_1 K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \exp(c_2 K(\mathcal{A}, \mathcal{B})t) \int_0^t M_0^k(z) dz. \end{aligned}$$

En choisissant T_* suffisamment petit pour avoir $c_1 T_* K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \exp(c_2 K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) T_*) \leq \frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$(2.46) \quad \underline{h}_0 |w^{k+1}|_{L^2(0,1)}^2 + g |\Phi^{k+1}|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{c_3}{2^{k+1}}, \quad \forall t \in [0, T_*], \quad \forall k.$$

De la même manière, nous obtenons des estimations à priori sur :

$$M_1^{k+1}(t) = \int_0^1 \Phi^k (w_x^{k+1})^2 dx + g \int_0^1 (h_x^{k+1})^2 dx.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous trouvons :

$$(2.47) \quad \begin{aligned} M_1^{k+1}(t) + M_0^{k+1}(t) &\leq c_{12} \int_0^t \eta^k(\tau) (M_1^k(\tau) + M_0^k(\tau)) d\tau \exp\left(\int_0^t c_4 \eta^k(\tau) d\tau\right) \\ &\leq c_4 K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \exp(c_{11} K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) T_*) \int_0^t (M_1^k(\tau) + M_0^k(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$(2.48) \quad M_1^{k+1}(t) + M_0^{k+1}(t) \leq c_4 K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \exp(c_4 K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) T_*) T_* \sup_{0 < t < T_*} (M_1^k(t) + M_0^k(t)).$$

En réduisant encore T_* pour que $c_4 T_* K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \exp(c_{11} K(\mathcal{A}, \mathcal{B}) T_*) < 1/2$, nous trouvons que pour tous k :

$$(2.49) \quad M_1^{k+1}(t) + M_0^{k+1}(t) \leq \frac{1}{2} \sup_{0 < t < T_*} (M_1^k(t) + M_0^k(t)),$$

et donc :

$$(2.50) \quad \underline{h}_0 |w^{k+1}|_{H^1(0,1)}^2 + g |\Phi^{k+1}|_{H^1(0,1)}^2 \leq M_1^{k+1}(t) + M_0^{k+1}(t) \leq \frac{c}{2^{k+1}}, \quad \forall t \in [0, T_*].$$

La relation (2.50) implique que $(u^k)_k$ et $(h^k)_k$ sont des suites de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, T_*], H^1(0, 1))$, donc $(u^k)_k$ et $(h^k)_k$ convergent dans $\mathcal{C}([0, T_*], H^1(0, 1))$, quand $k \rightarrow \infty$, vers la solution (u, h) du problème de Saint-Venant (2.16). L'existence des solutions suit. L'unicité de la solution est classique et immédiate ce qui conclut la démonstration du théorème (2.1).

*Les équations de Saint-Venant en dimension un d'espace
avec des conditions aux bords transparentes*

Comme mentionné au début du chapitre, les conditions aux bords transparentes sont très intéressantes du point de vue physique et de la simulation numérique. Dans [22] nous proposons des conditions aux limites pour lesquelles les équations sont bien-posées et les simulations numériques présentées dans [5] et rappelées au début du chapitre (voir les Figures (2.2) et (2.3)), confirment que les conditions proposées sont transparentes dans les cas considérés.

Les techniques employées dans [22] suivent la théorie générale sur les conditions aux bords de type UKL (en anglais *uniform Kreiss-Lopatinsky conditions*) et nous renvoyons

le lecteur intéressé à [4] pour plus de détails, ainsi qu'aux nombreuses références qui y sont citées. Pour une approche physique sur les conditions aux bords transparentes pour les équations de Saint-Venant, nous renvoyons le lecteur intéressé à [28] par exemple. Le caractère bien-posé des équations de Saint-Venant non-visqueuses est une question importante. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [15], [14] et [16] où le fluide est considéré dans tout l'espace et à [24] où les auteurs considèrent les équations dans un domaine périodique de dimension un. Le cas caractéristique est traité dans [17] et [11].

Nous considérons ici à présent le cas des équations de Saint-Venant sur un intervalle en dimension un d'espace et avec la hauteur étant toujours strictement positive. Dans [22] nous considérons les équations de Saint-Venant en dimension un d'espace dans l'intervalle $0 < x < L$:

$$(2.51) \quad \begin{cases} u_t + uu_x + gh_x = 0, \\ h_t + (hu)_x = 0, \end{cases}$$

où u est la vitesse, h la hauteur et g l'accélération gravitationnelle.

Nous considérons (U, H) une solution constante stationnaire qui est sous-critique (subsonique), donc pour laquelle $U^2 - gH < 0$. Plus exactement, nous supposons $U^2 - gH \leq -c_0^2$ et $2\underline{h}_0 \leq H \leq 2\bar{h}_0$, où c_0, \underline{h}_0 et \bar{h}_0 sont des constantes positives, données.

Les conditions initiales sont :

$$(2.52) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad h(0, x) = h_0(x),$$

où u_0 et h_0 satisfont les relations suivantes :

$$(2.53) \quad u_0^2(x) - gh_0(x) \leq -c_0^2, \quad \forall x \in (0, L),$$

$$(2.54) \quad 2\underline{h}_0 \leq h_0(x) \leq 2\bar{h}_0, \quad \forall x \in (0, L).$$

Pour trouver les conditions aux limites, nous procédons de la manière suivante : le système (2.51) peut s'écrire de manière équivalente sous la forme vectorielle :

$$(2.55) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

avec $U = (u, h)$ et $A(U) = \begin{pmatrix} u & g \\ h & u \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de la matrice $A(U)$ sont $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$. Pour diagonaliser $A(U)$, nous faisons les combinaisons $(1, \pm\sqrt{g/h})$ des équations (2.51) et nous obtenons :

$$(2.56) \quad (u_t \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_t) + \lambda_{\pm} (u_x \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_x) = 0.$$

Les équations (2.56) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\xi_t^{\pm} + \lambda_{\pm} \xi_x^{\pm} = 0,$$

où ξ^\pm sont les inconnues caractéristiques $u \pm \sqrt{2gh}$. Comme $\lambda_- < 0$ et $\lambda_+ > 0$, nous allons imposer une condition sur la vitesse caractéristique $u - \sqrt{2gh}$ à $x = L$ et une condition sur la vitesse caractéristique $u + \sqrt{2gh}$ à $x = 0$. Les conditions aux bords que nous proposons sont :

$$(2.57) \quad \begin{cases} u + 2\sqrt{gh} = U + 2\sqrt{gH} + g_0(t) \text{ at } x = 0, \\ u - 2\sqrt{gh} = U - 2\sqrt{gH} + g_L(t) \text{ at } x = L, \end{cases}$$

où $g_0(t)$ et $g_L(t)$ sont des fonctions données, vérifiant certaines conditions précisées ci-dessous.

Pour pouvoir démontrer le caractère bien-posé du problème, nous avons besoin de certaines conditions techniques. D'abord, nous demandons que (U, H) soit solution du problème (2.51) avec la condition aux limites (2.57) à $t = 0$ et avec (U, H) comme condition initiale. Cela implique que :

$$(2.58) \quad g_0(0) = 0, g_L(0) = 0.$$

Ensuite, nous imposons des conditions de compatibilité entre les données à la frontière et les données initiales, exigées par le niveau de régularité désiré des solutions. Nous posons

$$(2.59) \quad b_0(u, h) = u + 2\sqrt{gh}, \quad b_L(u, h) = u - 2\sqrt{gh},$$

pour que la solution construite soit \mathcal{C}^p jusqu'à la frontière et, pour $p = 2$, les conditions suivantes doivent être vérifiées. Pour $p = 0$, la condition de compatibilité est :

$$(2.60) \quad b_0(u_0, h_0) = b_0(U, H) \text{ à } x = 0, \quad b_L(u_0, h_0) = b_L(U, H) \text{ à } x = L;$$

pour $p = 1$ nous avons besoin de

$$(2.61) \quad \begin{aligned} g'_0(0) &= db_0(u_0, h_0) \cdot (\partial_t u(x, 0), \partial_t h(x, 0)) \\ &= db_0(u_0, h_0) \cdot (-u_0 u_{0,x} - gh_{0,x}, -(h_0 u_0)_x) \text{ à } x = 0, \\ g'_L(0) &= db_L(u_0, h_0) \cdot (\partial_t u(x, 0), \partial_t h(x, 0)) \\ &= db_L(u_0, h_0) \cdot (-u_0 u_{0,x} - gh_{0,x}, -(h_0 u_0)_x) \text{ à } x = L, \end{aligned}$$

et similairement pour $p = 2$. Dans ce travail nous recherchons des solutions \mathcal{C}^2 du problème.

Nous montrons le résultat suivant (voir [22]) :

Théorème 2.2. *Soient u_0 et h_0 donnés dans $H^{7/2}(0, L)$ satisfaisant (2.53) et (2.54) et g_0, g_L donnés dans $H^{7/2}(0, T)$ satisfaisant les conditions de compatibilité (2.60), (2.61) et la condition analogue pour $p = 2$. Alors il existe un temps $T_* > 0$ dépendant des données au bord et initiales et une solution unique (u, h) pour le problème (2.51), (2.52), (2.57) sur $(0, T_*)$, tels que :*

$$(u, h) \in (H^3((0, L) \times (0, T_*)))^2$$

et

$$(u|_{x=0}, h|_{x=0}), (u|_{x=L}, h|_{x=L}) \in (H^3(0, T_*))^2.$$

Nous rappelons ici les étapes principales de la démonstration. D'abord nous donnons une formulation équivalente pour le problème initial. Le problème (2.51), (2.52), (2.57) est équivalent au système :

$$(2.62) \quad \begin{cases} \tilde{u}_t + (\tilde{u} + U)\tilde{u}_x + g\tilde{h}_x = 0, \\ \tilde{h}_t + (\tilde{u} + U)\tilde{h}_x + (\tilde{h} + H)\tilde{u}_x = 0, \end{cases}$$

où \tilde{u} et \tilde{h} sont des perturbations par rapport au profil (U, H) . Nous posons $u = \tilde{u} + U$ et $h = \tilde{h} + H$ dans (2.51), (2.52), (2.57) et nous travaillons avec (\tilde{u}, \tilde{h}) . Le nouveau système (2.62) a l'inconvénient d'avoir les données initiales non nulles ; pour revenir à des données initiales nulles, nous allons construire une fonction de relèvement (u_a, h_a) pour la condition initiale $(\tilde{u}_0, \tilde{h}_0)$, telle que $u_a(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$, $h_a(x, 0) = \tilde{h}_0(x)$. Nous construisons les fonctions u_a et h_a telles que :

$$(2.63) \quad \begin{aligned} |u_a(x, t) - \tilde{u}_0(x)| &\leq \delta, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ |h_a(x, t) - \tilde{h}_0(x)| &\leq \delta, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \end{aligned}$$

pour un $\delta > 0$ suffisamment petit, choisi tel que si

$$(2.64) \quad |\bar{u}(x, t)| \leq \delta, \quad |\bar{h}(x, t)| \leq \delta, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T),$$

alors (comparer à (2.53), (2.54)) :

$$(2.65) \quad (u_a + \bar{u} + U)^2 - g(h_a + \bar{h} + H) \leq -\frac{1}{2}c_0^2 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T),$$

et

$$(2.66) \quad \underline{h}_0 \leq h_a(x, t) + \bar{h}(x, t) + H \leq 3\bar{h}_0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T).$$

Les équations de Saint-Venant sont alors équivalentes au problème suivant :

$$(2.67) \quad \begin{cases} (u_a + \bar{u})_t + (u_a + U + \bar{u})(u_a + \bar{u})_x + g(h_a + \bar{h})_x = 0, \\ (h_a + \bar{h})_t + (u_a + U + \bar{u})(h_a + \bar{h})_x + (H + h_a + \bar{h})(U_a + \bar{u})_x = 0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$(2.68) \quad \bar{u}(0, x) = 0, \quad \bar{h}(0, x) = 0,$$

et les conditions aux limites :

$$(2.69) \quad \begin{cases} u_a + \bar{u} + 2\sqrt{g(h_a + \bar{h} + H)} = 2\sqrt{gH} + g_0(t), \quad \text{à } x = 0, \\ u_a + \bar{u} - 2\sqrt{g(h_a + \bar{h} + H)} = -2\sqrt{gH} + g_L(t), \quad \text{à } x = L. \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, nous écrivons désormais (u, h) à la place de (\bar{u}, \bar{h}) .

L'existence des fonctions de relèvements (u_a, h_a) est assurée par un résultat technique (voir [4], Lemme 11.2 pour plus de détails).

Pour résoudre le nouveau problème (2.67), (2.68), (2.69), équivalent au problème initial, nous construisons de manière récursive une suite de solutions approchées (u^k, h^k) . Nous commençons par définir $u^0(t, x) = u_0(x)$, $h^0(t, x) = h_0(x)$ et nous construisons u^{k+1}, h^{k+1} comme la solution du problème linéaire suivant :

$$(2.70) \quad \begin{cases} u_t^{k+1} + (u_a + u^k + U)u_x^{k+1} + gh_x^{k+1} = \mathcal{F}_1(u^k, h^k), \\ h_t^{k+1} + (u_a + u^k + U)h_x^{k+1} + (h_a + h^k + H)u_x^{k+1} = \mathcal{F}_2(u^k, h^k), \end{cases}$$

avec $\mathcal{F}_1(u, h)$ et $\mathcal{F}_2(u, h)$ données par :

$$(2.71) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1(u, h) &= -(u_a + u + U)u_{a,x} - gh_{a,x} - u_{a,t}, \\ \mathcal{F}_2(u, h) &= -(u_a + u + U)u_{a,x} - (h_a + h + H)h_{a,x} - h_{a,t}. \end{aligned}$$

Les conditions initiales pour (2.70) sont :

$$(2.72) \quad u_{|t<0}^{k+1} = 0, h_{|t<0}^{k+1} = 0$$

et les conditions aux limites s'écrivent :

$$(2.73) \quad \begin{cases} u^{k+1} + \sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}}h^{k+1} = \mathcal{G}_0(u^k, h^k) \text{ at } x = 0, \\ u^{k+1} - \sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}}h^{k+1} = \mathcal{G}_L(u^k, h^k) \text{ at } x = L, \end{cases}$$

où $\mathcal{G}_0(u, h)$ et $\mathcal{G}_L(u, h)$ sont définies par :

$$(2.74) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}_0(u, h) &= -u_a + \sqrt{\frac{g}{h_a + h + H}}h - 2\sqrt{g(h_a + h + H)} + 2\sqrt{gH} + g_0, \\ \mathcal{G}_L(u, h) &= -u_a - \sqrt{\frac{g}{h_a + h + H}}h + 2\sqrt{g(h_a + h + H)} - 2\sqrt{gH} + g_L. \end{aligned}$$

Pour pouvoir étudier le problème linéaire (2.70), (2.72), (2.73), il nous faut connaître les propriétés des fonctions $\mathcal{F}_1(u, h)$, $\mathcal{F}_2(u, h)$, $\mathcal{G}_0(u, h)$, $\mathcal{G}_L(u, h)$. Pour cela, nous utilisons un résultat de [4] qui nous donne :

Lemme 2.1. *Soit $T_0 > 0$ fixé. Pour tout $T \in (0, T_0]$ et tous $(u, h) \in H^3(\mathcal{M}_T)$ de norme plus petite que δ/ν_3 , ayant une trace à $x = 0$ et à $x = L$ appartenant à $H^3(-\infty, T)$ et tels que $(u, h)|_{t<0} = 0$, alors :*

$$(2.75) \quad \partial_t^p \mathcal{F}_1(u, h)|_{t=0} = 0, \partial_t^p \mathcal{F}_2(u, h)|_{t=0} = 0, \partial_t^p \mathcal{G}_0(u, h)|_{t=0} = 0, \partial_t^p \mathcal{G}_L(u, h)|_{t=0} = 0,$$

pour $p = 0, 1, 2$. Ici δ est choisi comme dans (2.63), (2.64), et ν_3 est la norme de l'injection $H^3((0, L) \times \mathbf{R})$ dans $L^\infty((0, L) \times \mathbf{R})$ et $\mathcal{M}_T = (0, L) \times (-\infty, T)$.

De plus, pour tout $M \in (0, \delta/\nu_3)$ il existe $C_1 = C_1(M)$ et $C_2 = C_2(M)$ tels que pour tout $T \in (0, T_0]$, la relation $\|(u, h)\|_{H^3(\mathcal{M}_T)} \leq M$ implique :

$$(2.76) \quad \|\mathcal{F}_1(u, h)\|_{H^3(\mathcal{M}_T)} \leq C_1(M), \quad \|\mathcal{F}_2(u, h)\|_{H^3(\mathcal{M}_T)} \leq C_1(M),$$

$$(2.77) \quad \|\mathcal{G}_0(u, h)\|_{H^3(-\infty, T)} \leq TC_2(M) + \varepsilon(T), \quad \|\mathcal{G}_L(u, h)\|_{H^3(-\infty, T)} \leq TC_2(M) + \varepsilon(T),$$

où $\varepsilon(T) > 0$ est une constante indépendante de M et qui tend vers zéro quand T tend vers zéro.

Nous pouvons à présent commencer à étudier le problème linéaire (2.67), (2.68), (2.69). Ce problème peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$(2.78) \quad \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ h^{k+1} \end{pmatrix}_t + A(u^k, h^k) \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ h^{k+1} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(u^k, h^k) \\ \mathcal{F}_2(u^k, h^k) \end{pmatrix},$$

et (2.78) est associé à la condition initiale $(u^{k+1}, h^{k+1})|_{t < 0} = (0, 0)$ et aux conditions aux limites

$$(2.79) \quad \mathcal{B}(u^k, h^k)(u^{k+1}, h^{k+1}) = (\mathcal{G}_0(u^k, h^k), \mathcal{G}_L(u^k, h^k)),$$

où

$$(2.80) \quad \mathcal{B}(u^k, h^k)(w_1, w_2) = \begin{cases} w_1 + \sqrt{\frac{g}{h^k + h_a + H}} w_2 \text{ à } x = 0, \\ w_1 - \sqrt{\frac{g}{h^k + h_a + H}} w_2 \text{ à } x = L. \end{cases}$$

Le problème (2.67), (2.68), (2.69) jouit de deux propriétés essentielles pour la suite qui sont décrites dans les remarques 2.1 et 2.2 :

Remarque 2.1. L'opérateur $A(u^k, h^k)$, défini sur $[0, L] \times (-\infty, T]$ est symétrisable au sens de Friedrichs avec

$$(2.81) \quad S_0(u^k, h^k) = \begin{pmatrix} h_a + h^k + H & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

comme symétriseur de Friedrichs.

Remarque 2.2. Les conditions aux limites (2.79) sont strictement dissipatives, c'est à dire qu'il existe $\alpha_0 > 0$ et $\beta_0 > 0$ tels que :

$$(2.82) \quad (S_0(u^k, h^k)A(u^k, h^k)w, w) \geq \alpha_0 \|w\|^2 - \beta_0 \|\mathcal{B}(u^k, h^k)w\|^2 \quad \forall w \in \mathbb{R}^2 \text{ à } x = L,$$

et

$$(2.83) \quad (S_0(u^k, h^k)A(u^k, h^k)w, w) \leq -\alpha_0 \|w\|^2 + \beta_0 \|\mathcal{B}(u^k, h^k)w\|^2 \quad \forall w \in \mathbb{R}^2 \text{ à } x = 0;$$

ici $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbf{R}^2 .

Démonstration. L'existence de la suite étant acquise de manière classique par des techniques typiques aux systèmes hyperboliques linéaires, pour la convergence de la suite des solutions approchées vers la solution du problème initial, nous supposons par induction que $(u^k, h^k) \in H^3(\mathcal{M}_T)$ et que

$$(2.84) \quad \begin{aligned} & (u^k, h^k)|_{x=0}, (u^k, h^k)|_{x=L} \in H^3(-\infty, T) \text{ avec :} \\ & |(u^k, h^k)|_{H^3(\mathcal{M}_T)} \leq M, |(u^k, h^k)|_{x=0}|_{H^3(-\infty, T)} \leq M, |(u^k, h^k)|_{x=L}|_{H^3(-\infty, T)} \leq M, \end{aligned}$$

pour un M plus petit que δ/ν_3 et nous cherchons à démontrer les mêmes propriétés pour (u^{k+1}, h^{k+1}) .

Avant d'obtenir des estimations à priori sur (u^{k+1}, h^{k+1}) , nous introduisons l'espace de Sobolev avec poids $\mathcal{H}_\gamma^m(\mathcal{M}_T)$, correspondant à :

$$(2.85) \quad \|u\|_{\mathcal{H}_\gamma^m(\mathcal{M}_T)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \gamma^{2(m-|\alpha|)} \|e^{-\gamma t} \partial^\alpha u\|_{L^2(\mathcal{M}_T)}^2,$$

où α est un multi-entier $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Pour obtenir des estimations a priori sur (u^{k+1}, h^{k+1}) dans $L^2(\mathcal{M})$, nous multiplions l'équation (2.78) par $S_0(u^k, h^k)$ et nous prenons le produit scalaire dans L^2 avec (u^{k+1}, h^{k+1}) . Nous trouvons :

$$(2.86) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathcal{M}} (h_a + h^k + H)(u^{k+1})^2 dx + \int_{\mathcal{M}} g(h^{k+1})^2 dx \right\} - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (h_{a,t} + h_t^k)(u^{k+1})^2 dx \\ & + \int_{\mathcal{M}} (S_0(u^k, h^k)A(u^k, h^k)(u^{k+1}, h^{k+1})_x, (u^{k+1}, h^{k+1})) dx \\ & = ((h_a + h^k + H)\mathcal{F}_1^k, u^{k+1}) + (g\mathcal{F}_2^k, h^{k+1}). \end{aligned}$$

Après des estimations à priori successives et en utilisant la propriété de stricte dissipativité pour les conditions aux bords, nous trouvons :

$$(2.87) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} I_0^{k+1} + \frac{1}{2} \alpha_0 \{ |u^{k+1}(0, t)|^2 + |u^{k+1}(L, t)|^2 + |h^{k+1}(0, t)|^2 + |h^{k+1}(L, t)|^2 \} \\ & \leq (C_1(M) + \frac{\gamma}{4}) I_0^{k+1} + \frac{1}{2} \beta_0 \{ |\mathcal{G}_0^k|^2 + |\mathcal{G}_L^k|^2 \} + \frac{c(M)}{\gamma} \{ |\mathcal{F}_1^k|_{L^2}^2 + |\mathcal{F}_2^k|_{L^2}^2 \}, \end{aligned}$$

où $C_1(M)$, $c(M)$ sont des constantes qui dépendent de M , de la norme de (u_a, h_a) dans $H^4(\mathcal{M}_T)$ et de $\underline{h}_0, \bar{h}_0, c_0, U, H, g$.

Nous multiplions (2.87) par $e^{-2\gamma t}$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ I_0^{k+1} e^{-2\gamma t} \} + \left(\frac{3\gamma}{2} - 2C_1(M) \right) e^{-2\gamma t} I_0^{k+1} + \alpha_0 \{ |u^{k+1}(0, t)|^2 + |u^{k+1}(L, t)|^2 \\ & + |h^{k+1}(0, t)|^2 + |h^{k+1}(L, t)|^2 \} e^{-2\gamma t} \\ & \leq \beta_0 \{ |\mathcal{G}_0^k|^2 + |\mathcal{G}_L^k|^2 \} e^{-2\gamma t} + \frac{c(M)}{\gamma} \{ |\mathcal{F}_1^k|_{L^2}^2 + |\mathcal{F}_2^k|_{L^2}^2 \} e^{-2\gamma t}. \end{aligned}$$

En choisissant γ tel que $3\gamma/2 - 2C_1(M) \geq \gamma$, ce qui est équivalent à $\gamma \geq 4C_1(M) := \gamma_0$, nous obtenons l'estimation suivante :

$$(2.88) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ I_0^{k+1} e^{-2\gamma t} \} + \gamma e^{-2\gamma t} I_0^{k+1} + \alpha_0 \{ |u^{k+1}(0, t)|^2 + |u^{k+1}(L, t)|^2 \\ & + |h^{k+1}(0, t)|^2 + |h^{k+1}(L, t)|^2 \} e^{-2\gamma t} \\ & \leq \beta_0 \{ |\mathcal{G}_0^k|^2 + |\mathcal{G}_L^k|^2 \} e^{-2\gamma t} + \frac{c(M)}{\gamma} \{ |\mathcal{F}_1^k|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + |\mathcal{F}_2^k|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \} e^{-2\gamma t}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir obtenir des estimations à priori pour (u^{k+1}, h^{k+1}) dans $\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)$, nous devons obtenir des estimation sur toutes les dérivées d'ordre 3. Nous commençons par

des estimations sur les dérivées en temps; pour cela nous écrivons $u_\alpha^{k+1} = \partial_t^\alpha u^{k+1}$ et $h_\alpha^{k+1} = \partial_t^\alpha h^{k+1}$ avec $\alpha \leq 3$, α entier. L'équation satisfaite par $(u_\alpha^{k+1}, h_\alpha^{k+1})$ est obtenue en dérivant l'équation (2.78) α fois par rapport au temps. Nous trouvons :

$$(2.89) \quad \left(\frac{u_\alpha^{k+1}}{h_\alpha^{k+1}} \right)_t + A(u^k, h^k) \left(\frac{u_\alpha^{k+1}}{h_\alpha^{k+1}} \right)_x = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1,\alpha}^k \\ \mathcal{F}_{2,\alpha}^k \end{pmatrix} - \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_{\alpha,\beta} (A(u^k, h^k))_{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} u_{\beta,x}^{k+1} \\ h_{\beta,x}^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites associées aux équations (2.89) s'écrivent :

$$(2.90) \quad \begin{cases} u_\alpha^{k+1} + \sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}} h_\alpha^{k+1} = \mathcal{G}_{0,\alpha}^k - \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_{\alpha,\beta} \left(\sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}} \right)^{(\alpha-\beta)} h_\beta^{k+1} \text{ à } x = 0, \\ u_\alpha^{k+1} - \sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}} h_\alpha^{k+1} = \mathcal{G}_{L,\alpha}^k + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} c_{\alpha,\beta} \left(\sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}} \right)^{(\alpha-\beta)} h_\beta^{k+1} \text{ à } x = L. \end{cases}$$

Les fonctions $(u_\alpha^{k+1}, h_\alpha^{k+1})$ satisfont une estimation d'énergie similaire à (2.88) et après intégration par rapport au temps sur l'intervalle $(-\infty, T]$, nous trouvons :

$$(2.91) \quad \begin{aligned} & \gamma \int_{\mathcal{M}_T} \{ (h_a + h^k + H)(u_\alpha^{k+1})^2 + g(h_\alpha^{k+1})^2 \} e^{-2\gamma t} d\mathcal{M}_T \\ & + \alpha_0 \int_{-\infty}^T \{ |u_\alpha^{k+1}(0, t)|^2 + |u_\alpha^{k+1}(L, t)|^2 + |h_\alpha^{k+1}(0, t)|^2 + |h_\alpha^{k+1}(L, t)|^2 \} e^{-2\gamma t} dt \\ & \leq \beta_0 \int_{-\infty}^T \{ |\mathcal{B}_0(u_\alpha^{k+1}, h_\alpha^{k+1})|^2 + |\mathcal{B}_L(u_\alpha^{k+1}, h_\alpha^{k+1})|^2 \} e^{-2\gamma t} dt \\ & + \frac{c(M)}{\gamma} \int_{-\infty}^T \{ |\mathcal{F}_1^{\alpha,k+1}|_{L^2}^2 + |\mathcal{F}_2^{\alpha,k+1}|_{L^2}^2 \} e^{-2\gamma t} dt. \end{aligned}$$

Nous multiplions à présent (2.91) par $\gamma^{2(3-\alpha)}$ et nous sommions ces inégalités pour $\alpha = 1, 2, 3$, pour obtenir une estimations sur (u^{k+1}, h^{k+1}) dans $L^2(\mathcal{M}, \mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T))$. Après avoir estimé les termes dans le membre de droite de (2.91), nous arrivons à :

$$(2.92) \quad \begin{aligned} & \min(\underline{h}_0, g) \gamma \| (u^{k+1}, h^{k+1}) \|_{L^2(\mathcal{M}, \mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T))}^2 + \alpha_0 \left\{ \| (u^{k+1}(0, \cdot), u^{k+1}(L, \cdot)) \|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right. \\ & \left. + \| (h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot)) \|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right\} \\ & \leq \beta_0 \left\{ \| (\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_L^k) \|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 + \frac{\tilde{c}(M)}{\gamma^2} \| (h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot)) \|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right\} \\ & + \frac{c(M)}{\gamma} \left\{ \| (u^{k+1}, h^{k+1}) \|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2 + \| (\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k) \|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Nous choisissons un γ suffisamment grand pour que

$$\alpha_0 - \beta_0 \tilde{c}(M) / \gamma^2 \geq \alpha_0 / 2,$$

soit $\gamma^2 \geq 2\beta_0\tilde{c}(M)/\alpha_0$, et nous trouvons :

$$(2.93) \quad \begin{aligned} & \min(\underline{h}_0, g) \gamma \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{L^2(\mathcal{M}, \mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T))}^2 + \\ & + \frac{\alpha_0}{2} \left\{ \|(u^{k+1}(0, \cdot), u^{k+1}(L, \cdot))\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 + \|(h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot))\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right\} \\ & \leq \beta_0 \|(\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_L^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 + \frac{c(M)}{\gamma} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2 + \|(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2. \end{aligned}$$

Nous devons aussi obtenir des estimations à priori pour les dérivées qui contiennent ∂_x . Nous commençons par estimer les dérivées de type $\partial_x \partial_t^\alpha$, pour $\alpha \leq 2$. Pour obtenir des estimations sur $(\partial_x \partial_t^\alpha u^{k+1}, \partial_x \partial_t^\alpha h^{k+1})$, nous dérivons α fois par rapport à t la relation

$$(2.94) \quad \begin{pmatrix} u_x^{k+1} \\ h_x^{k+1} \end{pmatrix} = A^{-1}(u^k, h^k) \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1^k \\ \mathcal{F}_2^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_t^{k+1} \\ h_t^{k+1} \end{pmatrix} \right\},$$

où

$$(2.95) \quad A^{-1}(u^k, h^k) = \frac{1}{(u_a + u^k + U)^2 - g(h_a + h^k + H)} \begin{pmatrix} u_a + u^k + U & -g \\ -(h_a + h^k + H) & u_a + u^k + U \end{pmatrix}.$$

Nous trouvons :

$$(2.96) \quad \begin{aligned} \partial_x \partial_t^\alpha \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ h^{k+1} \end{pmatrix} &= A^{-1}(u^k, h^k) \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1,\alpha}^k \\ \mathcal{F}_{2,\alpha}^k \end{pmatrix} - A^{-1}(u^k, h^k) \begin{pmatrix} u_{\alpha+1}^{k+1} \\ h_{\alpha+1}^{k+1} \end{pmatrix} \\ &+ [\partial_t^\alpha, A^{-1}(u^k, h^k)] \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1^k \\ \mathcal{F}_2^k \end{pmatrix} - [\partial_t^\alpha, A^{-1}(u^k, h^k)] \begin{pmatrix} u_t^{k+1} \\ h_t^{k+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$[\cdot, \cdot]$ désignant le commutateur $[P, Q] = PQ - QP$.

Nous prenons la norme $L^2(\mathcal{M}_T)$ de la relation (2.96) multipliée par $e^{-\gamma t}$ et nous faisons la somme de toutes les inégalités correspondant à $\alpha \leq 2$. Après estimations des termes du membre droit de (2.96), nous arrivons à :

$$(2.97) \quad \begin{aligned} & \gamma \sum_{\alpha \leq 2} \gamma^{2(2-\alpha)} \|e^{-\gamma t} \partial_t^\alpha \partial_x (u^{k+1}, h^{k+1})\|_{L^2(\mathcal{M}_T)}^2 \leq \frac{c(M)}{\gamma} \|(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k)\|_{L^2(\mathcal{M}, \mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T))}^2 \\ & + c(M) \gamma \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{L^2(\mathcal{M}, \mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T))}^2 + \frac{c(M)}{\gamma} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{L^2(\mathcal{M}, \mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T))}^2 \\ & \leq (\text{en utilisant (2.93)}) \\ & \leq \frac{c(M)}{\gamma} \|(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2 + \frac{c(M)}{\gamma} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2 + c(M) \|(\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_L^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2. \end{aligned}$$

Pour estimer les termes de type $\partial_x^j \partial_t^{3-j}(u^{k+1}, h^{k+1})$, avec $j = 2, 3$, nous pouvons poursuivre directement ou par récurrence. Nous avons préféré l'argument récurent car il permet la généralisation du résultat à la régularité $H^m(\mathcal{M}_T)$, avec $m \geq 3$, sous la condition que les données initiales soient assez régulières et compatibles. Nous supposons que

l'estimation suivante soit vraie :

$$(2.98) \quad \begin{aligned} & \gamma \sum_{\alpha \leq 3-j} \gamma^{2(3-(\alpha+j))} \|e^{-\gamma t} \partial_t^\alpha \partial_x^j (u^{k+1}, h^{k+1})\|_{L^2(\mathcal{M}_T)}^2 \\ & \leq \frac{c(M)}{\gamma} \|(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2 + \frac{c(M)}{\gamma} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2 \\ & \quad + c(M) \|(\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_L^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\mathcal{M}_T)}^2, \end{aligned}$$

pour α, j tels que $\alpha + j \leq 3$. Nous voulons montrer cette même propriété pour $\partial_x^{j+1} \partial_t^\alpha$, quand $\alpha + j + 1 \leq 3$.

La dérivation de (2.94) par $\partial^\beta = \partial_x^j \partial_t^\alpha$, où $\beta = (j, \alpha)$ est un multi-entier tel que $|\beta| = \alpha + j \leq 2$, conduit à :

$$(2.99) \quad \begin{aligned} \partial_x^{j+1} \partial_t^\alpha \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ h^{k+1} \end{pmatrix} &= A^{-1}(u^k, h^k) \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1,\beta}^k \\ \mathcal{F}_{2,\beta}^k \end{pmatrix} - A^{-1}(u^k, h^k) \partial^\beta \partial_t \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ h^{k+1} \end{pmatrix} \\ &+ [\partial^\beta, A^{-1}(u^k, h^k)] \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1^k \\ \mathcal{F}_2^k \end{pmatrix} - [\partial^\beta, A^{-1}(u^k, h^k)] \begin{pmatrix} u_t^{k+1} \\ h_t^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Après estimation des termes provenant du membre droit de (2.99), nous obtenons :

$$(2.100) \quad \begin{aligned} & \gamma \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\Omega_T)}^2 + c_1 \left\{ \|(u^{k+1}(0, \cdot), u^{k+1}(L, \cdot))\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|(h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot))\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right\} \\ & \leq \frac{c_1(M)}{\gamma} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\Omega_T)}^2 + \frac{c_2(M)}{\gamma} \|(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\Omega_T)}^2 \\ & \quad + c_3(M) \|(\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_L^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\Omega_T)}^2, \end{aligned}$$

avec $c_1 = \alpha_0 / (2 \min(h_0, g))$.

En prenant γ suffisamment grand pour que $\gamma - c_1(M)/\gamma \geq \gamma/2$ soit $\gamma \geq \gamma_1 := \sqrt{2C_1(M)}$, nous trouvons :

$$(2.101) \quad \begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\Omega_T)}^2 + c_1 \left\{ \|(u^{k+1}(0, \cdot), u^{k+1}(L, \cdot))\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|(h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot))\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(-\infty, T)}^2 \right\} \\ & \leq \frac{c_2(M)}{\gamma} \|(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\Omega_T)}^2 + c_3(M) \|(\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_L^k)\|_{\mathcal{H}_\gamma^3(\Omega_T)}^2. \end{aligned}$$

La relation (2.101) entraîne le caractère bien-posé du problème (2.78) et, après avoir pris γ proportionnel à $1/T$, nous obtenons :

$$(2.102) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{T} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{H^3(\Omega_T)}^2 + \|(u^{k+1}(0, \cdot), u^{k+1}(L, \cdot))\|_{H^3(-\infty, T)}^2 \\ & \quad + \|(h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot))\|_{H^3(-\infty, T)}^2 \\ & \leq C_1(M) T \|(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_2^k)\|_{H^3(\Omega_T)}^2 + C_2(M) \|(\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_L^k)\|_{H^3(\Omega_T)}^2, \end{aligned}$$

avec $C_1(M), C_2(M)$ des constantes qui dépendent de M et des données initiales mais sont indépendantes de k et de T .

En utilisant les majorations (2.76) et (2.77) du Lemme 2.1, la relation (2.102) donne :

$$(2.103) \quad \frac{1}{T} \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{H^3(\Omega_T)}^2 + \|(u^{k+1}(0, \cdot), u^{k+1}(L, \cdot))\|_{H^3(-\infty, T)}^2 \\ + \|(h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot))\|_{H^3(-\infty, T)}^2 \leq C_1(M)T + C_2(M)\varepsilon(T).$$

Comme $\varepsilon(T)$ introduit en (2.77) tend vers 0 quand $T \rightarrow 0$, nous pouvons choisir T suffisamment petit pour que :

$$(2.104) \quad \|(u^{k+1}, h^{k+1})\|_{H^3(\Omega_T)} \leq M,$$

et

$$(2.105) \quad \|(u^{k+1}(0, \cdot), u^{k+1}(L, \cdot))\|_{H^3(-\infty, T)} \leq M, \|(h^{k+1}(0, \cdot), h^{k+1}(L, \cdot))\|_{H^3(-\infty, T)} \leq M.$$

Nous avons donc construit la suite des solutions approchées $(u^k, h^k)_k$ satisfaisant (2.84), pour tout k .

Pour pouvoir montrer la convergence forte de la suite des solutions approchées vers la solution des équations de Saint-Venant non-linéaires, nous montrons que la suite $(u^k, h^k)_k$ est de Cauchy et donc convergente. Pour cela, nous cherchons à obtenir des estimations à priori pour

$$(2.106) \quad w^{k+1} = u^{k+1} - u^k, \quad \phi^{k+1} = h^{k+1} - h^k.$$

Le problème satisfait par (w^{k+1}, ϕ^{k+1}) s'écrit :

$$(2.107) \quad \begin{cases} w_t^{k+1} + (u_a + u^k + U)w_x^{k+1} + g\phi_x^{k+1} = \mathcal{F}_1^w, \\ \phi_t^{k+1} + (u_a + u^k + U)\phi_x^{k+1} + (h_a + h^k + H)w_x^{k+1} = \mathcal{F}_2^w, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^w &= -w^k u_x^k - w^k u_{a,x}, \\ \mathcal{F}_2^w &= -w h_x^k - \phi^k u_x^k - w^k h_{a,x} - \phi^k u_{a,x}. \end{aligned}$$

La condition initiale pour (2.107) est :

$$(2.108) \quad w^{k+1}(0, x) = 0, \phi^{k+1}(0, x) = 0,$$

et les conditions aux limites s'écrivent :

$$(2.109) \quad \begin{cases} w^{k+1} + \sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}} \phi^{k+1} = \mathcal{G}_0^w, & \text{à } x = 0, \\ w^{k+1} - \sqrt{\frac{g}{h_a + h^k + H}} \phi^{k+1} = \mathcal{G}_L^w, & \text{à } x = L, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^w &= \sqrt{\frac{g}{h_a + h^{k-1} + H}} \phi^k - 2\sqrt{g(h_a + h^k + H)} + 2\sqrt{g(h_a + h^{k-1} + H)}, \\ \mathcal{G}_L^w &= -\sqrt{\frac{g}{h_a + h^{k-1} + H}} \phi^k + 2\sqrt{g(h_a + h^k + H)} - 2\sqrt{g(h_a + h^{k-1} + H)}. \end{aligned}$$

Nous recherchons le même type d'estimations d'énergie que pour le problème linéaire (2.78) et nous obtenons la relation suivante :

$$(2.110) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \mathcal{J}_0^{k+1} e^{-2\gamma t} \} + \gamma e^{-2\gamma t} \mathcal{J}_0^{k+1} + \alpha_0 \{ |(u^{k+1}(0, t), u^{k+1}(L, t))|^2 + \\ + |(\phi^{k+1}(0, t), \phi^{k+1}(L, t))|^2 \} \leq \beta_0 \{ |\mathcal{G}_0^w|^2 + |\mathcal{G}_L^w|^2 \} e^{-2\gamma t} \\ + \frac{c(k)}{\gamma} \{ |\mathcal{F}_1^w|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + |\mathcal{F}_2^w|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \} e^{-2\gamma t}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{J}_0^{k+1} = \int_{\mathcal{M}} (h_a + h^k + H)(w^{k+1})^2 dx + g \int_{\mathcal{M}} (\phi^{k+1})^2 dx.$$

Après estimation du membre droit de (2.110), nous intégrons en temps sur $(-\infty, T)$ pour obtenir :

$$(2.111) \quad \begin{aligned} \frac{1}{T} \| (w^{k+1}, \phi^{k+1}) \|_{L^2(\mathcal{M}_T)}^2 + \{ \| (w^{k+1}(0, \cdot), w^{k+1}(L, \cdot)) \|_{L^2(-\infty, T)}^2 \\ + \| (\phi^{k+1}(0, \cdot), \phi^{k+1}(L, \cdot)) \|_{L^2(-\infty, T)}^2 \} \\ \leq c_1(M) \varepsilon(T) \| (\phi^k(0, \cdot), \phi^k(L, \cdot)) \|_{L^2(-\infty, T)}^2 + c_2(M) T \| (w^k, \phi^k) \|_{L^2(\mathcal{M}_T)}^2, \end{aligned}$$

où $c_1(M), c_2(M)$ soient des constantes qui dépendent de M et des données mais pas de T .

En prenant T suffisamment petit pour que $c_1(M)\varepsilon(T), c_2(M)T, c_1(M)\varepsilon(T)T$ et $c_2(M)T^2$ soient inférieurs à $1/2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \| (w^{k+1}, \phi^{k+1}) \|_{L^2(\mathcal{M}_T)} &\leq 2^{-(k+1)} \| (w^0, \phi^0) \|_{L^2(\mathcal{M}_T)}, \\ \| (w^{k+1}(0, \cdot), w^{k+1}(L, \cdot)) \|_{L^2(-\infty, T)} &\leq 2^{-(k+1)} \| (w^0(0, \cdot), w^0(L, \cdot)) \|_{L^2(-\infty, T)}, \\ \| (\phi^{k+1}(0, \cdot), \phi^{k+1}(L, \cdot)) \|_{L^2(-\infty, T)} &\leq 2^{-(k+1)} \| (\phi^0(0, \cdot), \phi^0(L, \cdot)) \|_{L^2(-\infty, T)}. \end{aligned}$$

Nous avons alors montré que $(u^k, h^k)_k$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathcal{M}_T)$ et que $(u^k(0, \cdot), u^k(L, \cdot))_k, (h^k(0, \cdot), h^k(L, \cdot))_k$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(-\infty, T)$. Nous notons (u, h) la limite de $(u^k, h^k)_k$ dans $L^2(\mathcal{M}_T)$ et $(\underline{u}_0, \underline{u}_L)$ and $(\underline{h}_0, \underline{h}_L)$ les limites respectives de $(u^k(0, \cdot), u^k(L, \cdot))_k$ et $(h^k(0, \cdot), h^k(L, \cdot))$ dans $L^2(-\infty, T)$. Comme la suite $(u^k, h^k)_k$ est uniformément bornée dans $H^3(\mathcal{M}_T)$, sa limite (u, h) appartient aussi à $H^3(\mathcal{M}_T)$. De façon similaire, $(\underline{u}_0, \underline{u}_L)$ et $(\underline{h}_0, \underline{h}_L)$ appartiennent à $H^3(-\infty, T)$.

Par un argument d'interpolation entre L^2 et H^3 , $(u^k, h^k)_k$ converge fortement vers (u, h) dans tous les espaces $H^s(\mathcal{M}_T)$, avec $s < 3$ et donc nous obtenons que $(u(0, \cdot), u(L, \cdot)) = (\underline{u}_0, \underline{u}_L)$ et $(h(0, \cdot), h(L, \cdot)) = (\underline{h}_0, \underline{h}_L)$.

Nous pouvons conclure que (u, h) est une solution du problème (2.67) et donc $(u + u_a + U, h + h_a + H)$ est une solution pour le problème de Saint-Venant (2.51). L'unicité de la solution est aisée et nous pouvons conclure la démonstration du Théorème 2.2. Pour la démonstration complète du Théorème, nous renvoyons à [22].

*Les équations de Saint-Venant en dimension un d'espace en régime supersonique
et avec topographie*

Dans [12] nous considérons les équations de Saint-Venant en dimension un d'espace, dans le cas d'un régime supersonique. Nous allons voir que cette nouvelle configuration nécessite des conditions aux limites différentes de celles considérées dans [22]. Plus précisément, nous considérons que le fluide occupe le domaine $0 < x < L$, et que de plus le régime reste constamment supersonique, et que la hauteur et la vitesse dans la direction x restent toujours positives. Nous montrons que la solution reste, dans un temps petit, proche d'une solution stationnaire.

Les équations de Saint-Venant non-visqueuses, qui prennent en compte la force de Coriolis et la topographie du fond du domaine, sont les suivantes :

$$(2.112) \quad \begin{cases} u_t + uu_x + gh_x - fv = -gB_x, \\ v_t + uv_x + fu = 0, \\ h_t + uh_x + hu_x = 0; \end{cases}$$

où $x \in \mathcal{M} = (0, L)$, $t \in (0, T)$, où u et v sont les composantes horizontales de la vitesse, $B = B(x)$ est une fonction qui décrit la topographie du fond, h est la hauteur de l'eau, g l'accélération gravitationnelle et f le paramètre de Coriolis.

Les équations comprennent les deux composantes horizontales de la vitesse mais toutes les quantités ne dépendent que de x , ce qui correspond à un écoulement dans le domaine $0, x < L, y \in \mathbf{R}, B < z < B + h$, invariant par translation en y . Les deux premières équations sont obtenues à partir des équations de conservation du moment horizontal en effectuant une moyenne dans la direction verticale $0z$ et la troisième équation exprime la conservation de la masse pour une colonne verticale de fluide de hauteur h .

Comme déjà indiqué ci-dessus, nous cherchons une solution proche d'une solution stationnaire et donc nous commençons par construire la solution stationnaire $(u, v, h) = (u_s, v_s, h_s)$. Les fonctions (u, v, h) , indépendantes du temps, satisfont les équations suivantes :

$$(2.113) \quad \begin{cases} uu_x + gh_x - fv = -gB_x, \\ uv_x + fu = 0, \\ (uh)_x = 0. \end{cases}$$

Nous déduisons de (2.113) que :

$$\begin{cases} uh = \kappa_2, \\ v = -fx + \kappa_1, \\ u^2 + 2gh = -f^2x^2 - 2gB + 2f\kappa_1x + \kappa_0, \end{cases}$$

où $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ sont des constantes arbitraires.

En choisissant $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 1$, nous trouvons $h = u^{-1}, v = -fx$ et

$$(2.114) \quad u^2 + \frac{2g}{u} = -2gB - f^2x^2 + \kappa_0.$$

Comme $-2gB - f^2x^2$ est borné dans \mathcal{M} , nous pouvons choisir κ_0 suffisamment grand pour que la solution u de (2.114) soit supérieure à g en tout point x de $(0, L)$ et bornée supérieurement. Nous exigeons aussi que si u est solution de (2.114), u^{-1} ne peut s'annuler et que $u^2 - gh \geq g^2 - 1$ partout sur $(0, L)$.

Les calculs nous donnent une solution stationnaire u_s, v_s, h_s qui satisfait une forme forte de la condition de régime supersonique ($u^2 - gh > 0$ et $u > 0, h > 0$), c'est-à-dire, nous choisissons u_s, v_s, h_s tels que :

$$(2.115) \quad \begin{cases} u_s^2 - gh_s \geq 3c_0^2, \\ u_s \geq 3a_0, \\ 3\underline{h}_0 \leq h_s \leq \bar{h}_0, \end{cases}$$

où $c_0, a_0, \underline{h}_0, \bar{h}_0$ sont des constantes données, positives.

Nous écrivons $u = u_s + \tilde{u}, v = v_s + \tilde{v}, h = h_s + \tilde{h}$ et nous substituons dans (2.112) pour obtenir un nouveau système en les variables $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}$. Nous renonçons aux tildes ($u = \tilde{u}, v = \tilde{v}, h = \tilde{h}$) et nous obtenons :

$$(2.116) \quad \begin{cases} u_t + (u + u_s)(u_x + u_{s,x}) + g(h_x + h_{s,x}) - f(v + v_s) = -gB_x, \\ v_t + (u + u_s)(v_x + v_{s,x}) + f(u + u_s) = 0, \\ h_t + (u + u_s)(h_x + h_{s,x}) + (h + h_s)(u_x + u_{s,x}) = 0. \end{cases}$$

Le système (2.116) est complété par les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\text{I.C.} \quad \begin{cases} u(0, x) = u_0(x), \\ v(0, x) = v_0(x), \\ h(0, x) = h_0(x), \end{cases} \quad \text{B.C.} \quad \begin{cases} u(t, 0) = g_u(t), \\ v(t, 0) = g_v(t), \\ h(t, 0) = g_h(t). \end{cases}$$

Nous remarquons que dans le cas d'un régime supersonique nous imposons des conditions aux bords à $x = 0$ seulement, contrairement au cas subsonique où nous avons imposé une condition à $x = 0$ et une condition à $x = L$.

La condition initiale est choisie proche de la solution stationnaire de façon à satisfaire les relations suivantes :

$$(2.117) \quad \begin{cases} (u_0 + u_s)^2 - g(h_0 + h_s) \geq 2c_0^2, \\ u_0 + u_s \geq 2a_0, \\ 2\underline{h}_0 \leq h_0 + h_s \leq 2\bar{h}_0. \end{cases}$$

Pour mieux comprendre le choix des conditions aux bords, nous écrivons le système (2.116) sous la forme matricielle suivante :

$$(2.118) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + A(U + U_s) \frac{\partial U}{\partial x} &= \phi(U + U_s), \\ U|_{t=0} &= U_0, \\ U|_{x=0} &= G(t), \end{aligned}$$

où ici,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \quad \phi(U, x) = \begin{pmatrix} fv - gB_x \\ -fu \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_u(t) \\ g_v(t) \\ g_h(t) \end{pmatrix}, \quad A(U) = \begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ h & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Calculant les valeurs propres de la matrice $A(U)$, nous trouvons :

$$(2.119) \quad \lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = u + \sqrt{gh},$$

et donc le problème (2.118) est équivalent au système :

$$(2.120) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \dots, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \dots, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial x} = \dots, \end{cases}$$

les inconnues caractéristiques ξ_i , $i = 1, 2, 3$, sont égales à $u \pm \sqrt{2gh}$ et v .

Dans le cas supersonique, les trois valeurs propres sont positives et donc nous avons besoin d'imposer des conditions aux bords sur les trois inconnues caractéristiques à $x = 0$ seulement. Connaître les valeurs des inconnues caractéristiques à $x = 0$ est équivalent à connaître (u, v, h) à $x = 0$, d'où le choix des conditions aux bords.

Pour pouvoir résoudre le problème, nous imposons les conditions de compatibilité naturelles entre les données à la frontière et les données initiales, conditions en concordance avec le fait que la solution construite sera dans $H^m(\Omega_T)$, donc dans \mathcal{C}^{m-1} jusqu'à la frontière. Nous écrivons la première équation de (2.118) sous la forme :

$$U_t + A(U + U_s)U_x = \phi(U + U_s, x) - A(U + U_s)U_{s,x} =: H(U + U_s),$$

équivalente à :

$$(2.121) \quad U_t = H(U + U_s) - A(U + U_s)U_x.$$

Dérivant (2.121) par rapport au temps, nous trouvons que $V_i := \partial_t^i U$ satisfait :

$$(2.122) \quad \begin{cases} V_0 = U, \\ V_1 = \partial_t U = H(U + U_s) - A(U + U_s)U_x, \\ V_{i+1} = \partial_t^{i+1} U = \sum_{k=1}^i \sum_{j_1+\dots+j_k=i} c_{j_1, \dots, j_k} (d^k H(U + U_s)) \cdot (V_{j_1}, \dots, V_{j_k}) \\ - \sum_{l=1}^i \binom{i}{l} \sum_{k=1}^l \sum_{j_1+\dots+j_k=l} c_{j_1, \dots, j_k} (d^k A(U + U_s)) \cdot (V_{j_1}, \dots, V_{j_k}) V_{i-l,x} \\ - A(U + U_s) V_{i,x}, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, m-2\}; \end{cases}$$

où c_{j_1, \dots, j_k} sont des coefficients donnés par la formule de Faà di Bruno ([7, 6]).

Les conditions de compatibilité s'écrivent ainsi :

$$(2.123) \quad \partial_t^p G(t)|_{t=0} = V_p(t=0, x=0), \forall p \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Une condition similaire à (2.58) nous donne aussi $G(0) = 0$.

Comme pour le cas subsonique, les conditions initiales ont comme inconvénient de ne plus être nulles. Pour avoir à nouveau des conditions initiales nulles, nous allons construire une fonction de rélevement $U_a = (u_a, v_a, h_a)$ choisie de telle manière que $U_a(x, 0) = U_0(x)$ et telle que si :

$$(2.124) \quad \begin{cases} |u_a - u_0|, |v_a - v_0|, |h_a - h_0| < \delta, \\ |u|, |v|, |h| < \delta, \end{cases}$$

alors :

$$(2.125) \quad \begin{cases} (u_a + u + u_s)^2 - g(h_a + h + h_s) \geq c_0^2, \\ u_a + u + u_s \geq a_0, \\ \underline{h}_0 \leq h_a + h + h_s \leq 3\bar{h}_0. \end{cases}$$

La condition (2.125) nous garantit que le régime reste supersonique.

Nous cherchons alors la solution du problème initial (2.112) sous la forme $U_s + U_a + U$, et donc nous voudrions trouver U , solution du système suivant :

$$(2.126) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A(U_a + U + U_s) \frac{\partial U}{\partial x} = F^U, \\ U|_{t=0} = 0, \\ U|_{x=0} = -U_a + G(t) =: G^0(t), \end{cases}$$

où

$$(2.127) \quad F^U = \phi(U_a + U + U_s, x) - \frac{\partial(U_a + U_s)}{\partial t} A(U_a + U + U_s) \frac{\partial(U_a + U_s)}{\partial x}.$$

L'existence d'une solution pour le problème (2.126) sera établie par la construction, comme pour le cas subsonique, une suite de solutions approchées qui convergent vers la solution du problème non-linéaire (2.126). La méthode itérative est initialisée par $U^0 = 0$ et nous construisons U^{k+1} de manière récurrente, comme la solution du problème linéaire suivant :

$$(2.128) \quad \begin{cases} \frac{\partial U^{k+1}}{\partial t} + A(U_a + U^k + U_s) \frac{\partial U^{k+1}}{\partial t} = F^{U^k}, (x, t) \in \mathcal{M}_T, \\ U^{k+1}|_{t \leq 0} = 0, \\ U^{k+1}|_{x=0} = -U_a + G(t) = G^0(t), t \leq T. \end{cases}$$

Nous remarquons ici que le problème linéaire est muni des mêmes conditions aux limites que le problème non-linéaire, ce qui n'était pas le cas pour le régime subsonique. La simplification vient du fait que les conditions proposées ici sont linéaires par rapport à U .

Nous montrons le résultat suivant sur le problème linéaire :

Théorème 2.3. Soit $U^k \in H^m(\mathcal{M}_T)$ pour $m \geq 3$, $U^k|_{t \leq 0} = 0$, satisfaisant :

$$(2.129) \quad \|U^k\|_{H^m(\mathcal{M}_T)} \leq M, \text{ avec } M \in (0, \frac{\delta}{\nu_m}],$$

où δ est choisi comme dans (2.124) et ν_m est la norme de l'injection $H^m((0, L) \times \mathbf{R})$ dans $L^\infty((0, L) \times \mathbf{R})$.

Si $G(\cdot) \in H^m(I_T)$ et $U_a \in H^{m+1}(\mathcal{M}_T)$, alors le problème (2.128) possède une solution unique U^{k+1} telle que :

$$(2.130) \quad \|U^{k+1}\|_{H^m(\mathcal{M}_T)} \leq M.$$

De plus, nous avons :

$$(2.131) \quad \|U^{k+1}\|_{L^\infty(\mathcal{M}_T)} \leq \delta.$$

Nous renvoyons à [12] pour la démonstration du Théorème 2.3, nous remarquons le fait que, contrairement au cas subsonique, nous n'avons pas besoin d'obtenir des estimations a priori dans des espaces de Sobolev avec poids, la simplification étant liée au fait que dans notre cas les conditions aux limites sont données à $x = 0$ seulement.

Nous pouvons conclure en démontrant le résultat suivant sur le problème non-linéaire (voir [12] pour les détails de la démonstration) :

Théorème 2.4. Soit $U_0 = (u_0, v_0, h_0)$ dans $H^{m+\frac{1}{2}}(\Omega)$ satisfaisant la condition (2.117), B le profil du fonds donné dans $H^{m+1}(\Omega)$ et $G(\cdot) = (g_u(\cdot), g_v(\cdot), g_h(\cdot))$ donné dans $H^m(I_T)$ avec $G(0) = 0$ et satisfaisant les conditions de compatibilité (2.123).

Alors, il existe un temps $T_* > 0$, qui dépend des données initiales et de la solution stationnaire U_s tel que le système (2.116) possède une solution unique $U = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ sur $(0, T_*)$ qui satisfait :

$$(2.132) \quad U \in H^m((0, L) \times (0, T_*)).$$

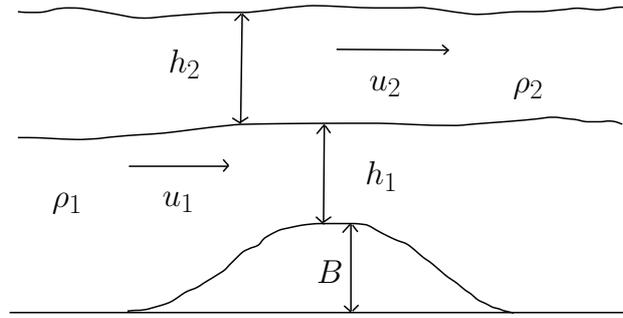


FIGURE 2.4 – Les modèle de Saint-Venant à deux couches

Les équations de Saint-Venant à deux couches

Dans [23] nous considérons les équations de Saint-Venant à deux couches et nous étudions le caractère bien-posé des équations munies de certaines conditions aux limites. Des simulations numériques qui se trouvent dans [5] (voir également ci-dessous) montrent le fait que les conditions aux limites proposées sont transparentes.

Les équations de Saint-Venant à deux couches représentent un modèle qui suscite beaucoup d'intérêt de la part des mathématiciens et des scientifiques en géophysique. En effet, outre l'intérêt mathématique et théorique des questions liées au modèle, les équations de Saint-Venant à deux couches décrivent assez bien les écoulements des fluides géophysiques dans les océans, ceux-ci étant en première approximation constitués de deux couches, une supérieure et une inférieure, séparées par une zone (appelées *thermocline*) où le gradient de température est très important. Il est donc naturel de s'intéresser à des modèles multi-couches et d'utiliser pour la modélisation des mouvements de l'océan, des modèles possédant au moins deux couches. Un autre intérêt, mathématique celui-ci, des modèles de Saint-Venant multicouches est qu'ils ne sont en general pas hyperboliques partout, ce qui rend le choix des conditions aux limites considérablement difficile comme pour les écoulements transsoniques.

Nous considérons deux couches distinctes de fluide dans un canal de longueur L , avec largeur variable $b(x)$ et avec la topographie du fond donnée par $B(x)$ (voir Figure 2.4). Les deux couches sont immiscibles, chaque couche étant décrite par la vitesse u_i du fluide, qui ne dépend que de la position horizontale, la densité constante ρ_i et la hauteur h_i , avec $i = 1, 2$.

Les équations de Saint-Venant sont alors données par :
L'équation de continuité pour chaque couche :

$$(2.133) \quad \frac{\partial h_i}{\partial t} = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} (b u_i h_i), \quad i = 1, 2.$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$(2.134) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -g \frac{\partial}{\partial x} (h_2 + h_1 + h_0) + g' \frac{\partial h_2}{\partial x},$$

et

$$(2.135) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -g \frac{\partial}{\partial x} (h_2 + h_1 + B).$$

La constante g' représente la gravité réduite, donnée par :

$$g' = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}.$$

Nous pouvons écrire ces équations sous forme matricielle :

$$(2.136) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = F(U),$$

avec

$$U = (h_1, h_2, u_1, u_2), \quad \tilde{A}(U) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & h_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & h_2 \\ g & g - g' & u_1 & 0 \\ g & g & 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

et

$$F(U) = \left(-\frac{1}{b} u_1 h_1 \frac{\partial b}{\partial x}, -\frac{1}{b} u_2 h_2 \frac{\partial b}{\partial x}, -g \frac{\partial B}{\partial x}, -g \frac{\partial B}{\partial x} \right).$$

La difficulté des équations de Saint-Venant à deux couches, écrites sous cette forme, est que le système n'est pas nécessairement hyperbolique (voir par exemple [1]).

Pour surmonter cette difficulté, nous considérons un modèle voisin approché. Le canal est considéré avoir des murs droits et un fond plat, donc nous nous plaçons dans le cas où b est constant et la topographie B est nulle. Comme remarqué dans [19], si $g' \ll g$, les modes barotrope et barocline sont faiblement couplés. Nous posons

$$h = h_1 + h_2 \text{ et } u = \frac{h_1 u_1 + h_2 u_2}{h},$$

et nous négligeons les termes où g' apparaît et supposons que $u_1 \approx u_2$. Nous obtenons alors un système en (h, u) qui décrit le mode barotrope. Les équations décrivant le mode barotrope s'écrivent :

$$(2.137) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Nous remarquons que le système décrivant le mode barocline est exactement le système de Saint-Venant à une seule couche. Le caractère bien-posé des équations (2.137) avec des conditions aux bords transparentes a été étudié dans [22] et [12] et rappelé ci-dessus en distinguant les cas où l'écoulement barotrope est sous ou super-critique.

Les inconnues qui décrivent le mode barocline sont (par exemple) $v = u_1 - u_2$ et h_1 . Les équations s'écrivent :

$$(2.138) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u h_1 + v \frac{h_1 h_2}{h}) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u v + \frac{v^2 (h_2 - h_1)}{2h} + g' h_1) &= 0, \end{aligned}$$

avec $h_2 = h - h_1$.

Nous considérons les deux modes séparément. Nous connaissons déjà les bonnes conditions aux limites pour le mode barotrope, grâce aux études sur les équations de Saint-Venant à une seule couche. Une fois (h, u) connus, nous cherchons à déterminer le mode barocline. Pour simplifier les calculs, nous supposons à présent que h et u sont des fonctions constantes et le système (2.138) devient :

$$(2.139) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + (u + v - 2v \frac{h_1}{h}) \frac{\partial h_1}{\partial x} + (h_1 - \frac{h_1^2}{h}) \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (u + v - 2 \frac{h_1 v}{h}) \frac{\partial v}{\partial x} + (g' - \frac{v^2}{h}) \frac{\partial h_1}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Le système peut aussi s'écrire sous la forme vectorielle :

$$(2.140) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + A(V) \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

avec $V = (h_1, v)$ et

$$(2.141) \quad A(V) = \begin{pmatrix} u + v - 2v \frac{h_1}{h} & h_1 - \frac{h_1^2}{h} \\ g' - \frac{v^2}{h} & u + v - 2v \frac{h_1}{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres pour la matrice $A(V)$ sont les solutions de l'équation :

$$(2.142) \quad (a - \lambda)^2 - bc = 0;$$

donc les valeurs propres sont :

$$(2.143) \quad \lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{bc} = u + v - 2v \frac{h_1}{h} \pm \frac{1}{h} \sqrt{h_1 h_2 (g'h - v^2)},$$

et la condition que nous imposons pour assurer l'hyperbolicité du mode barocline est :

$$(2.144) \quad g'h - v^2 > 0.$$

Si nous faisons les combinaisons $(1/\sqrt{b}, \pm 1/\sqrt{c})$ des équations (2.139), nous trouvons le système diagonalisé :

$$(2.145) \quad \left(\frac{h_{1,t}}{\sqrt{h_1 h - h_1^2}} \mp \frac{v_{1,t}}{\sqrt{g'h - v^2}} \right) + \lambda_{1,2} \left(\frac{h_{1,x}}{\sqrt{h_1 h - h_1^2}} \mp \frac{v_{1,x}}{\sqrt{g'h - v^2}} \right) = 0,$$

qui peut s'écrire :

$$(2.146) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$(2.147) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \arcsin \frac{h - 2h_1}{h} - \arcsin \frac{v}{\sqrt{g'h}}, \\ \xi_2 &= \arcsin \frac{h - 2h_1}{h} + \arcsin \frac{v}{\sqrt{g'h}}. \end{aligned}$$

Tout comme pour le mode barotrope, le mode barocline peut être sous ou sur-critique et donc quatre combinaisons sont possibles pour décrire les équations de Saint-Venant à deux couches. Le critère pour qu'un régime barocline soit sous-critique ou sur-critique est lié au signe des valeurs propres λ_1 et λ_2 :

Le régime est sous-critique si :

$$(2.148) \quad \left(u + v - 2v \frac{h_1}{h}\right)^2 < \frac{h_1 h_2}{h^2} (g'h - v^2),$$

et le régime est sur-critique si :

$$(2.149) \quad \left(u + v - 2v \frac{h_1}{h}\right)^2 > \frac{h_1 h_2}{h^2} (g'h - v^2);$$

nous renevons plus bas sur ces conditions.

Nous commençons l'étude du mode barocline en considérant $V_s = (h_{1,s}, v_s)$ une solution stationnaire constante pour le mode barocline, telle que $g'h_{1,s} - v_s^2 > 0$. Comme la vitesse barocline est la différence entre u_1 et u_2 et nous avons supposé que cette différence est petite, c'est naturel de choisir $v_s = 0$.

Le premier cas correspond à une solution stationnaire subsonique ; cela revient à $v_s = 0$ et (voir (2.148)) :

$$(2.150) \quad u^2 < g' \frac{h_{1,s}(h - h_{1,s})}{h}.$$

Plus exactement, nous exigeons que :

$$(2.151) \quad u^2 - g' \frac{h_{1,s}(h - h_{1,s})}{h} \leq -c_0^2 \text{ et } 2\underline{h}_0 \leq h_{1,s} \leq 2\bar{h}_0,$$

où $c_0, \underline{h}_0, \bar{h}_0$ sont des constantes données, positives.

Les conditions initiales pour le mode barocline dans le régime sous-critique sont :

$$(2.152) \quad V_0 = (h_{1,0}, v_0),$$

où $h_{1,0}$ et v_0 satisfont les conditions (à comparer avec (2.148) et (2.150)) :

$$(2.153) \quad \begin{cases} \left(u + v_0(x) - 2v_0(x) \frac{h_{1,0}(x)}{h}\right)^2 - \frac{h_{1,0}(x)(h - h_{1,0}(x))}{h^2} (g'h - v_0^2(x)) \leq -c_0^2, \\ g'h - v_0^2(x) \geq \frac{3}{4}g'h, \forall x \in (0, L), \\ 2\underline{h}_0 \leq h_{1,0}(x) \leq 2\bar{h}_0, \forall x \in (0, L), \end{cases}$$

où \bar{h}_0 est choisi tel que $h - 3\bar{h}_0 > 0$.

Pour trouver les conditions aux bords, nous étudions le signe des valeurs propres de la matrice $A(V)$. Si la vitesse caractéristique λ_1 est positive, cela signifie que l'onde correspondante à ξ_1 se propage de gauche à droite et rentre dans le domaine, donc nous avons besoin d'imposer une condition au bord sur ξ_1 à $x = 0$. La deuxième vitesse caractéristique λ_2 est alors négative et donc nous imposons une condition au bord pour ξ_2 à $x = L$. Les conditions aux bords pour le mode barocline sous-critique s'écrivent donc :

$$(2.154) \quad \begin{cases} \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{g'h}}\right) + \arcsin\left(\frac{h-2h_1}{h}\right) = \arcsin\left(\frac{h-2h_{1,s}}{h}\right) + g_L(t), & \text{à } x = L \\ \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{g'h}}\right) - \arcsin\left(\frac{h-2h_1}{h}\right) = -\arcsin\left(\frac{h-2h_{1,s}}{h}\right) + g_0(t), & \text{à } x = 0. \end{cases}$$

De manière intuitive, les conditions aux bords nous disent qu'à la frontière, le régime est une perturbation par $g = (g_0, g_L)$ de l'état stationnaire.

Pour le cas sur-critique, nous commençons par considérer une solution stationnaire $V_s = (h_{1,s}, 0)$ telle que (voir (2.149)) :

$$(2.155) \quad u^2 > \frac{g'h_{1,s}(h-h_{1,s})}{h}.$$

Plus exactement, nous demandons à la solution stationnaire de vérifier :

$$(2.156) \quad u^2 - g'\frac{h_{1,s}(h-h_{1,s})}{h} \geq c_0^2 \quad \text{et} \quad 2\underline{h}_0 \leq h_{1,s} \leq 2\bar{h}_0,$$

où $c_0, \underline{h}_0, \bar{h}_0$ sont des constantes données, positives.

La condition initiale est :

$$(2.157) \quad V_0 = (h_{1,0}, v_0),$$

avec $h_{1,0}, v_0$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$(2.158) \quad \begin{aligned} \left(u + v_1(x) - 2v_0(x)\frac{h_{1,0}(x)}{h}\right)^2 - \frac{h_{1,0}(x)(h-h_{1,0}(x))}{h^2} &\geq c_0^2, \quad \forall x \in (0, L), \\ g'h - v_0^2(x) &\geq \frac{3}{4}g'h, \quad \forall x \in (0, L), \\ 2\underline{h}_0 &\leq h_{1,0}(x) \leq 2\bar{h}_0, \quad \forall x \in (0, L), \end{aligned}$$

où \bar{h}_0 est choisi tel que $h - 3\bar{h}_0 > 0$.

Dans le cas sur-critique, les deux valeurs propres de l'opérateur $A(V)$ sont positives. Cela signifie que nous avons besoin de deux conditions aux limites à $x = 0$, donc les conditions aux limites naturelles sont :

$$(2.159) \quad V = V_s + g(t), \quad \text{à } x = 0,$$

avec $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$.

Par des méthodes similaires à celles utilisées dans [22] et [12], nous montrons que le mode barocline des équations de Saint-Venant à deux couches est bien-posé avec les conditions aux limites proposées. Plus précisément, nous montrons dans [23] le résultat suivant :

Théorème 2.5. Soit $V_0 = (h_{1,0}, v_0)$ donné dans $(H^{7/2}(0, L))^2$ satisfaisant (2.153) et g donné dans $(H^{7/2}(0, T))^2$ satisfaisant certaines conditions de compatibilité du type (2.123). Alors, il existe un temps $T_* > 0$ dépendant des données initiales et une solution unique $V = (h_1, v)$ pour le problème (2.139), (2.152), (2.154) (ou (2.159)) sur $(0, T_*)$ tels que :

$$V \in (H^3((0, L) \times (0, T_*)))^2.$$

Nous présentons deux exemples qui ont été utilisés en [5] pour tester par simulations numériques les conditions aux limites que nous avons proposées. Dans tous les cas, l'accélération gravitationnelle est de $g = 9.812 \text{ m/s}^2$, la gravité réduite est $g' = 1 \text{ m/s}^2$ et la longueur du domaine est 10^3 km . Les simulations numériques présentées ici ainsi que d'autres exemples se trouvent dans l'article [5]; voir aussi [26].

Exemple : Petite perturbation d'un état stationnaire

La topographie du fond est donnée par la fonction B suivante :

$$(2.160) \quad B(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \cos\left(\frac{\pi(x - \frac{L}{2})}{\kappa}\right), & \text{si } |x - \frac{L}{2}| \leq \kappa, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où δ contrôle la hauteur de la bosse et κ mesure la largeur de la bosse. Dans cet exemple, la hauteur est $\delta = 5 \times 10^3$ et la largeur est $\kappa = L/10$.

La condition initiale est une petite perturbation de la solution stationnaire :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0, \quad v(x, 0) = v_0, \\ h_1(x, 0) &= h_{1,0} - B(x), \quad h(x, 0) = \begin{cases} h_0 - B(x) + \epsilon h_0, & \text{si } \kappa \leq x \leq 2\kappa, \\ h_0 - B(x), & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ici $u_0 = 0 \text{ m/s}$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $h_{1,0} = 7000 \text{ m}$, $h_0 = 10^4 \text{ m}$ décrivent la solution stationnaire et le paramètre constant ϵ , qui contrôle l'amplitude de la perturbation est $\epsilon = 0.2$ ou -0.2 . Dans cet exemple les modes barocline et barotrope sont tous deux sous-critiques et nous considérons les conditions aux limites correspondantes.

Les figures 2.5 et 2.6 montrent les surfaces libres $h + B(x)$ et $h_1 + B(x)$ à différents instants de temps. Le temps de calcul est T égal à 24000 secondes, soit environ 7 heures. Dans toutes les simulations numériques le nombre de noeux est $M = 400$ et le nombre de pas en temps est $N = 5 \times 10^5$. Les résultats illustrent les deux cas $\epsilon = -0.2, 0.2$.

Dans les figures 2.5 et 2.6, nous pouvons voir que la petite perturbation initiale provoque l'apparition de deux ondes (une barocline et une barotrope) qui se propagent avec les vitesses caractéristiques $\pm\sqrt{g\bar{h}}$ et respectivement $\pm\sqrt{g'h_1h_2/h}$, respectivement vers la droite et vers la gauche. Après approximativement 3210 secondes, l'onde barotrope devient stationnaire et il ne reste plus que l'onde barocline. Comme la vitesse de l'onde barocline est plus petite que la vitesse de l'onde barotrope, l'onde barocline prend plus de temps pour quitter le domaine. Finalement les deux ondes sortent librement le domaine sans

provoquer de réflexions à la frontière et le fluide atteint l'état stationnaire. Cela montre que les conditions aux limites que nous avons proposées dans [23] sont bien transparentes dans ce cas.

Exemple : Petite perturbation globale d'un état quasi-stationnaire

Dans cet exemple nous considérons un régime quasi-stationnaire pour lequel uh est une constante non-nulle dans le mode barotrope avec une petite perturbation globale (à comparer la Figure 2.5 ou la Figure 2.6 à $t = 0$, où nous pouvons voir la perturbation locale, avec la Figure 2.7 à $t = 0$, où la perturbation est globale). Dans les simulations numériques pour le mode barocline sous-critique et le mode barocline sur-critique, nous choisissons des valeurs différentes pour u_0 .

Les conditions initiales sont données par :

$$(2.161) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \frac{u_0}{1 + \varepsilon} (1 + \varepsilon \cos(\frac{2\pi mx}{L})), \\ v(x, 0) = v_0, \\ h_1(x, 0) = h_{1,0} - B(x), \\ h(x, 0) = \frac{h_0}{1 + \varepsilon} (1 + \varepsilon \cos(\frac{2\pi mx}{L})), \end{cases}$$

où ε est un paramètre qui contrôle l'intensité de la perturbation ($\varepsilon = 0.1$), et $m = 20$ est la fréquence de l'onde perturbée. Les autres constantes sont :

$$u_0 = 10 \text{ ou } 60 \text{ m/s}, \quad v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad h_{1,0} = 7000 \text{ m et } h_0 = 10^4 \text{ m},$$

et la fonction $B(x)$ qui décrit la topographie du fond est donnée par (2.160) avec $\delta = 4 \times 10^3 \text{ m}$ et $\kappa = L/10$.

Quand u_0 est égal à 10 ou 60 m/s, le régime est barotrope sous-critique et barocline sous-critique ou, respectivement, barotrope sous-critique et barocline sur-critique.

Les figures 2.7 montrent les surfaces libres $h + B(x)$ et $h_1 + B(x)$ à différents instants de temps dans le cas d'un régime où le mode barotrope est sous-critique et le mode barocline est sous-critique. Le temps de calcul T est de 36000 secondes.

Les figures 2.8 montrent les surfaces libres $h + B(x)$ et $h_1 + B(x)$ à différents instants de temps dans le cas d'un régime où le mode barotrope est sous-critique et le mode barocline est sur-critique. Le temps de calcul T est de 60000 secondes. Dans toutes les simulations numériques le nombre de pas en espace est $M = 400$ et le nombre de pas en temps est $N = 5 \times 10^5$.

Dans les figures 2.7, nous remarquons que les ondes barotropes et baroclines générées par la perturbation induite par la condition initiale sortent librement du domaine sans générer de réflexions aux frontières et le résultat est similaire avec celui montré dans le premier exemple.

Dans les figures 2.8, nous observons que les ondes barotropes ont une réponse rapide et elles sortent librement du domaine. En raison de la présence de la bosse, les ondes baroclines forment une onde de choc qui sort du domaine plus lentement. Après un certain temps, toutes les ondes ont quitté le domaine.

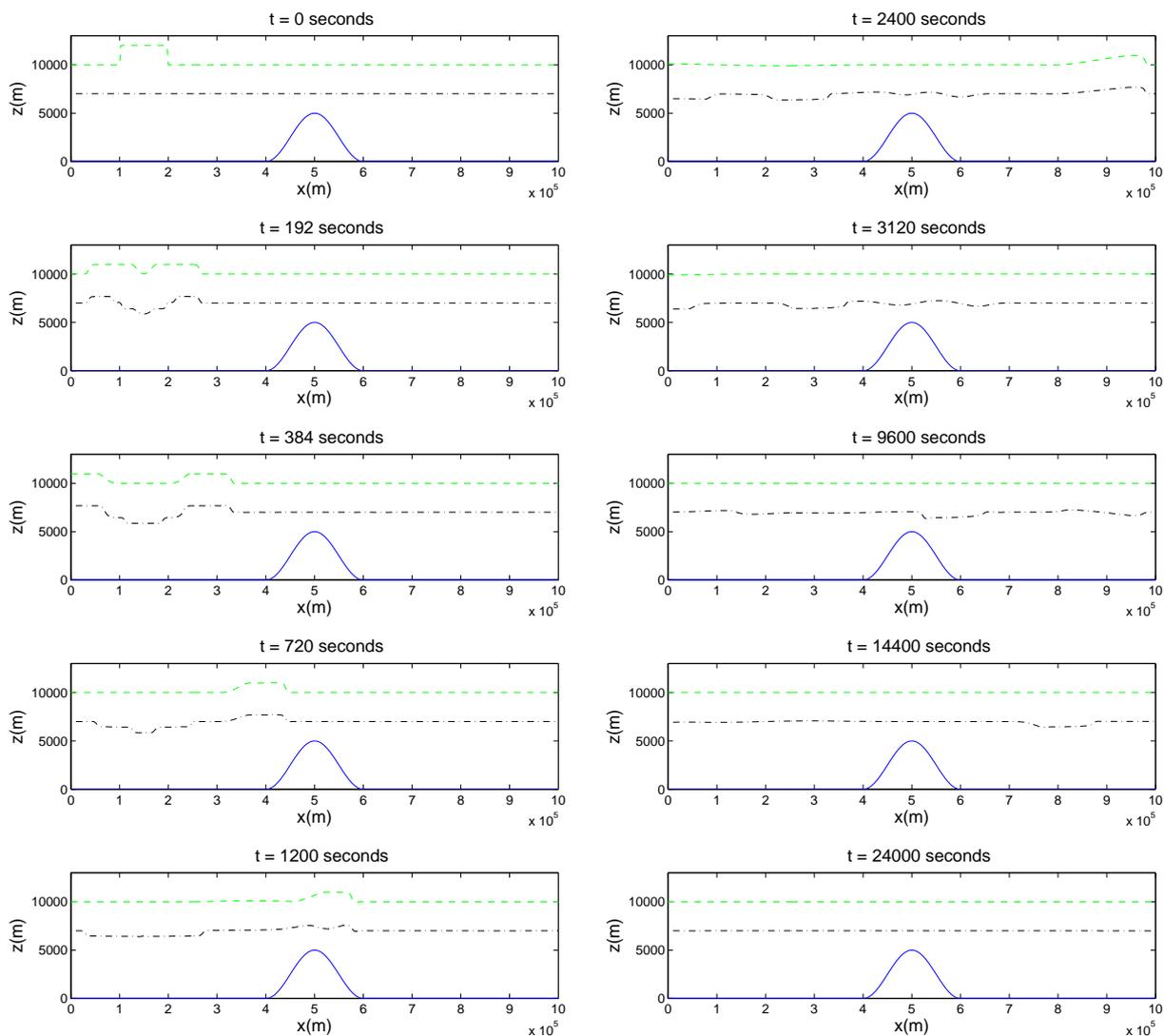


FIGURE 2.5 – Hauteur des surfaces libres $h + B(x)$ et $h_1 + B(x)$ aux différents temps, indiqués lorsque $\epsilon = 0.2$. La ligne pleine représente la topographie du fond, les deux autres lignes représentent la surface libre $h + B(x)$ (le haut de la couche supérieure) et respectivement la surface libre $h_1 + B(x)$ (le haut de la première couche).

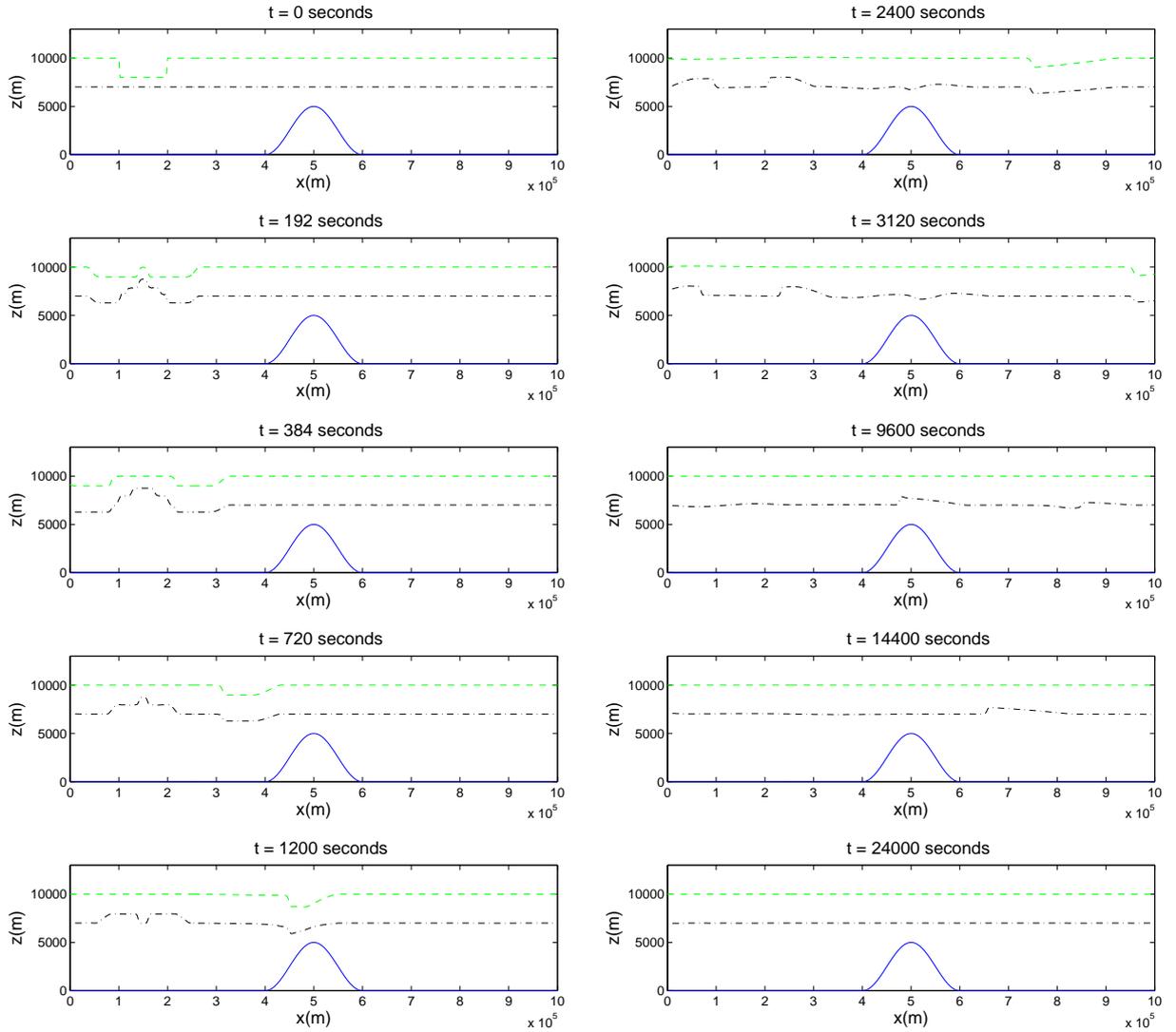


FIGURE 2.6 – Hauteur des surfaces libres $h + B(x)$ et $h_1 + B(x)$ aux différents temps, indiqués lorsque $\epsilon = -0.2$. La ligne pleine représente la topographie du fond, les deux autres lignes représentent la surface libre $h + B(x)$ (le haut de la couche supérieure) et respectivement la surface libre $h_1 + B(x)$ (le haut de la première couche).

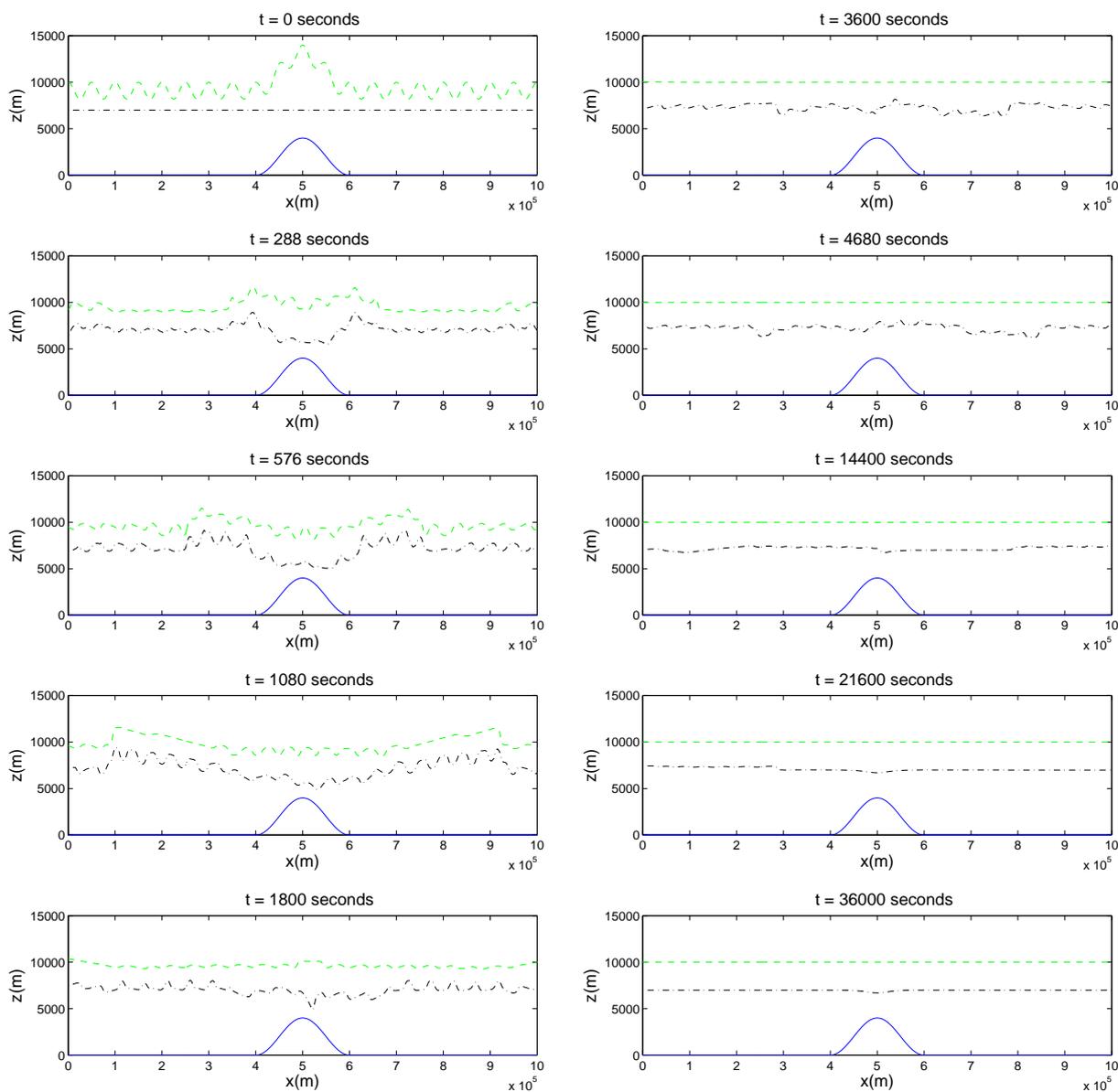


FIGURE 2.7 – Hauteur des surfaces libres $h + B(x)$ et $h_1 + B(x)$ aux différents temps dans le cas d'un régime où les modes barotrope et barocline sont sous-critiques. La ligne pleine représente la topographie du fond, les deux autres lignes représentent la surface libre $h + B(x)$ (le haut de la couche supérieure) et respectivement la surface libre $h_1 + B(x)$ (le haut de la première couche).

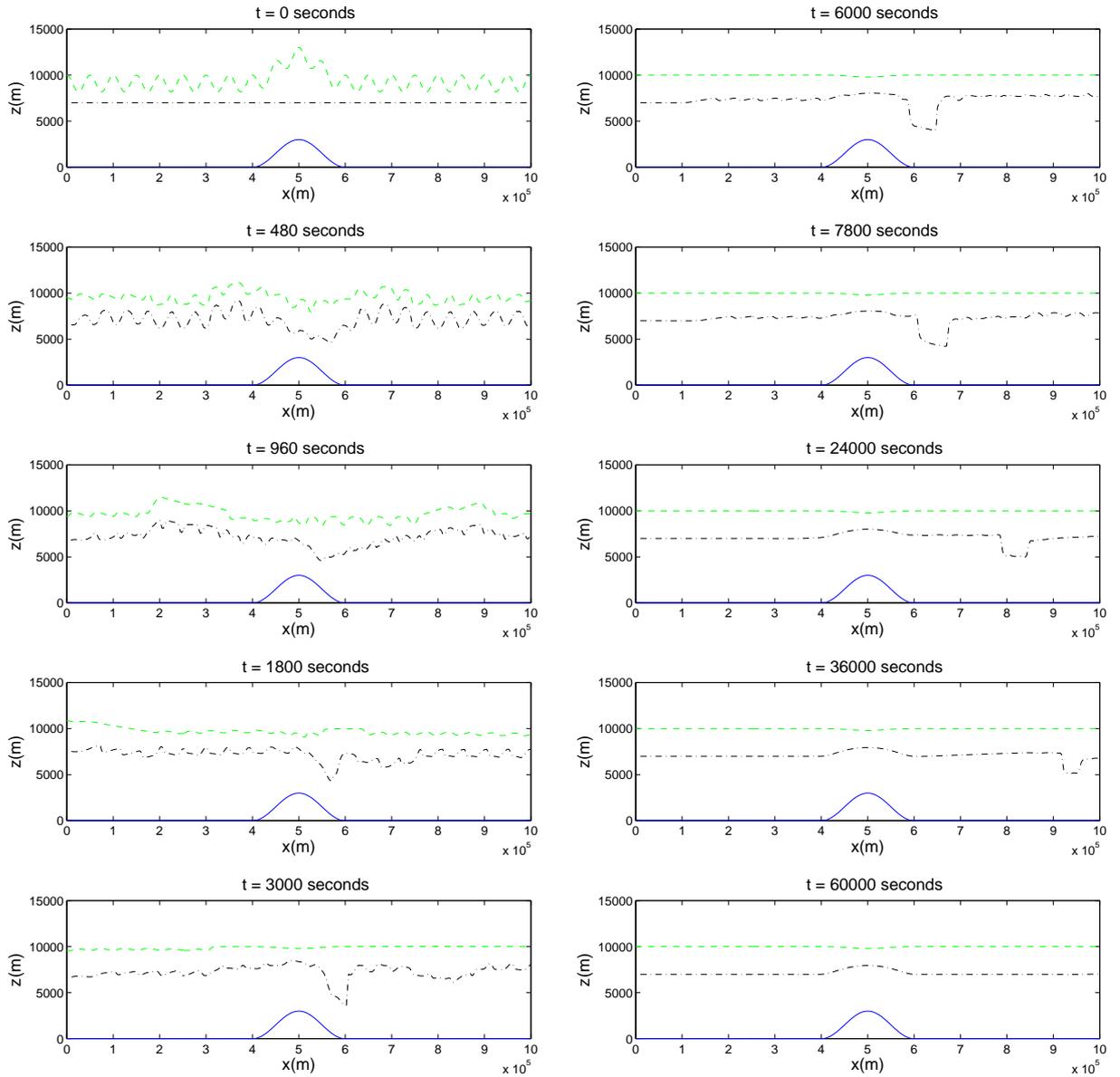


FIGURE 2.8 – Hauteur des surfaces libres $h + B(x)$ et $h_1 + B(x)$ aux différents temps dans le cas d'un régime où le mode barotrope est sous-critique et le mode barocline est sur-critique. La ligne pleine représente la topographie du fond, les deux autres lignes représentent la surface libre $h + B(x)$ (le haut de la couche supérieure) et respectivement la surface libre $h_1 + B(x)$ (le haut de la première couche).

Bibliographie

- [1] E. AUDUSSE, *A multilayer Saint-Venant model : derivation and numerical validation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 5 (2005), no. 2, 189–214.
- [2] E. BLAYO ET L. DEBREU, *Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables*, Ocean Modelling (2005).
- [3] A. F. BENNETT ET P. E. KLOEDEN, *Boundary conditions for limited-area forecasts*, J. Atmospheric Sci., 35(6) (1978), 990-996.
- [4] S. BENZONI-GAVAGE ET D. SERRE, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations, First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [5] A. BOUSQUET, M. PETCU, M.C. SHIUE, R. TEMAM ET J. TRIBBIA, *Boundary conditions for limited area models*, en préparation.
- [6] L. COMTET, *Advanced combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, 1978.
- [7] F. FAÀ DI BRUNO, *Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel*, vol. 1, London : John W. Parker and Son, West Strand, 1857.
- [8] J. G. CHARNEY, R. FJÖRTOFT ET J. VON NEUMANN, *Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation*, Tellus, (1950) 2, pp. 237-254.
- [9] B. ENGQUIST ET L. HALPERN, *Far field boundary conditions for computation over long time*, Appl. Numer. Math. 4 (1988), no. 1, 21–45
- [10] B. ENGQUIST ET A. MAJDA, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comp. 31 (1977), no. 139, pp. 629–651.
- [11] O. GUÈS, *Probleme mixte hyperbolique quasi-lineaire caracteristique*, Comm. Partial Diff. Eq., **15** (1990), pp. 595–645.
- [12] A. HUANG, M. PETCU ET R. TEMAM *Supercritical Shallow Water equations with topography*, à paraître dans Annals Univ. Bucharest
- [13] L. HALPERN ET J. RAUCH, *Absorbing boundary conditions for diffusion equations*, Numer. Math. 71 (1995), no. 2, pp. 185–224.

- [14] A. MAJDA, *Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow*, in “Frontiers of the Mathematical Sciences : 1985,” (New York, 1985), Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), S187–S220.
- [15] A. J. MAJDA, “Compressible Fluid Flows and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables,” Springer-Verlag, New York, 1984.
- [16] A. J. MAJDA ET A. L. BERTOZZI, “Vorticity and Incompressible Flow,” Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge University Press, New York, 2002.
- [17] A. MAJDA ET S. OSHER, *Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary*, Comm. Pure Appl. Math., **28** (1975), pp. 607–675.
- [18] A. McDONALD, *Transparent boundary conditions for the shallow water equations : testing in a nested environment*, Mon. Wea. Rev., 131 (2003), pp. 698–705.
- [19] J. NYCANDER, A. MCC. HOGG ET L. M. FRANKCOMBE, *Open boundary conditions for nonlinear channel flow*, Ocean Modelling, 24 (2008), pp. 108–121.
- [20] J. OLIGER ET A. SUNDSTROM, *Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics*, SIAM J. Appl. Math., 35 (1978), pp. 419–446.
- [21] M. PETCU ET R. TEMAM, *The one dimensional shallow water equations with Dirichlet boundary conditions on the velocity*, DCDS-S, 4(1), (2011), pp. 209–222.
- [22] M. PETCU ET R. TEMAM, *The Shallow Water equations with transparent boundary conditions*, à paraître dans *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.
- [23] M. PETCU ET R. TEMAM, *An interface problem : the two-layer Swallow Water equations*, en préparation
- [24] J. M. RAKOTOSON, R. TEMAM ET J. TRIBBIA, *Remarks on the nonviscous shallow water equations*, Indiana University Mathematics Journal, **57** (2008), pp. 2969–2998.
- [25] A. ROUSSEAU, R. TEMAM ET J. TRIBBIA, *Boundary value problems for the inviscid primitive equations in limited domains*, in Computational Methods for the Oceans and the Atmosphere, Special Volume of the Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet, Ed, R. Temam and J. Tribbia, Guest Eds, Elsevier, Amsterdam, (2009), pp. 377–385.
- [26] M.-C. SHIUE, J. LAMINIE, R. TEMAM ET J. TRIBBIA, *Boundary value problems for the shallow water equations with topography*, Journal of Geophysical Research-Oceans, 116 (2011).
- [27] R. TEMAM ET J. TRIBBIA, *Open boundary conditions for the primitive and Boussinesq equations*, J. Atmospheric Sci., 60 (2003), pp. 2647–2660.

- [28] G. B. WHITHAM, *Linear and nonlinear waves*, Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [29] T. WARNER, R. PETERSON ET R. TREADON, *A tutorial on lateral boundary conditions as a basic and potentially serious limitation to regional numerical weather prediction*, Bull. Amer. Meteor. Soc., 78(11) (1997), pp. 2599 – 2617.

Chapitre 3

Applications et méthodes numériques

Ce chapitre décrit un certain nombre de résultats numériques, obtenus au fil des années. Les sujets ne sont pas liés : le premier résultat propose un algorithme parallèle pour calculer la solution d'une équation différentielle. L'algorithme a des applications diverses dans plusieurs domaines comme les mathématiques financières, la robotique, la biologie, l'ingénierie, etc. Les autres résultats sont des études numériques adaptées à un problème spécifique issu de la physique, comme l'étude des fluides géophysiques ou les problèmes de changement de phase.

Nous commençons par décrire chaque article séparément :

Un algorithme pararéel modifié pour les EDOs d'ordre deux

L'algorithme pararéel est une méthode d'intégration en parallèle pour les problèmes d'évolution. Il a été introduit par Lions, Maday et Turinici dans [21], dans le but de calculer plus rapidement, en utilisant plusieurs processeurs, les solutions approchées d'équations différentielles ordinaires (EDOs). L'avantage de la méthode est qu'elle nous donne des approximations de la solution à un instant donné, avant de calculer une bonne approximation aux pas de temps antérieurs, mais la précision globale de la méthode après quelques itérations est comparable à la précision donnée par une méthode séquentielle, en utilisant une discrétisation fine en temps.

Etant donné le grand nombre d'applications dans des domaines différents (voir [1], [8], etc.), la méthode a reçu l'attention de nombreux auteurs et elle a été écrite sous plusieurs formes : Farhat et Chandesris [8] ont écrit la méthode sous la forme d'un algorithme appelé PITA (en anglais *Parallel Implicit Time Integrator*), et Gander et Vanderwalle [17] l'ont écrit comme une méthode de tir multiple. Dans [15], [1], [8], les auteurs montrent que

l'algorithme pararéel produit une accélération importante pour les EDOs d'ordre un, par contre la méthode n'a pas le même potentiel pour certaines EDOs d'ordre deux (voir aussi [17]). Dans [9] les auteurs proposent un algorithme de PITA modifié, adapté aux EDOs d'ordre deux.

Dans [16], nous montrons l'équivalence pour les problèmes linéaires, entre l'algorithme proposé par Farhat et al. [8] et la méthode de tir multiple et nous proposons une méthode de tir multiple adaptée aux ODEs d'ordre deux, méthode qui est équivalente pour le cas linéaire à l'algorithme de PITA modifié, introduit dans [9].

Nous présentons d'abord la méthode de tir multiple sous la forme introduite par Gander et Vandewalle dans [17] et nous montrons que pour les problèmes linéaires cette méthode est équivalente à l'algorithme de PITA introduit par Farhat dans [8].

La motivation de l'algorithme pararéel est de calculer en parallèle une solution approchée pour le système des EDOs :

$$(3.1) \quad u'(t) = f(u(t)), \quad t \in (0, T), \quad u(0) = u_0,$$

avec $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ et $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$.

L'algorithme utilise deux propagateurs : le propagateur $G(T_n, T_{n-1}, x)$ qui donne une approximation grossière pour $u(T_n)$, u étant la solution exacte du problème (3.1) avec $u(T_{n-1}) = x$ comme condition initiale et un propagateur fin $F(T_n, T_{n-1}, x)$ qui donne une approximation plus fine pour $u(T_n)$.

Plus exactement, nous commençons par décomposer l'intervalle de temps $\Omega = (0, T)$ en N sous-domaines $\Omega_n = (T_{n-1}, T_n)$ avec $n = 1, 2, \dots, N$ et $T_n - T_{n-1} = \Delta T$. L'algorithme opère de la façon suivante :

- Pas 0 : L'algorithme est initialisé avec une approximation initiale $\{U_n^0\}_n$, $n = \overline{0, N}$, qui peut être trouvée en utilisant le propagateur grossier de manière séquentielle :

$$(3.2) \quad U_{n+1}^0 = G(T_{n+1}, T_n, U_n^0), \quad U_0^0 = u_0.$$

- Pas $(k+1)$: La solution approchée est réévaluée en utilisant à la fois le propagateur fin et le propagateur grossier :

$$(3.3) \quad U_{n+1}^{k+1} = G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1}) + F(T_{n+1}, T_n, U_n^k) - G(T_{n+1}, T_n, U_n^k).$$

Nous remarquons qu'au pas initial l'algorithme est séquentiel mais il n'est pas coûteux car nous utilisons un propagateur grossier. Pendant l'itération (3.3), l'approximation peut gagner en précision car nous utilisons le propagateur fin F . L'avantage significatif de la méthode par rapport à une méthode séquentielle utilisant un propagateur fin uniquement est le coût de calcul. Plus exactement, au pas $k+1$ nous connaissons déjà toutes les valeurs U_n^k , pour tous les n , donc le calcul coûteux de $F(T_{n+1}, T_n, U_n^k)$ peut être fait en parallèle et (3.3) est réduit à un calcul séquentiel au coût comparable à celui de $G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1})$.

Nous rappelons un résultat sur la convergence de la méthode, démontré dans [15] :

Théorème 3.1. *Soient G une méthode numérique satisfaisant la propriété de Lipschitz :*

$$(3.4) \quad |G(t + \Delta T, t, v) - G(t + \Delta T, t, w)| \leq (1 + C\Delta T)|v - w|,$$

et un propagateur fin F qui est en fait exact, le progateur G étant donné par une méthode d'ordre p :

$$(3.5) \quad F(T_n, T_{n-1}, v) - G(T_n, T_{n-1}, v) = c_{p+1}(v)\Delta T^{p+1} + c_{p+2}(v)\Delta T^{p+2} + \dots$$

Alors l'erreur au pas k , pour l'algorithme pararéel, satisfait l'estimation suivante :

$$(3.6) \quad |u(T_n) - U_n^k| \leq C_1 \frac{(T_n)^{k+1}}{(k+1)!} e^{C_2(T_n - T_{k+1})} \Delta T^{p(k+1)}.$$

Nous présentons aussi l'algorithme de PITA introduit par Farhat et al. dans [8]. Nous considérons le système des EDOs linéaire suivant :

$$(3.7) \quad u'(t) = Au(t) + b(t),$$

avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b(\cdot) \in \mathbb{R}^N$.

L'intervalle de temps $[0, T]$ est divisé en N sous intervalles Ω_n de longueurs égales ΔT , qui forment la grille grossière. Chaque sous intervalle est divisé en J sous intervalles de dimension Δt , formant la grille fine. L'algorithme PITA est le suivant :

- Pas 0 : Nous nous donnons une approximation initiale U_n^0 , $0 \leq n \leq N$ pour la solution, en appliquant une méthode séquentielle sur la grille grossière.
- Pas $k + 1$:
 - La solution approchée U_n^k est utilisée comme condition initiale pour le problème sur chaque Ω_n et on applique une méthode séquentielle sur chaque grille fine dans Ω_n :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} (u_n^k)'(t) &= Au_n^k(t) + b(t), \quad \text{dans } \Omega_n, \\ u_n^k(T_n) &= U_n^k. \end{aligned}$$

Les calculs peuvent être faits en parallèle pour chaque sous-intervalle.

- Evaluer le saut :

$$(3.9) \quad S_n^k = u_{n-1}^k(T_n) - U_n^k, \quad 1 \leq n \leq N_{ts},$$

sur la grille grossière.

- Résoudre sur la grille grossière le problème de correction :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} (c_n^k)'(t) &= Ac_n^k(t), \\ c_0^k(T_0) &= 0, \\ c_n^k(T_n) &= c_{n-1}^k(T_n) + S_n^k, \end{aligned}$$

et calculer les corrections $C_n^k = c_{n-1}^k(T_n)$.

– Réévaluer la solution en utilisant la formule :

$$(3.11) \quad U_n^{k+1} = u_{n-1}^k(T_n) + C_n^k = U_n^k + S_n^k + C_n^k, \quad \text{pour tous les } n, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Nous montrons le résultat suivant (voir [16]) :

Proposition 3.1. *Pour le problème linéaire (3.7), la méthode de PITA est équivalente à la méthode de tir multiple (3.2), (3.3).*

Démonstration. Nous remarquons d'abord que les premiers pas pour les deux méthodes coïncident. Nous pouvons réécrire la méthode de PITA en utilisant les deux propagateurs et nous trouvons que les sauts sont calculés avec la formule :

$$S_n^k = F(T_n, T_{n-1}, U_{n-1}^k) - U_n^k.$$

Comme les sauts sont propagés sur la grille grossière, les corrections sont données par :

$$(3.12) \quad C_{n+1}^k = G(T_{n+1}, T_n, C_n^k + S_n^k) - G(T_{n+1}, T_n, 0).$$

En utilisant la formule (3.11), nous trouvons que la nouvelle solution est :

$$(3.13) \quad U_n^{k+1} = u_{n-1}^k(T_n) + C_n^k = U_n^k + S_n^k + C_n^k,$$

et donc nous avons :

$$(3.14) \quad S_n^k + C_n^k = U_n^{k+1} - U_n^k.$$

Réécrivant la formule (3.11) à l'aide du propagateur fin et utilisant la linéarité, nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{k+1} &= F(T_{n+1}, T_n, U_n^k) + C_{n+1}^k \\ &= F(T_{n+1}, T_n, U_n^k) + G(T_{n+1}, T_n, C_n^k + S_n^k) - G(T_{n+1}, T_n, 0) \\ &= F(T_{n+1}, T_n, U_n^k) + G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1} - U_n^k) - G(T_{n+1}, T_n, 0) \\ &= F(T_{n+1}, T_n, U_n^k) + G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1}) - G(T_{n+1}, T_n, U_n^k), \end{aligned}$$

qui coïncide avec la formule (3.3) pour la méthode du tir multiple. □

Quand l'algorithme pararéel est appliqué aux EDOs d'ordre deux

$$(3.15) \quad Mq'' + Dq' + Kq = f(t), \quad q(t_0) = q_0, \quad q'(t_0) = q'_0;$$

avec $M, D, K \in \mathbf{R}^{N' \times N'}$, l'algorithme perd de son efficacité (voir [9], [26]). Pour comprendre la source de cette difficulté, nous considérons $f(t) = 0$ et nous écrivons (3.15) sous la forme équivalente d'une EDO d'ordre un (en supposant que la matrice M est inversible) :

$$(3.16) \quad u' = Au, \quad u(T_0) = u_0,$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -M^{-1}D & -M^{-1}K \\ Id & O \end{pmatrix},$$

et $u_0 = (q'_0, q_0)' \in \mathbb{R}^N$, $N = 2N'$.

La solution exacte de (3.16) est donnée par une superposition des fréquences naturelles du système et quand les valeurs propres de la matrice A sont purement imaginaires, un phénomène de battement/résonance, d'interférence entre deux fréquences légèrement différentes apparaît dans le calcul de la solution approchée. Supposons que α et β sont deux fréquences naturelles qui apparaissent dans U_n^{k+1} et U_n^k . La différence $U_n^{k+1} - U_n^k$ est caractérisée par les fréquences $(\alpha + \beta)/2$ et $(\alpha - \beta)/2$. Si α et β sont très proches, $(\alpha - \beta)/2$ est très petit et $(\alpha + \beta)/2$ est très proche de α et β , donc le résultat pour le calcul de $G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1}) - G(T_{n+1}, T_n, U_n^k)$ ne sera précis que dans le cas où ΔT est très petit.

Pour éviter cette difficulté, nous proposons dans [16] un algorithme pararéel modifié, adaptant une idée présentée dans [9]. Nous calculons $G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1} - U_n^k)$ de manière plus précise, sans rajouter des coûts de calcul supplémentaires. Nous calculons l'évolution de $U_n^{k+1} - U_n^k$ en utilisant le propagateur fin pour la partie du vecteur pour laquelle l'évolution est déjà connue et utilisons le propagateur grossier pour la partie restante. Plus exactement, nous définissons l'espace :

$$(3.17) \quad \mathcal{S}^k = \text{span}\{U_n^l; 0 \leq l \leq k, 0 \leq n \leq N\},$$

et au lieu de calculer $G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1} - U_n^k)$, nous calculons $K(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1} - U_n^k)$, avec K le propagateur hybride :

$$(3.18) \quad K(T_{n+1}, T_n, V) = F(T_{n+1}, T_n, P_k V) + G(T_{n+1}, T_n, (I - P_k)V).$$

Ici P_k est la projection orthogonale sur l'espace \mathcal{S}_k .

Pour les équations homogènes, l'algorithme pararéel modifié devient :

- Pas 0 : Commencer l'algorithme avec une approximation initiale $\{U_n^0\}_n$ $n = \overline{0, N}$:

$$U_{n+1}^0 = G(T_{n+1}, T_n, U_n^0), \quad U_0^0 = u_0.$$

Construire l'espace $\mathcal{S}_0 = \text{span}\{U_n^0\}$, et la projection orthogonale P_0 sur \mathcal{S}_0 .

- Pas $(k + 1)$:

- Calculer en parallèle les $F(T_{n+1}, T_n, U_n^k)$.
- Calculer :

$$(3.19) \quad U_{n+1}^{k+1} = F(T_{n+1}, T_n, P_k U_n^{k+1}) + G(T_{n+1}, T_n, (I - P_k)U_n^{k+1}).$$

- Nous avons besoin de calculer U_{n+1}^{k+1} :
- Calculer les coefficients $\{\alpha_{k_j}^l\}_{l,j}$ qui donnent

$$P_k U_n^{k+1} = \sum_{l=0}^k \sum_{j=0}^l \alpha_{k_j}^l U_{k_j}^l,$$

où les $U_{k_j}^l$ sont les vecteurs formant une base de l'espace \mathcal{S}_k .

On peut alors calculer

$$(3.20) \quad U_{n+1}^{k+1} = F(T_{n+1}, T_n, P_k U_n^{k+1}) + G(T_{n+1}, T_n, (I - P_k)U_n^{k+1}).$$

– Définir de manière itérative l'espace \mathcal{S}_{k+1} et la projection P_{k+1} . Trouver une base pour \mathcal{S}_{k+1} :

$$\mathcal{S}_{k+1} = Vect \{U_{k,j}^l, l, j \subset 0, \dots, k+1\}.$$

Pour le cas non-homogène, nous procédons de la même manière, mais nous avons besoin d'un pas de calcul avant le pas 0 :

- Pas -1 : Calculer les quantités $F(T_{n+1}, T_n, 0)$ et $G(T_{n+1}, T_n, 0)$,

pour pouvoir réévaluer la solution U_{n+1}^{k+1} (comparer à (3.20)) :

$$(3.21) \quad U_{n+1}^{k+1} = F(T_{n+1}, T_n, P_k U_n^{k+1}) + G(T_{n+1}, T_n, (I - P_k)U_n^{k+1}) - G(T_{n+1}, T_n, 0).$$

Nous montrons que l'algorithme de PITA modifié, décrit dans [9], est équivalent dans le cas linéaire à la méthode de tir multiple modifiée que nous proposons (la démonstration du résultat est similaire à celle pour la Proposition 3.1). L'algorithme de PITA modifié diffère de l'algorithme classique par la manière de calculer les corrections, cette fois-ci en utilisant à la fois la grille grossière et la grille fine. La formule (3.10) est remplacée par :

$$(3.22) \quad \begin{aligned} C_0^k &= 0, \\ C_{n+1}^k &= (F^J P^k + G(I - P_k))(C_n^k + S_n^k), \end{aligned}$$

où F et G sont les matrices qui décrivent respectivement les propagateurs sur la grille fine et grossière et P_k la projection sur l'espace \mathcal{S}^k .

Une analyse mathématique de la méthode de tir multiple modifiée est donnée dans [16]. Nous montrons aussi un résultat de convergence de la méthode en temps fini :

Théorème 3.2. *La méthode de tir multiple modifiée converge dès que $\mathcal{S}^{k-1} = \mathcal{S}^k$.*

L'étude des erreurs est donné par le résultat suivant :

Théorème 3.3. *Soient F et G deux propagateurs d'ordre p , alors l'erreur de la méthode de tir multiple modifiée satisfait, au pas k , l'estimation suivante :*

$$(3.23) \quad \|u(T_n) - U_n^k\| \leq C_1 \frac{T_n^{k+1}}{(k+1)!} e^{C_2(T_n - T_{k+1})} \Delta T^{p(k+1)} + C_3 T_n e^{C_2 \Delta T} \Delta t^p,$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes indépendantes des pas de temps Δt et ΔT .

Les démonstrations des Théorèmes 3.2 et 3.3 se trouvent dans [16].

Simulations numériques

Nous considérons comme modèle très simple le problème $u'' + u = 0$ avec les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$. L'intervalle de temps est $[0, 20]$, le pas de temps sur la

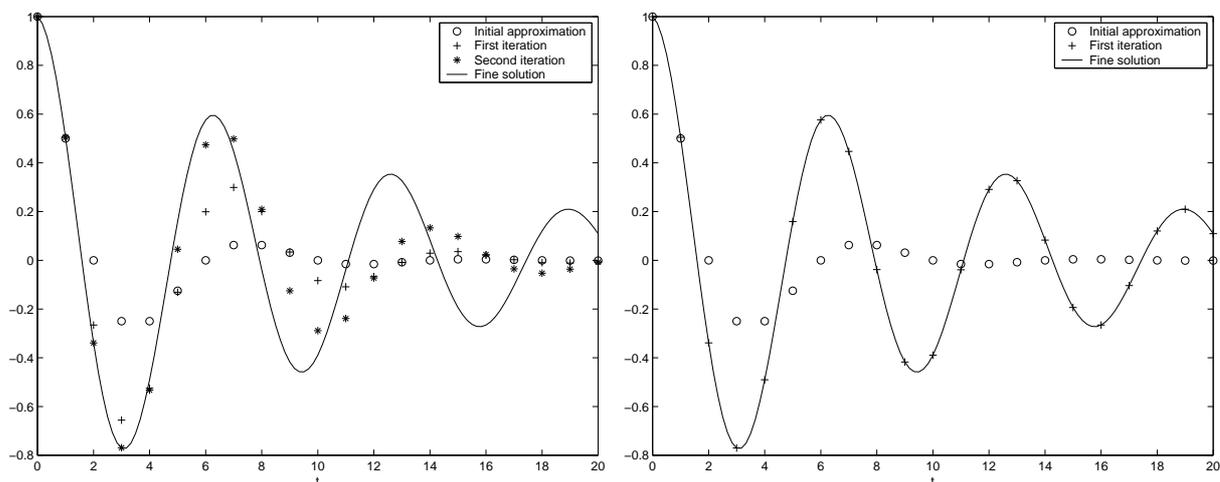


FIGURE 3.1 – Les premières itérations avec l’algorithme pararéel original et avec l’algorithme modifié.

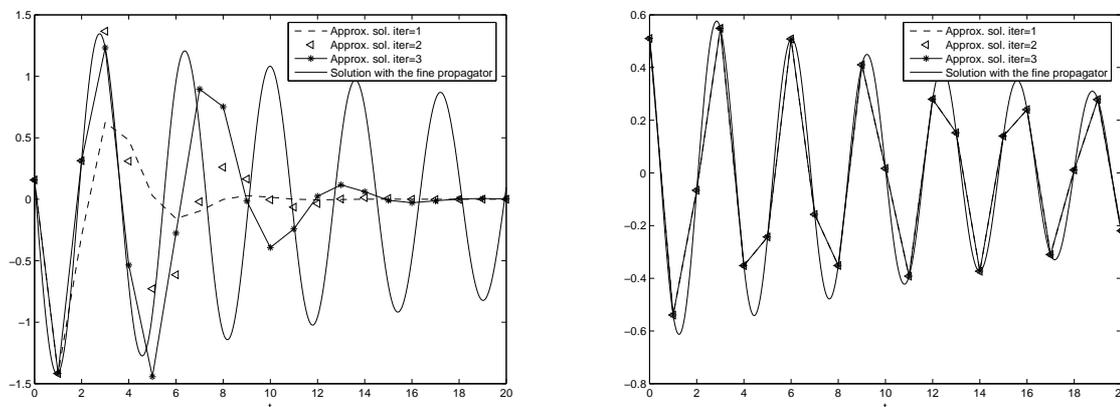


FIGURE 3.2 – Les premières itérations avec l’algorithme pararéel original et avec l’algorithme modifié.

grille grossière est $\Delta T = 1$ et le pas de temps sur la grille fine est $\Delta t = 1/6$. Nous comparons la solution, en utilisant d’abord l’algorithme pararéel original et ensuite l’algorithme modifié. Nous remarquons que, quand nous utilisons l’algorithme pararéel classique, la solution converge lentement et la convergence se détériore aux temps grands (les résultats sont plus satisfaisants pour des temps très courts). Par contre, avec l’algorithme pararéel classique, la solution converge après une seule itération. Ce résultat est une illustration du Théorème 3.2 : comme le problème a une dimension réduite, la solution fine est déjà contenue dans le sous-espace de projection après une seule itération.

Nous considérons aussi le modèle $u'' + Ku = 0$ où K est une matrice arbitraire de dimension 100 et $u \in \mathbf{R}^{100}$. Nous comparons la première composante de la solution, en utilisant d’abord l’algorithme pararéel original et ensuite l’algorithme modifié. Comme espéré, la solution obtenue en utilisant l’algorithme pararéel modifié converge rapidement (voir la Figure 3.11).

Le deuxième sujet présenté dans ce chapitre est l'étude numérique d'un modèle décrivant l'influence des frontières dans les processus de séparation de phases dans les mélanges binaires :

*Analyse numérique des équations de Cahn-Hilliard
avec des conditions dynamiques sur le bord*

Dans l'article [3] nous considérons les équations de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques :

$$(3.24) \quad u_t = \Delta w, \quad t > 0, x \in \Omega,$$

$$(3.25) \quad w = f(u) - \Delta u, \quad t > 0, x \in \Omega,$$

$$(3.26) \quad (1/\Gamma_s)u_t = \sigma_s \Delta_{\parallel} u - \lambda_s u - g_s(u) - \partial_n u, \quad t > 0, x \in \Gamma,$$

$$(3.27) \quad \partial_n w = 0, \quad t > 0, x \in \Gamma,$$

où Ω est le domaine toroïdal correspondant à des conditions aux limites périodiques :

$$\Omega = \prod_{i=1}^{d-1} (\mathbf{R}/(L_i \mathbf{Z})) \times (0, L_d), \quad L_i > 0, i = 1, \dots, d, \quad d = 2 \text{ ou } 3,$$

avec la frontière régulière :

$$\Gamma = \partial\Omega = \prod_{i=1}^{d-1} (\mathbf{R}/(L_i \mathbf{Z})) \times \{0, L_d\}.$$

Dans (3.24)-(3.27), $\Gamma_s > 0$, $\sigma_s > 0$, $\lambda_s > 0$ sont des constantes données, Δ est le laplacien et Δ_{\parallel} est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la frontière Γ , \mathbf{n} est la normale extérieure sur Γ et f et g_s sont des fonctions dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ satisfaisant les conditions de dissipativité suivantes :

$$(3.28) \quad \liminf_{|v| \rightarrow \infty} f'(v) > 0, \quad \liminf_{|v| \rightarrow \infty} g'_s(v) > 0.$$

Un choix typique est :

$$(3.29) \quad f(v) = v^3 - v \quad \text{and} \quad g_s(v) = k_s v - h_s \quad (v \in \mathbf{R}),$$

où $k_s > 0$ et $h_s \in \mathbf{R}$ sont des constantes. Le problème d'évolution (3.24)-(3.27) est complété par une conditions initiale $u(0) = u_0$. Un tel modèle a été considéré dans la littérature physique pour décrire la séparation de phases dans des systèmes confinés (voir [11],[12], [20]).

L'équation de Cahn-Hilliard avec conditions dynamiques sur le bord est dérivée de l'énergie libre :

$$(3.30) \quad \mathcal{E}(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right) dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\sigma_s}{2} |\nabla_{\parallel} u|^2 + \frac{\lambda_s}{2} |u|^2 + G_s(u) \right) d\sigma$$

où F est une primitive de f et G_s une primitive de g_s . La première intégrale est l'énergie de volume du matériau et la seconde intégrale est l'énergie de surface.

Si u est une solution régulière de (3.24)-(3.27), alors nous avons une dissipation de l'énergie \mathcal{E} , car :

$$(3.31) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u(t)) = - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{\Gamma_s} \int_{\Gamma} |u_t|^2 d\sigma, \quad t \geq 0.$$

De plus, la masse totale de u est conservée :

$$\int_{\Omega} u(t) dx = \int_{\Omega} u(0) dx, \quad t \geq 0.$$

L'étude théorique du problème (3.24)-(3.27) a été considérée dans [4], [13], [14], [18], [23], [24], [25], [28], etc, où les auteurs ont établi l'existence et l'unicité des solutions, la convergence vers l'équilibre ainsi que l'existence d'attracteurs exponentiels, dans différents cas de nonlinéarité (différentes fonctions f et g).

Du point de vue numérique, des schémas numériques ont été considérés dans [11], [12], [20] pour le problème (3.24)-(3.27), sans démontrer la convergence des schémas. Dans [3], nous proposons une discrétisation en espace par des éléments finis et nous étudions la convergence en temps et en espace du schéma. La discrétisation en espace considérée est une adaptation du schéma introduit par Elliott, French et Milner [7], pour le cas des équations de Cahn-Hilliard classiques.

Nous commençons par introduire le problème discrétisé en espace. Nous remarquons d'abord que les conditions de dissipativité (3.28) impliquent :

$$(3.32) \quad F(v) \geq c_1 v^2 - c_2, \quad G_s(v) \geq c_1 v^2 - c_2, \quad \forall v \in \mathbf{R},$$

pour des constantes $c_1 > 0$ et $c_2 \geq 0$. Au vu de (3.30) et (3.31), nous introduisons l'espace :

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme hilbertienne :

$$\|v\|_V = \left(\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}.$$

Les conditions au bord périodiques se retrouvent dans la définition de V . Par exemple, pour $d = 2$ une fonction $v \in H^1(\Omega)$ est L_1 -périodique dans la direction x_1 et $v|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)$ si et seulement si $v(\cdot, 0) \in H_{\text{per}}^1(0, L_1)$ et $v(\cdot, L_2) \in H_{\text{per}}^1(0, L_1)$.

Nous considérons aussi (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $|\cdot|_0$ la norme de $L^2(\Omega)$. De même, pour $k \in \mathbf{N}$, $\|\cdot\|_k$ est la norme dans $H^k(\Omega)$ et $|\cdot|_k$ la semi-norme associée :

$$\forall v \in H^k(\Omega), \quad \|v\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha v|_0^2 \quad \text{et} \quad |v|_k^2 = \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha v|_0^2.$$

La formulation variationnelle du problème (3.24)-(3.27) est celle-ci :

Trouver $(u, w) : [0, T] \rightarrow V \times V$ tels que :

$$(3.33) \quad \begin{aligned} (u_t, \varphi) &= -(\nabla w, \nabla \varphi), \\ (w, \chi) &= (f(u), \chi) + (\nabla u, \nabla \chi) + \sigma_s (\nabla_{\parallel} u, \nabla_{\parallel} \chi)_{\Gamma} + \lambda_s (u, \chi)_{\Gamma} \end{aligned}$$

$$(3.34) \quad + (g_s(u), \chi)_{\Gamma} + \Gamma_s^{-1} (u_t, \chi)_{\Gamma},$$

pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$ et pour tout $\chi \in V$.

Pour la discrétisation en espace, nous considérons une famille de décompositions quasi-uniformes $\{\Omega^h\}$ pour $\Pi_{i=1}^d[0, L_i]$ en d -simplexes, en prenant en compte les conditions au bord périodiques sur Ω , telle que $\{\Omega^h\}$ est une triangulation pour $\bar{\Omega}$. La triangulation Ω^h de $\bar{\Omega}$ induit une triangulation Γ^h de Γ en $(d-1)$ -simplexes. Pour une triangulation donnée $\Omega^h = \cup_{T \in \Omega^h} T$, nous définissons V^h comme l'espace des éléments finis conformes P^1 :

$$V^h = \{v^h \in C^0(\bar{\Omega}), v^h|_T \text{ affine } \forall T \in \Omega^h\}.$$

Nous notons que pour tout $v^h \in V^h$, la restriction $\varphi^h = v^h|_\Gamma$ sur la frontière est un élément fini conforme P^1 sur l'espace $H^1(\Gamma)$, construit sur la triangulation Γ^h . Nous appelons V_Γ^h cet espace de trace discret. Nous avons $V^h \subset V$ et V^h peut être vu comme la discrétisation conforme de V ; V^h est utilisé en même temps comme discrétisation pour $H^1(\Omega)$ et pour V .

La formulation discrète de (3.33)-(3.34) est celle-ci :

Trouver $(u^h, w^h) : [0, T] \rightarrow V^h \times V^h$ tel que :

$$(3.35) \quad (u_t^h, \varphi) = -(\nabla w^h, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V^h,$$

$$(3.36) \quad \begin{aligned} (w^h, \chi) &= (f(u^h), \chi) + (\nabla u^h, \nabla \chi) + \sigma_s(\nabla_{\parallel} u^h, \nabla_{\parallel} \chi)_\Gamma + \lambda_s(u^h, \chi)_\Gamma \\ &\quad + (g_s(u^h), \chi)_\Gamma + \Gamma_s^{-1}(u_t^h, \chi)_\Gamma, \quad \forall \chi \in V^h. \end{aligned}$$

Dans [3], nous montrons d'abord l'existence et l'unicité de solution pour (3.35)-(3.36), ainsi qu'une estimation d'énergie pour la solution discrète :

Proposition 3.2. *Pour tout $u_0^h \in V^h$, le problème (3.35)-(3.36) admet une solution unique*

$$(u^h, w^h) \in C^1([0, +\infty); V^h \times V^h)$$

telle que $u^h(0) = u_0^h$. De plus,

$$(3.37) \quad \mathcal{E}(u^h(t)) + \int_0^t |w^h|_1^2 + \Gamma_s^{-1}|u_t^h|_{0,\Gamma}^2 ds \leq \mathcal{E}(u^h(0)), \quad \forall t \geq 0.$$

Nous montrons aussi la convergence de la solution discrète, quand $t \rightarrow \infty$, vers un état stationnaire. Plus exactement, nous appelons solution stationnaire pour le problème (3.35)-(3.36) avec la condition initiale u_0^h , un couple $(\bar{u}^h, \bar{w}^h) \in V^h \times V^h$ telle que :

$$\begin{cases} (\bar{u}^h, 1) &= (u_0^h, 1), \\ (\bar{w}^h, \chi) &= (f(\bar{u}^h), \chi) + (\nabla \bar{u}^h, \nabla \chi) + \sigma_s(\nabla_{\parallel} \bar{u}^h, \nabla_{\parallel} \chi)_\Gamma + \lambda_s(\bar{u}^h, \chi)_\Gamma \\ &\quad + (g_s(\bar{u}^h), \chi)_\Gamma, \quad \forall \chi \in V^h. \end{cases}$$

Alors, nous démontrons le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Le champ $S^h(t)u_0^h = u^h(t)$ est un champ de gradient pour \mathcal{E} dans l'espace affine $\{v^h \in V^h : (v^h, 1) = (u_0^h, 1)\}$:*

$$\langle u_t^h(t), \varphi^h \rangle^h = -\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha}(u^h(t) + \alpha\varphi^h)|_{\alpha=0}, \quad \forall t \geq 0, \forall \varphi \in \dot{V}^h,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle^h$ est un produit scalaire convenable sur \dot{V}^h .

De plus, si f et g_s sont réels analytiques, il existe une solution stationnaire $(\bar{u}^h, \bar{w}^h) \in V^h \times \mathbf{R}$ telle que :

$$(u^h(t), w^h(t)) \rightarrow (\bar{u}^h, \bar{w}^h) \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Si nous supposons que f et g_s ont une croissance sous-critique, plus exactement si :

$$(3.38) \quad |f(\sigma)| \leq c(1 + |\sigma|^{p-1}), \quad \forall \sigma \in \mathbf{R},$$

pour $p \in [2, 6]$ quand $d = 3$ et $p \geq 2$ arbitraire quand $d = 2$ et

$$(3.39) \quad |g_s(\sigma)| \leq c(1 + |\sigma|^{q-1}), \quad \forall \sigma \in \mathbf{R},$$

pour $d = 3$ et $q \geq 2$ arbitraire, alors nous montrons le résultat suivant (voir [3]) :

Théorème 3.4. *Soient $f, g_s \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ satisfaisant (3.28), (3.38) et (3.39). Si $u_0 \in V$ et $u_0^h \in V^h$ sont tels que $u_0^h \rightarrow u_0$ dans V quand $h \rightarrow 0$, alors pour tout $T > 0$ nous avons :*

$$\begin{aligned} u^h &\rightarrow u \text{ *-faible dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ et fortement dans } C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \\ (u^h)|_\Gamma &\rightarrow u|_\Gamma \text{ *-faible dans } L^\infty(0, T; H^1(\Gamma)) \text{ et fortement dans } C^0([0, T]; L^2(\Gamma)), \\ w^h &\rightarrow w \text{ faible dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \end{aligned}$$

avec (u, w) la solution unique de (3.33)-(3.34) telle que $u(0) = u_0$ et

$$(3.40) \quad u \in L^\infty(0, T; V), \quad u|_\Gamma \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma)) \text{ et } w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Pour établir les estimations d'erreur sur $u^h - u$ et $w^h - w$ dans certaines normes, nous écrivons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} u^h(t) - u(t) &= \theta^u(t) + \rho^u(t), \text{ avec } \theta^u = u^h - \tilde{u}^h, \rho^u = \tilde{u}^h - u, \\ w^h(t) - w(t) &= \theta^w(t) + \rho^w(t), \text{ avec } \theta^w = w^h - \tilde{w}^h, \rho^w = \tilde{w}^h - w, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$, où $\tilde{w}^h = \tilde{w}^h(t)$ et $\tilde{u}^h = \tilde{u}^h(t)$ sont les projections elliptiques de $w = w(t)$ et $u = u(t)$ définies par :

$$(3.41) \quad \begin{aligned} (\nabla \tilde{w}^h, \nabla \chi) &= (\nabla w, \nabla \chi), \quad \forall \chi \in V^h, \\ (\tilde{w}^h, 1) &= (w, 1), \\ (\nabla \tilde{u}^h, \nabla \chi) + \sigma_s(\nabla_{\parallel} \tilde{u}^h, \nabla_{\parallel} \chi)_\Gamma + \lambda_s(\tilde{u}^h, \chi)_\Gamma &= (\nabla u, \nabla \chi) + \sigma_s(\nabla_{\parallel} u, \nabla_{\parallel} \chi)_\Gamma \\ &\quad + \lambda_s(u, \chi)_\Gamma, \end{aligned}$$

pour tout $\chi \in V^h$.

L'existence d'une solution unique $\tilde{w}^h \in V^h$ des équations (3.41)₁-(3.41)₂, solution associée à chaque $w \in H^1(\Omega)$ est assurée par le théorème de Lax-Milgram et l'inégalité de Poincaré. De manière analogue, étant donnée une fonction $u \in V$, l'équation (3.41) définit un unique $\tilde{u}^h \in V^h$.

Nous montrons le résultat suivant (voir [3]) :

Théorème 3.5. Soit (u, w) une solution de (3.33)-(3.34) telle que :

$$(3.42) \quad u, u_t, u_{tt}, w, w_t \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ et } u|_{\Gamma}, (u_t)|_{\Gamma}, (u_{tt})|_{\Gamma} \in L^2(0, T, H^2(\Gamma)),$$

et soit (u^h, w^h) la solution de (3.35)-(3.36). Si

$$(3.43) \quad \theta^u(0) = 0 \text{ et } \theta^w(0) = 0,$$

alors le schéma est d'ordre 2 dans L^2 et d'ordre 1 dans H^1 , et plus précisément,

$$\sup_{[0, T]} (|u^h - u|_0 + |u^h - u|_{0, \Gamma} + \|u_t^h - u_t\|_{-1, h} + |u_t^h - u_t|_{0, \Gamma}) \leq Ch^2,$$

$$\left(\int_0^T \|w^h - w\|_0^2 ds \right)^{1/2} \leq Ch^2,$$

$$\sup_{[0, T]} (\|u^h - u\|_1 + \|u^h - u\|_{1, \Gamma}) \leq Ch,$$

$$\left(\int_0^T \|w^h - w\|_1^2 + \|u_t^h - u_t\|_1^2 + \|u_t^h - u_t\|_{1, \Gamma}^2 ds \right)^{1/2} \leq Ch.$$

Nous abordons aussi l'étude du problème totalement discrétisé. Pour la discrétisation en temps et en espace, nous utilisons un schéma d'Euler implicite en temps pour le schéma semi-discrétisé en espace. Le pas de temps est $\delta t > 0$, fixé. Alors, pour $u_0^h \in V^h$ et $n = 1, 2, \dots$, nous cherchons $(u_h^n, w_h^n) \in V^h \times V^h$ tel que :

$$(3.44) \quad (\bar{\partial} u_h^n, \varphi) = -(\nabla w_h^n, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V^h,$$

$$(3.45) \quad \begin{aligned} (w_h^n, \chi) &= (f(u_h^n), \chi) + (\nabla u_h^n, \nabla \chi) + \sigma_s (\nabla \|u_h^n, \nabla \| \chi)_{\Gamma} \\ &+ (\tilde{g}_s(u_h^n), \chi)_{\Gamma} + \Gamma_s^{-1} (\bar{\partial} u_h^n, \chi)_{\Gamma}, \quad \forall \chi \in V^h, \end{aligned}$$

avec $\bar{\partial}$ l'opérateur qui à la suite $(v^n)_{n \geq 0}$ associe la suite définie par

$$(3.46) \quad \bar{\partial} v^n = \frac{v^n - v^{n-1}}{\delta t}, \quad n \geq 1.$$

Nous définissons aussi :

$$\tilde{g}_s(\sigma) = \lambda_s \sigma + g_s(\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}.$$

Nous notons que la condition de dissipativité (3.28) implique que ,

$$(3.47) \quad f'(v) \geq -C_f \text{ et } \tilde{g}'_s(v) \geq -C_s, \text{ pour tout } v \in \mathbf{R},$$

où $C_f \geq 0$ et $C_s \geq 0$ sont des constantes positives.

Nous montrons les résultats suivants sur l'existence, la stabilité et l'unicité de la suite $(u_h^n, w_h^n)_n$:

Théorème 3.6. Pour tout $u_h^0 \in V^h$, il existe une suite $(u_h^n, w_h^n)_{n \geq 1}$ définie par (3.44)-(3.45) qui satisfait l'estimation d'énergie suivante :

$$(3.48) \quad \mathcal{E}(u_h^n) + \frac{1}{2\delta t} |u_h^n - u_h^{n-1}|_{-1, h}^2 + \frac{1}{2\Gamma_s \delta t} |u_h^n - u_h^{n-1}|_{0, \Gamma}^2 \leq \mathcal{E}(u_h^{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

De plus, si $\delta t < \delta t^*$ avec $\delta t^* = \min \{4/C_f^2, 1/(\Gamma_s C_s)\}$, alors la suite est définie de manière unique.

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant qui est une version complètement discrétisée de la Proposition 3.3 :

Proposition 3.4. *Si f et g_s sont réelles analytiques, alors pour tout $u_h^0 \in V^h$, toute suite $(u_h^n, w_h^n)_{n \geq 1}$ définie par (3.44)-(3.45) et qui satisfait l'estimation d'énergie (3.48), converge vers une solution stationnaire quand $n \rightarrow \infty$.*

Simulations numériques

Nous illustrons d'abord le cas du schéma semi-implicite d'Euler, donc un schéma de type (3.44)-(3.45) mais avec les termes non-linéaires implicites $f(u_h^n)$ et $\tilde{g}_s(u_h^n)$ remplacés par les termes explicites $f(u_h^{n-1})$ et $\tilde{g}_s(u_h^{n-1})$. Dans les Figures 3.3-3.5, le domaine est $L_x \times L_y = 80 \times 10$ et la triangulation est obtenue en divisant le domaine en 256×50 rectangles qui sont divisés aussi en deux triangles le long de la même diagonale. Les termes nonlinéaires sont donnés par :

$$(3.49) \quad f(v) = v^3 - v/2 \quad \text{et} \quad \tilde{g}_s(v) = (\lambda_s + k_s)v - h_s, \quad v \in \mathbf{R},$$

avec $\lambda_s + k_s = 1$ (par exemple $\lambda_s = 0.5$), $h_s = 0$; $\Gamma_s = 10$, $\sigma_s = 0.1$ et le pas de temps est $\delta t = 0.1$. La condition initiale est une distribution aléatoire uniforme d'amplitude ± 0.01 . Dans chaque figure, le maximum et le minimum de u sont colorés en blanc et en noir respectivement et les valeurs intermédiaires de u correspondent à différents niveaux de gris.



FIGURE 3.3 – $t = 10$



FIGURE 3.4 – $t = 100$



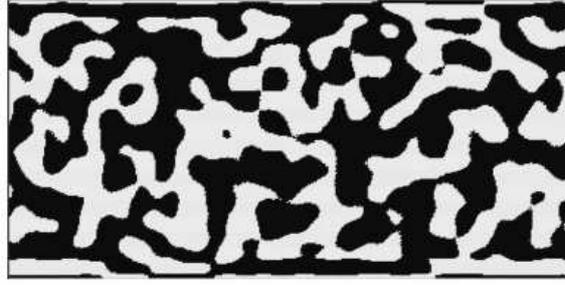
FIGURE 3.5 – $t = 250$

Pour les Figures 3.6-3.7, nous considérons le cas d'un schéma de Crank-Nicolson linéarisé qui s'écrit de la manière suivante :

Pour $n = 2, 3, \dots$, trouver $(u_h^n, w_h^n) \in V^h \times V^h$ tel que :

$$(3.50) \quad (\bar{\partial} u_h^n, \varphi) = -(\nabla \hat{w}_h^n, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V^h,$$

$$(3.51) \quad \begin{aligned} (\hat{w}_h^n, \chi) &= (f(\bar{u}_h^{n-1}), \chi) + (\nabla \hat{u}_h^n, \nabla \chi) + \sigma_s (\nabla_{\parallel} \hat{u}_h^n, \nabla_{\parallel} \chi)_{\Gamma} \\ &+ (\tilde{g}_s(\bar{u}_h^{n-1}), \chi)_{\Gamma} + \Gamma_s^{-1} (\bar{\partial} u_h^n, \chi)_{\Gamma}, \quad \forall \chi \in V^h, \end{aligned}$$

FIGURE 3.6 – $t = 0.25$ FIGURE 3.7 – $t = 0.50$

où $\bar{\partial}$ est l'opérateur défini par (3.46) et

$$\hat{u}_h^n = \frac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2}, \quad \hat{w}_h^n = \frac{w_h^n + w_h^{n-1}}{2}, \quad \text{et } \bar{u}_h^{n-1} = \frac{3}{2}u_h^{n-1} - \frac{1}{2}u_h^{n-2}.$$

La valeur initiale $u_h^0 \in V^h$ est donnée et (u_h^1, w_h^1) est calculé en utilisant une méthode de type prédiction-corrrection. Ainsi, nous commençons par définir $(u_h^{1,0}, w_h^{1,0}) \in V^h \times V^h$ satisfaisant :

$$(3.52) \quad ((u_h^{1,0} - u_h^0)/\delta t, \varphi) = -(\nabla \hat{w}_h^{1,0}, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V^h,$$

$$(3.53) \quad \begin{aligned} (\hat{w}_h^{1,0}, \chi) &= (f(u_h^0), \chi) + (\nabla \hat{u}_h^{1,0}, \nabla \chi) + \sigma_s(\nabla_{\parallel} \hat{u}_h^{1,0}, \nabla_{\parallel} \chi)_{\Gamma} \\ &+ (\tilde{g}_s(u_h^0), \chi)_{\Gamma} + \Gamma_s^{-1}((u_h^{1,0} - u_h^0)/\delta t, \chi)_{\Gamma}, \quad \forall \chi \in V^h, \end{aligned}$$

avec

$$\hat{u}_h^{1,0} = \frac{u_h^{1,0} + u_h^0}{2} \quad \text{et} \quad \hat{w}_h^{1,0} = \frac{w_h^{1,0} + w_h^0}{2}.$$

Ensuite, nous définissons $(u_h^1, w_h^1) \in V^h \times V^h$ tel que :

$$(3.54) \quad (\bar{\partial} u_h^1, \varphi) = -(\nabla \hat{w}_h^1, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in V^h,$$

$$(3.55) \quad \begin{aligned} (\hat{w}_h^1, \chi) &= (f(\frac{u_h^{1,0} + u_h^0}{2}), \chi) + (\nabla \hat{u}_h^1, \nabla \chi) + \sigma_s(\nabla_{\parallel} \hat{u}_h^1, \nabla_{\parallel} \chi)_{\Gamma} \\ &+ (\tilde{g}_s(\frac{u_h^{1,0} + u_h^0}{2}), \chi)_{\Gamma} + \Gamma_s^{-1}(\bar{\partial} u_h^1, \chi)_{\Gamma}, \quad \forall \chi \in V^h, \end{aligned}$$

Les nonlinéarités considérées sont données par (3.49), avec $(\lambda_s + k_s) = -4$ et $h_s = 0$. Le domaine est $L_x \times L_y = 80 \times 40$, qui est divisé d'abord en 400×200 rectangles et

ensuite chaque rectangle est divisé en deux triangles le long de la même diagonale. Le pas de temps est $\delta t = 0.01$; $\Gamma_s = 10$, $\sigma_s = 5$ et la condition initiale est une distribution aléatoire uniforme d'amplitude ± 0.01 .

Pour la Figure 3.8 nous utilisons le même schéma que pour les Figures 3.3-3.5, avec $\delta t = 0.001$ mais en considérant une géométrie différente pour le domaine. Le domaine est un disque de rayon 80, centré en $(0, 0)$, dans lequel nous découpons un disque de rayon 40, centré en $(20, 0)$. La frontière externe est divisée en 600 intervalles et la frontière interne est divisée en 400 intervalles. Les paramètres sont les suivants : $\lambda_s + k_s = -4$, $h_s = 0$, $\Gamma_s = 10$, $\sigma_s = 5$ et la condition initiale est une distribution aléatoire uniforme d'amplitude ± 0.01 .

Dans toutes les figures $h_s = 0$ donc dans tous les cas considérés aucune des phases n'est préférentiellement attirée par les parois.



FIGURE 3.8 – $t = 0.50$ ($h_s = 0$)

Nous abordons à présent le troisième thème annoncé pour ce chapitre :

*L'analyse de certains schémas numériques de type volumes finis
pour des systèmes hyperboliques liés à la géophysique*

Le but du travail [10] est l'étude des erreurs introduites par certains schémas numériques de type volumes finis dans l'étude des fréquences d'onde, dans le contexte des systèmes hyperboliques utilisés pour la météorologie et l'océanographie. Nous remarquons, en plus des problèmes bien connus dans la propagation de phase et dans le calcul des vitesses de groupes, que les erreurs de discrétisation induisent la formation de caustiques artificielles dans la partie du spectre correspondant aux ondes d'inertie-gravité.

Les résultats sont une extension des résultats obtenus par Grotjahn et O'Brien [19] dans le contexte des discrétisations de type différences finies, où les auteurs montrent

que les méthodes de différences finies introduisent des erreurs importantes de module et angulaires dans le calcul des vitesses de groupe, pour des modèles issus de l'océanographie et que les méthodes ont une précision raisonnable seulement pour les ondes longues ; Vichnevetsky [27] a aussi étudié les erreurs introduites par des discrétisations en temps et en espace, ainsi qu'à la frontière ; Blayo [2] a étudié l'erreur introduite par des schémas de type différences finies d'ordre supérieur dans le cas des ondes d'inertie-gravité ; David et al. [5], [6] ont examiné le mécanisme de dispersion par la concentration d'erreurs et l'existence des caustiques artificielles dans les cas des équations de propagation discrétisées.

Notre motivation pour considérer l'étude des méthodes de type volumes finis est que les méthodes de volumes finis diffèrent de manière conceptuelle des méthodes de différences finies par le fait que les estimations sont faites sur des flux aux interfaces entre les volumes finis, contrairement aux techniques de différences finies où les estimations sont faites sur les dérivées des inconnues.

Nous étudions les équations de Saint-Venant linéarisées avec des conditions aux bords périodiques :

$$(3.56) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v}_0 \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x} - f v = 0,$$

$$(3.57) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v}_0 \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f u = 0,$$

$$(3.58) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \bar{v}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \bar{\Phi}_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

qui peuvent être écrites sous la forme :

$$(3.59) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial q}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial q}{\partial y} + \mathbf{C} q = 0,$$

où $q(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t), \Phi(x, y, t))$, g est l'accélération de la pesanteur et les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} sont définies par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 & 0 & g \\ 0 & \bar{u}_0 & 0 \\ \bar{\Phi}_0 & 0 & \bar{u}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{v}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v}_0 & g \\ 0 & \bar{\Phi}_0 & \bar{v}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cas d'intérêt particulier est $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0$ et $f = \text{const.}$, cas qui décrit les ondes d'inertie-gravité. Les ondes d'inertie-gravité sont importantes pour décrire par exemple le phénomène d'ajustement dynamique se produisant lorsqu'un équilibre dynamique de grande échelle entre les forces de pression et l'accélération de Coriolis n'est pas satisfait. Lorsque cet équilibre est rompu, l'atmosphère tend à y retourner en émettant des ondes d'inertie-gravité (on parle d'ajustement géophysique).

Le cas continu. Pour trouver la relation de dispersion dans le cas continu, nous remplaçons q dans l'équation (3.59) par l'onde $q(x, y, t) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\Phi}) e^{i(kx+ly-\omega t)}$, et nous trouvons :

$$(3.60) \quad (-i\omega \mathbf{I} + i k \mathbf{A} + i l \mathbf{B} + \mathbf{C}) q = 0,$$

où $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ et \mathbf{I} est la matrice identité. L'équation de dispersion a comme solutions les fréquences d'onde :

$$(3.61a) \quad \omega_0 = k\bar{u}_0 + l\bar{v}_0, \quad \omega_{\pm} = \omega_0 \pm f\sqrt{R_D^2\kappa^2 + 1},$$

où $\kappa = \sqrt{k^2 + \ell^2}$ est le module du nombre d'onde, et R_D est le rayon de Rossby de déformation, $R_D = \sqrt{\bar{\Phi}_0 g}/f$.

Les vitesses de groupe sont $v_g = (\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ pour ω_0 et pour ω_{\pm} nous avons :

$$(3.62) \quad v_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial k} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \pm \frac{R_D^2 f k}{\sqrt{R_D^2 \kappa^2 + 1}} \\ \bar{v}_0 \pm \frac{R_D^2 f \ell}{\sqrt{R_D^2 \kappa^2 + 1}} \end{pmatrix},$$

Les ondes d'inertie-gravité. Pour décrire les ondes d'inertie-gravité, nous considérons les équations (3.56)-(3.59) avec $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0$ et $f = \text{const}$. La relation de dispersion nous donne les fréquences d'onde en fonction du module κ du nombre d'onde et les fréquences sont les mêmes que dans (3.61a) avec $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0$. La racine $\omega_0 = 0$ correspond à l'état stationnaire et les deux racines $\omega_{\pm} = \pm f\sqrt{R_D^2\kappa^2 + 1}$ correspondent aux ondes de propagation appelées des ondes de Poincaré.

Le comportement des ondes de Poincaré est une interaction entre les ondes de gravité (quand $f = 0$, donc en absence de la rotation) et des oscillations inertielles ; les ondes sont aussi connues sous le nom d'ondes d'inertie-gravité. Nous pouvons voir cela facilement : pour κ grand (ce qui correspond à une onde courte) nous trouvons $\kappa \gg 1/R_D$, qui se traduit par le fait que la longueur d'onde est trop petite pour ressentir la rotation et donc la gravité domine. Pour κ petit (donc pour une onde longue), nous trouvons $\kappa \ll 1/R_D$ et donc l'onde est beaucoup plus longue que le rayon de Rossby de déformation et le terme inertiel domine.

Les fréquences ω_- , ω_0 et ω_+ sont représentées dans la Figure 3.9 en fonction de $R_D/\Delta x$. Les paramètres considérés sont $f = 1.5 \cdot 10^{-4} s^{-1}$, $g = 9.8 ms^{-2}$, $L = 6000 km$, $\bar{\Phi}_0 = 10 km$ et $\Delta x (= \Delta y)$ tels que $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$ (i.e. $\Delta x = L/60, L/30$ et $L/15$). Les vitesses de groupe sont représentées dans la Figure 3.10.

La relation de dispersion pour le cas discret. Nous rappelons d'abord le contexte des volumes finis. Pour discrétiser le domaine périodique $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$, nous utilisons des rectangles identiques de dimension $\Delta x \Delta y$ avec $M\Delta x = L_x$ et $N\Delta y = L_y$ où M et N sont des entiers donnés. Nous avons MN volumes, définis par :

$$K_{ij} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}),$$

avec

$$x_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta x, \text{ pour } i = \overline{0, M} \quad \text{et} \quad y_{j+\frac{1}{2}} = j\Delta y, \text{ pour } j = \overline{0, N}.$$

Les discrétisations de type volumes finis que nous utilisons peuvent s'écrire sous la forme :

$$(3.63) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t}(\beta q_{ij}^{n+1} - \beta(\beta - 1)q_{ij}^n - (2 - \beta)q_{ij}^{n-1}) &+ \frac{1}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}j}^n - F_{i-\frac{1}{2}j}^n) + \frac{1}{\Delta y}(G_{ij+\frac{1}{2}}^n - G_{ij-\frac{1}{2}}^n) \\ &+ \mathbf{C}q_{ij}^n = 0, \end{aligned}$$

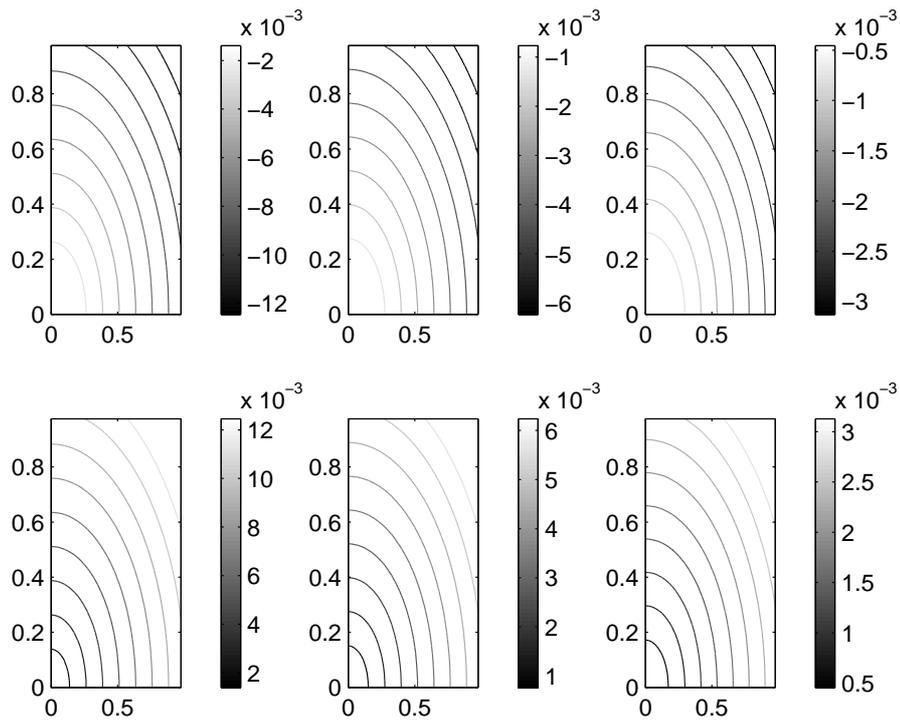


FIGURE 3.9 – Ondes d’inertie-gravité : ω_- (en haut) et ω_+ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x=20, 10, 5$.

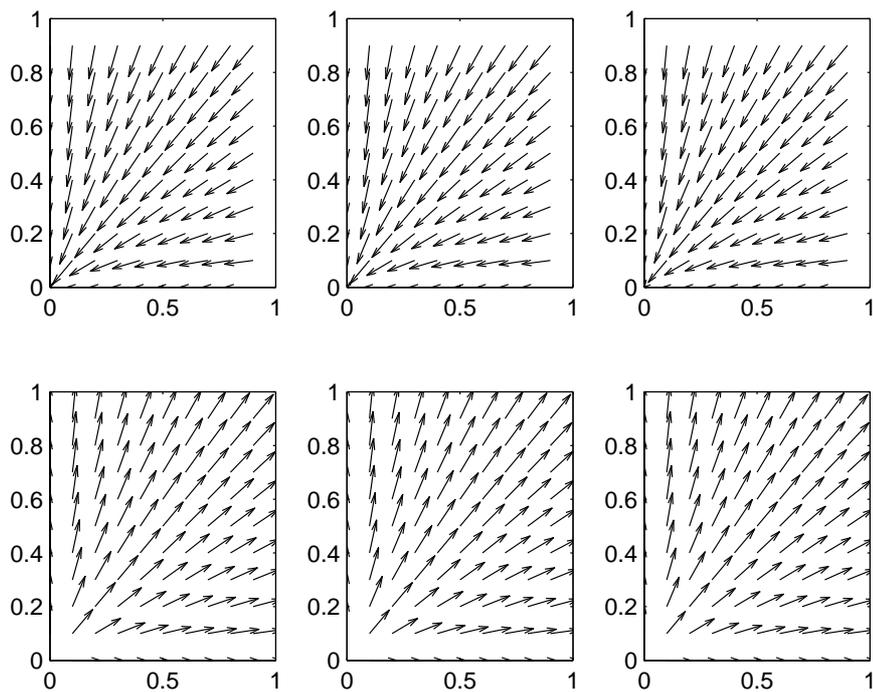


FIGURE 3.10 – Ondes d’inertie-gravité : $v_{g,-}$ (en haut) et $v_{g,+}$ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$.

où

$$q_{ij}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{K_{ij}} q(x, y, n\Delta t) dx dy, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t,$$

et

$$F_{i+\frac{1}{2}j}^n = \begin{pmatrix} F_{i+\frac{1}{2}j}^{u,n} \\ F_{i+\frac{1}{2}j}^{v,n} \\ F_{i+\frac{1}{2}j}^{\Phi,n} \end{pmatrix} \text{ et } G_{ij+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} G_{ij+\frac{1}{2}}^{u,n} \\ G_{ij+\frac{1}{2}}^{v,n} \\ G_{ij+\frac{1}{2}}^{\Phi,n} \end{pmatrix}$$

sont les flux numériques.

Les discrétisations en temps dépendent de la valeur de β ; pour $\beta = 2$ nous trouvons le schéma d'Euler et pour $\beta = 1$ nous trouvons le schéma saute-mouton (Leap-Frog).

La discrétisation saute-mouton en temps avec des flux centrés. La relation de dispersion discrète est obtenue quand les flux numériques sont calculés avec une approximation centrée :

$$(3.64) \quad F_{i+\frac{1}{2}j}^n = \mathbf{A} \left(\frac{q_{i+1j}^n + q_{ij}^n}{2} \right) \text{ et } G_{ij+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{B} \left(\frac{q_{ij+1}^n + q_{ij}^n}{2} \right).$$

Pour les termes à la frontière, nous avons $F_{M+\frac{1}{2}j} = F_{\frac{1}{2}j}$ ce que signifie en prenant un contrôle fictif, que $q_{M+1j} = q_{1j}$ et $q_{0j} = q_{Mj}$ pour $j = 1, \dots, N$.

Nous remplaçons q_{ij}^n par l'onde discrète $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\Phi}) e^{i(ki\Delta x + lj\Delta y - \omega n\Delta t)}$ dans le schéma numérique (3.63) et nous obtenons la relation de dispersion :

$$(3.65) \quad \det \left(-\mathbf{I}\tilde{\omega} + \mathbf{A}\tilde{k} + \mathbf{B}\tilde{l} - \mathbf{iC} \right) = 0,$$

avec $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ et

$$(3.66) \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{\Delta t} \sin(\omega\Delta t), \quad \tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \sin(k\Delta x), \quad \tilde{l} = \frac{1}{\Delta y} \sin(l\Delta y).$$

Les fréquences d'onde sont :

$$(3.67a) \quad \omega_0 = \frac{1}{\Delta t} \arcsin(\Delta t \tilde{\omega}_0), \quad \text{avec } \tilde{\omega}_0 = \tilde{k}\bar{u}_0 + \tilde{l}\bar{v}_0,$$

$$(3.67b) \quad \omega_{\pm} = \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left(\Delta t \left(\tilde{\omega}_0 \pm f \sqrt{R_D^2 \tilde{\kappa}^2 + 1} \right) \right), \quad \text{avec } \tilde{\kappa}^2 = \tilde{k}^2 + \tilde{l}^2.$$

Les vitesses de groupes discrètes $v_{d,g} = (\partial\omega_{\pm}/\partial k, \partial\omega_{\pm}/\partial l)$ sont données par :

$$(3.68) \quad v_{d,g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{\pm}} \left\{ \cos(k\Delta x) \bar{u}_0 \pm \frac{R_D^2 f \sin(2k\Delta x)}{2\Delta x \sqrt{R_D^2 \tilde{\kappa}^2 + 1}} \right\} \\ \frac{1}{\sigma_{\pm}} \left\{ \cos(l\Delta y) \bar{v}_0 \pm \frac{R_D^2 f \sin(2l\Delta y)}{2\Delta y \sqrt{R_D^2 \tilde{\kappa}^2 + 1}} \right\} \end{pmatrix},$$

avec $\sigma_{\pm} = \sqrt{1 - \Delta t^2 \left(\tilde{\omega}_0 \pm f \sqrt{R_D^2 \tilde{\kappa}^2 + 1} \right)^2}$.

Nous voulons étudier les erreurs numériques introduites par les propriétés dispersives du schéma numérique. Le mécanisme dispersif consiste en une concentration d'erreurs et donc une croissance brusque d'erreur. Le phénomène est connu sous le nom de caustiques fictives (en anglais *spurious caustic phenomenon*). Nous remarquons que la solution exacte du modèle continu n'a pas des caustiques, par contre la solution discrète admet des caustiques, introduites par le schéma numérique.

Du point de vu mathématique, cette concentration d'erreurs se traduit par l'existence d'un point d'extremum pour la vitesse de groupe. Nous cherchons donc le nombre d'onde k_c pour lequel :

$$(3.69) \quad \frac{\partial v_g}{\partial k}(k_c) = 0.$$

Pour le cas continu, il n'y a pas des caustiques car la vitesse de groupe est :

$$v_g = \pm \frac{R_D^2 f k}{\sqrt{R_D^2 \kappa^2 + 1}},$$

et donc il n'y a pas de point k_c pour lequel la dérivée de la vitesse de groupe

$$\frac{\partial v_g}{\partial k} = \mp R_D^2 f \frac{R_D^2 l^2 + 1}{(\sqrt{R_D^2 \kappa^2 + 1})^3},$$

s'annule.

Pour le cas discret, nous remarquons l'existence des caustiques qui correspondent à l'état stationnaire

$$\omega_0 = \frac{1}{\Delta t} \arcsin(\Delta t \tilde{\omega}_0).$$

Effectivement, la première composante de la vitesse de groupe est :

$$v_{g,d} = \frac{\bar{u}_0 \cos(k \Delta x)}{\sqrt{1 - \Delta t^2 \tilde{\omega}_0^2}},$$

et donc la dérivée

$$\frac{\partial v_{g,d}}{\partial k} = \frac{\bar{u}_0 \Delta x}{\sqrt{1 - \Delta t^2 \tilde{\omega}_0^2}} \left\{ -\sin(k \Delta x) + \frac{\Delta t^2 \bar{u}_0 \tilde{k}' \tilde{\omega}_0}{1 - \Delta t^2 \tilde{\omega}_0^2} \right\},$$

admet un extremum pour $\tilde{k} = 0$ et $\tilde{l} = 0$. Le résultat est illustré dans la Figure 3.11, pour le cas des ondes d'inertie-gravité.

En comparant la Figure 3.10, où les vitesses de groupe exactes sont représentées, et la Figure 3.12 qui montre les vitesses de groupe approchées, nous remarquons que des erreurs angulaires et directionnelles importantes sont présentes pour les ondes courtes, le schéma étant précis seulement pour les ondes longues.

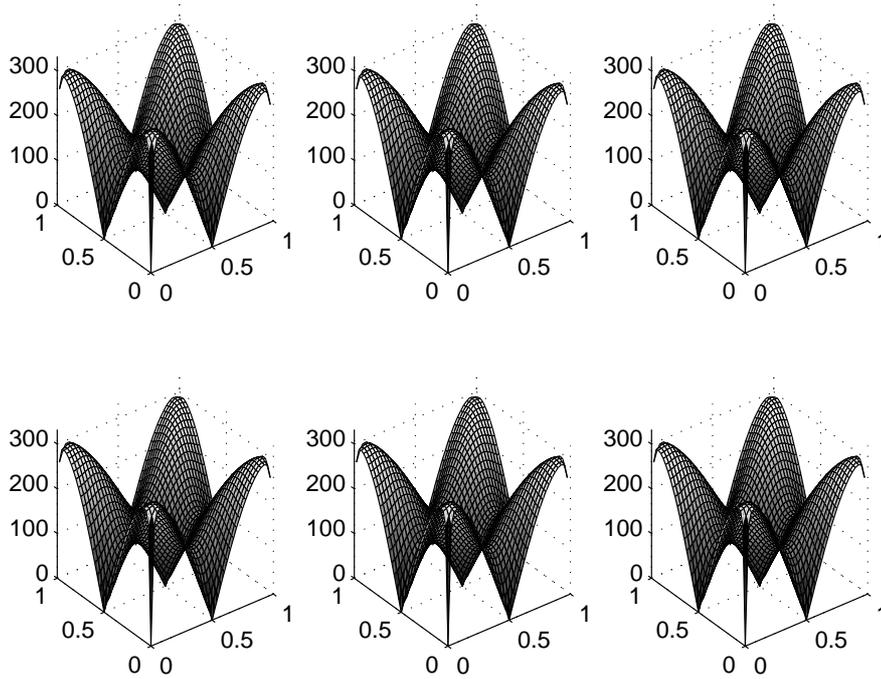


FIGURE 3.11 – Ondes d’inertie-gravité calculées avec une discrétisation de Leap-Frog en temps et une interpolation linéaire pour les flux : $\|v_{g,-}\|_2$ (en haut) et $\|v_{g,+}\|_2$ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$.

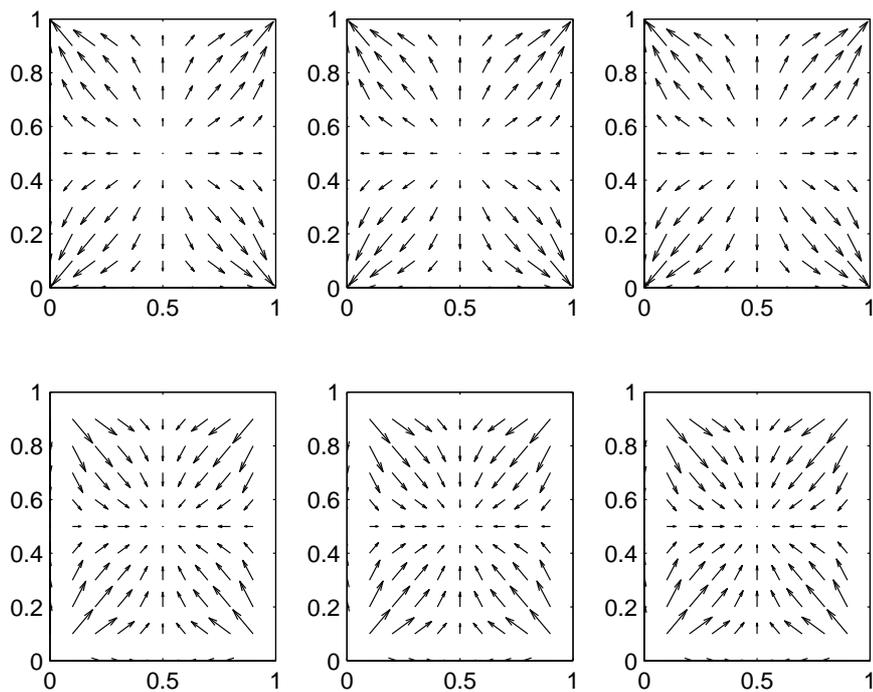


FIGURE 3.12 – Ondes d’inertie-gravité calculées avec une discrétisation de Leap-Frog en temps et une interpolation linéaire pour les fluxes : $v_{g,-}$ (en haut) et $v_{g,+}$ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$. A comparer avec la Figure 3.10.

La discrétisation d'Euler en temps avec des flux de Lax-Wendroff. Les flux de Lax-Wendroff sont calculés par les formules (voir aussi [10]) :

(3.70)

$$F_{i+\frac{1}{2}j}^n = \left(\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{AC} + \mathbf{CA}) \right) \left(\frac{q_{i+1j}^n + q_{ij}^n}{2} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{A}^2 (q_{i+1j}^n - q_{ij}^n) \\ - \frac{\Delta t}{8\Delta y} \mathbf{AB} \left((q_{i+1j+1}^n - q_{i+1j}^n) + (q_{ij+1}^n - q_{ij}^n) + (q_{i+1j}^n - q_{i+1j-1}^n) + (q_{ij}^n - q_{ij-1}^n) \right),$$

(3.71)

$$G_{ij+\frac{1}{2}}^n = \left(\mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{BC} + \mathbf{CB}) \right) \left(\frac{q_{ij+1}^n + q_{ij}^n}{2} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \mathbf{B}^2 (q_{ij+1}^n - q_{ij}^n) \\ - \frac{\Delta t}{8\Delta x} \mathbf{BA} \left((q_{i+1j+1}^n - q_{ij+1}^n) + (q_{i+1j}^n - q_{ij}^n) + (q_{ij+1}^n - q_{i-1j+1}^n) + (q_{ij}^n - q_{i-1j}^n) \right).$$

Nous obtenons le schéma suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (q_{ij}^{n+1} - q_{ij}^n) + \frac{1}{2\Delta x} \left(\mathbf{A} - \Delta t \frac{(\mathbf{AC} + \mathbf{CA})}{2} \right) (q_{i+1j}^n - q_{i-1j}^n) \\ & + \frac{1}{2\Delta y} \left(\mathbf{B} - \Delta t \frac{(\mathbf{BC} + \mathbf{CB})}{2} \right) (q_{ij+1}^n - q_{ij-1}^n) + \left(\mathbf{C} - \Delta t \frac{\mathbf{C}^2}{2} \right) q_{ij}^n \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \mathbf{A}^2 (q_{i+1j}^n - 2q_{ij}^n + q_{i-1j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y^2} \mathbf{B}^2 (q_{ij+1}^n - 2q_{ij}^n + q_{ij-1}^n) \\ (3.72) \quad & - \frac{\Delta t}{8\Delta x \Delta y} (\mathbf{AB} + \mathbf{BA}) (q_{i+1j+1}^n - q_{i+1j-1}^n - q_{i-1j+1}^n + q_{i-1j-1}^n) = 0, \end{aligned}$$

avec les matrices :

$$\mathbf{AC} + \mathbf{CA} = \begin{pmatrix} 0 & -2f\bar{u}_0 & 0 \\ 2f\bar{u}_0 & 0 & fg \\ 0 & -f\bar{\Phi}_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BC} + \mathbf{CB} = \begin{pmatrix} 0 & -2f\bar{v}_0 & -fg \\ 2f\bar{v}_0 & 0 & 0 \\ f\bar{\Phi}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \bar{u}_0^2 + g\bar{\Phi}_0 & 0 & 2g\bar{u}_0 \\ 0 & \bar{u}_0^2 & 0 \\ 2\bar{u}_0\bar{\Phi}_0 & 0 & \bar{u}_0^2 + g\bar{\Phi}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \bar{v}_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v}_0^2 + g\bar{\Phi}_0 & 2g\bar{v}_0 \\ 0 & 2\bar{v}_0\bar{\Phi}_0 & \bar{v}_0^2 + g\bar{\Phi}_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2\bar{u}_0\bar{v}_0 & g\bar{\Phi}_0 & 2g\bar{v}_0 \\ g\bar{\Phi}_0 & 2\bar{u}_0\bar{v}_0 & 2g\bar{u}_0 \\ 2\bar{\Phi}_0\bar{v}_0 & 2\bar{\Phi}_0\bar{u}_0 & 2\bar{u}_0\bar{v}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} -f^2 & 0 & 0 \\ 0 & -f^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant q_{ij}^n dans (3.72) par l'onde discrète $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\Phi})e^{i(ki\Delta x + lj\Delta y - \omega n\Delta t)}$, nous trouvons la relation de dispersion :

$$(3.73) \quad \det N = 0,$$

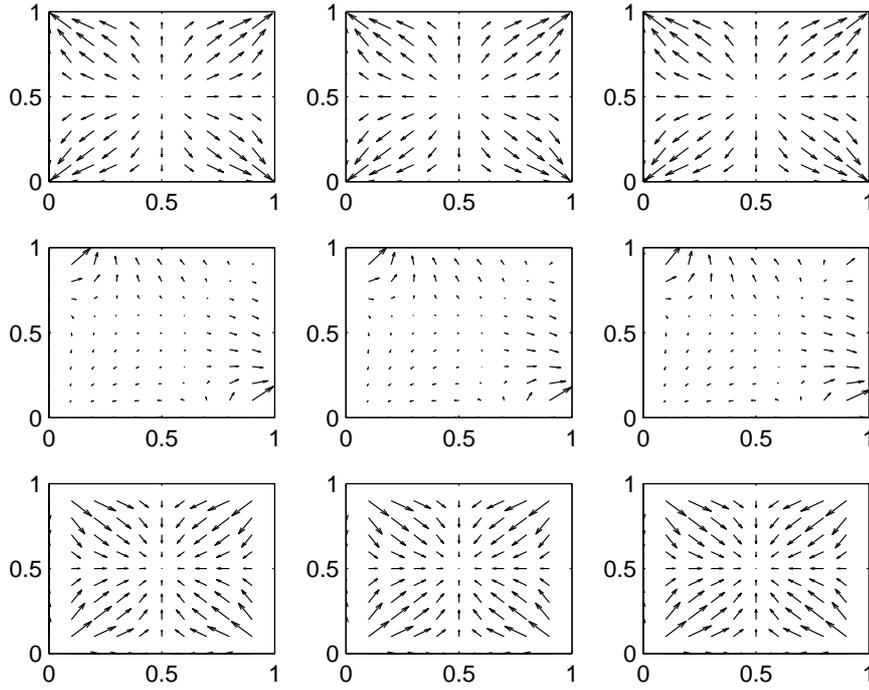


FIGURE 3.13 – Ondes d’inertie-gravité avec une discrétisation d’Euler en temps et des flux de Lax-Wendroff : $v_{g,-}$ (en haut), $v_{g,0}$ (au milieu) et $v_{g,+}$ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$. A comparer avec la Figure 3.10.

avec

$$(3.74) \quad N = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} (e^{-i\omega\Delta t} - 1) + \mathbf{i} \left(\mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{A}) \right) \tilde{k} + \mathbf{i} \left(\mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{B}) \right) \tilde{l} \\ + \left(\mathbf{C} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}^2 \tilde{k} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}^2 \tilde{l} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}) \tilde{k}\tilde{l},$$

et

$$\tilde{k} = \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2(k\Delta x/2), \quad \tilde{l} = \frac{4}{\Delta y^2} \sin^2(l\Delta y/2).$$

Dans la Figure 3.13 nous illustrons les vitesses de groupe numériques, pour les ondes d’inertie-gravité. Nous remarquons, en comparant la Figure 3.13 avec la Figure 3.11, que les ondes courtes et moyennes présentent des erreurs angulaires et directionnelles importantes dans le calcul des vitesses de groupe. Nous mettons en évidence l’existence des caustiques fictives dans le cas numérique, en représentant les vitesses numériques en fonction de $k\Delta x/\pi$. Les vitesses exactes ne présentent pas des extremas locaux, par contre dans la Figure 3.14 les vitesses approchées ont des extremas locaux périodiques.

La discrétisation de Leap-Frog en temps avec des flux ”upwind”. Pour pouvoir introduire le schéma ”upwind”, nous commençons par diagonaliser les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_A \mathbf{\Lambda}_A \mathbf{P}_A^{-1} \text{ and } \mathbf{B} = \mathbf{P}_B \mathbf{\Lambda}_B \mathbf{P}_B^{-1}$$

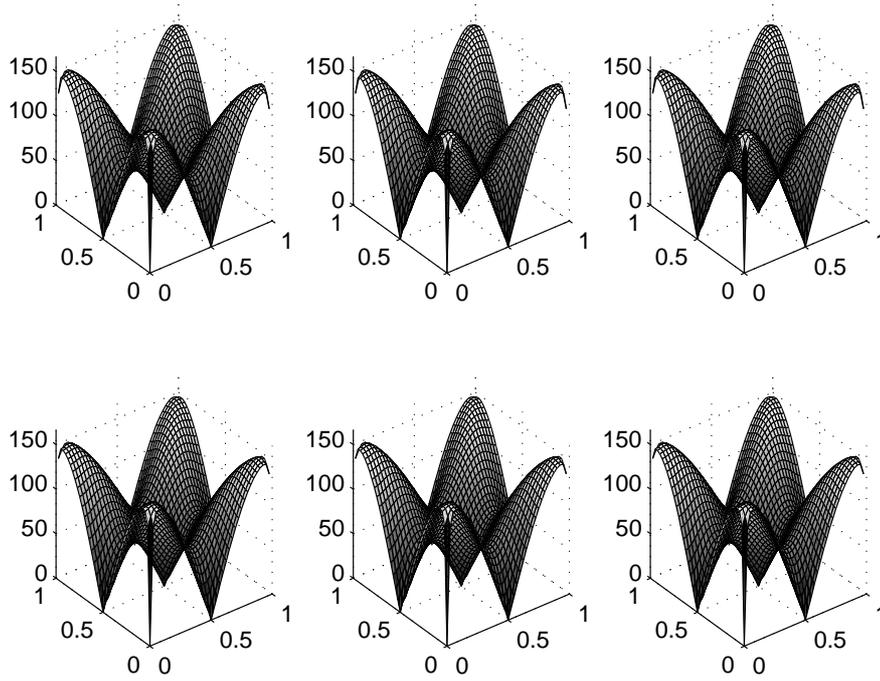


FIGURE 3.14 – Ondes d’inertie-gravité avec une discrétisation d’Euler en temps et des flux de Lax-Wendroff : $\|v_{g,-}\|_2$ (en haut) et $\|v_{g,+}\|_2$ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$.

où $\Lambda_{\mathbf{A}}$ (respectivement $\Lambda_{\mathbf{B}}$) est la matrice des valeurs propres de \mathbf{A} (respectivement de \mathbf{B}) :

$$\Lambda_{\mathbf{A}} = \text{Diag}(\bar{u}_0 - \sqrt{\bar{\Phi}_0 g}, \bar{u}_0, \bar{u}_0 + \sqrt{\bar{\Phi}_0 g}), \Lambda_{\mathbf{B}} = \text{Diag}(\bar{v}_0 - \sqrt{\bar{\Phi}_0 g}, \bar{v}_0, \bar{v}_0 + \sqrt{\bar{\Phi}_0 g}),$$

et $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$ (respectivement $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}$) est la matrice des vecteurs propres :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\bar{\Phi}_0/g} & 0 & \sqrt{\bar{\Phi}_0/g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{\bar{\Phi}_0/g} & \sqrt{\bar{\Phi}_0/g} \end{pmatrix}.$$

En définissant les matrices $\Lambda_{\mathbf{A}}^+ = \max(\Lambda_{\mathbf{A}}, 0)$ et $\Lambda_{\mathbf{A}}^- = \max(-\Lambda_{\mathbf{A}}, 0)$, nous pouvons introduire les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \Lambda_{\mathbf{A}}^+ \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{-1} \text{ et } \mathbf{B}^+ = \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \Lambda_{\mathbf{B}}^+ \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{-1}, \\ \mathbf{A}^- &= \mathbf{P}_{\mathbf{A}} \Lambda_{\mathbf{A}}^- \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{-1} \text{ et } \mathbf{B}^- = \mathbf{P}_{\mathbf{B}} \Lambda_{\mathbf{B}}^- \mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{-1}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^- \text{ et } \mathbf{B} = \mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-, \\ |\mathbf{A}| &= \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- \text{ et } |\mathbf{B}| = \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-. \end{aligned}$$

Les flux numériques "upwind" sont alors :

$$(3.75) \quad F_{i+\frac{1}{2}j}^n = \mathbf{A} \left(\frac{q_{i+1j}^n + q_{ij}^n}{2} \right) - \frac{|\mathbf{A}|}{2} (q_{i+1j}^n - q_{ij}^n),$$

$$(3.76) \quad G_{ij+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{B} \left(\frac{q_{ij+1}^n + q_{ij}^n}{2} \right) - \frac{|\mathbf{B}|}{2} (q_{ij+1}^n - q_{ij}^n),$$

et nous obtenons le schéma suivant :

$$(3.77) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} (q_{ij}^{n+1} - q_{ij}^{n-1}) + \frac{\mathbf{A}}{2\Delta x} (q_{i+1j}^n - q_{i-1j}^n) + \frac{\mathbf{B}}{2\Delta y} (q_{ij+1}^n - q_{ij-1}^n) + \mathbf{C} q_{ij}^n \\ & - \frac{|\mathbf{A}|}{2\Delta x} (q_{i+1j}^n - 2q_{ij}^n + q_{i-1j}^n) - \frac{|\mathbf{B}|}{2\Delta y} (q_{ij+1}^n - 2q_{ij}^n + q_{ij-1}^n) = 0. \end{aligned}$$

La relation de dispersion est donnée par :

$$(3.78) \quad \det \left(-i\tilde{\omega} \mathbf{I} + i\tilde{k} \mathbf{A} + i\tilde{l} \mathbf{B} + \mathbf{C} + |\mathbf{A}| \tilde{k} \frac{\Delta x}{2} + |\mathbf{B}| \tilde{l} \frac{\Delta y}{2} \right) = 0.$$

Dans la Figure 3.15 nous illustrons les vitesses de groupe numériques, pour les ondes d'inertie-gravité. Comme dans les cas précédents, le schéma est plus précis pour les ondes longues mais pour les ondes courtes et moyennes nous remarquons l'existence d'erreurs angulaires et directionnelles importantes. L'existence des caustiques fictives, introduites par le schéma numérique, est mise en évidence dans la Figure 3.16 où la norme de la vitesse de groupe approchée est représentée en fonction de $k\Delta x/\pi$. La Figure 3.16 montre l'existence des extremas locaux pour la vitesse approchée, contrairement au cas continu.

Conclusion. En mettant en évidence dans [10] l'apparition des caustiques fictives, nous avons illustré le caractère dispersif des schémas numériques considérés. Cette propriété

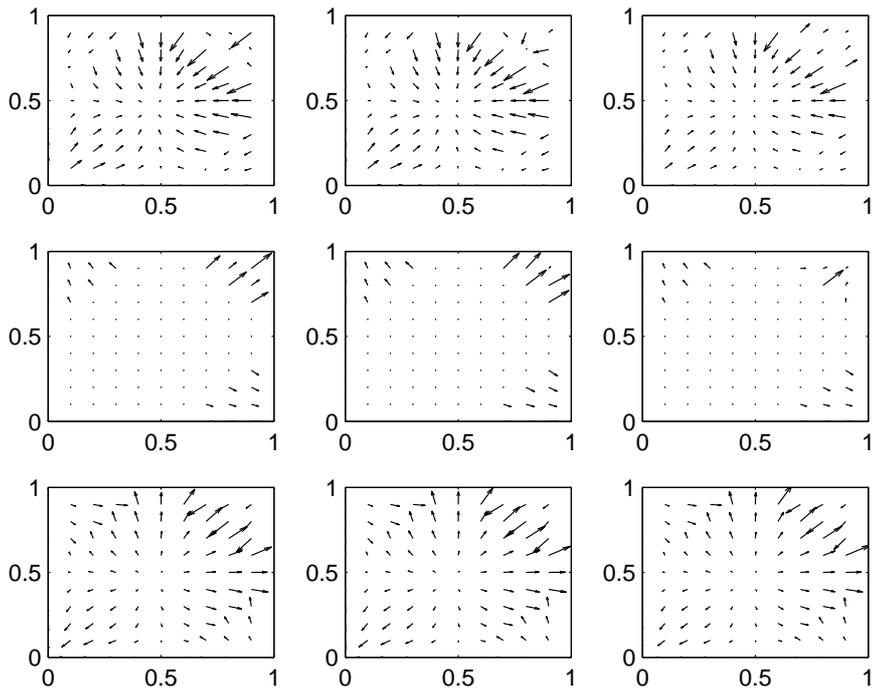


FIGURE 3.15 – Ondes d’inertie-gravité avec une discrétisation de Leap-Frog en temps et des flux ”upwind” : $v_{g,-}$ (en haut), $v_{g,0}$ (au milieu) et $v_{g,+}$ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$. A comparer avec la Figure 3.10.

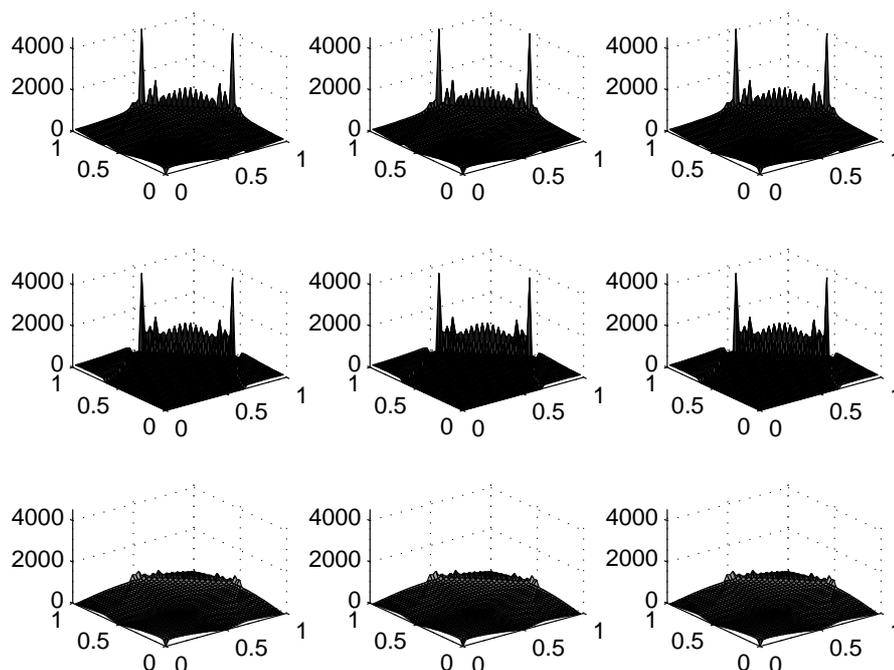


FIGURE 3.16 – Ondes d’inertie-gravité avec une discrétisation de Leap-Frog en temps et des flux ”upwind” : $\|v_{g,-}\|_2$ (en haut), $\|v_{g,0}\|_2$ (au milieu) and $\|v_{g,+}\|_2$ (en bas) en fonction de $k\Delta x/\pi$ et $l\Delta y/\pi$ (avec $\Delta x = \Delta y$) pour $R_D/\Delta x = 20, 10, 5$.

dispersive est une source d'erreurs angulaires et directionnelles importantes, erreurs que nous remarquons dans le calcul des vitesses de groupe.

Dans le cas de la discrétisation de type Lax-Wendroff, nous avons une méthode d'ordre plus élevée mais la précision de la méthode est toujours faible, en fait la méthode est la moins adaptée au problème.

Nous notons aussi que pour les deux derniers schémas présentés, nous avons obtenu des fréquences complexes pour le cas discret, approchant des fréquences réelles, ce qui est une source d'erreur car la partie imaginaire de la fréquence génère des croissances et des décroissances d'amplitude.

Nous pouvons conclure par le fait que la nature dispersive des schémas numériques considérés introduit des erreurs importantes. Les schémas implicites sous-évaluent les oscillations, contrairement aux schémas explicites qui sur-évaluent les oscillations ; les seules ondes pour lesquelles les schémas sont adaptés sont les ondes longues. Nos conclusions sont similaires à celles obtenues par Grotjahn et O'Brien pour le cas des discrétisations en différences finies. A notre connaissance, l'apparition des caustiques fictives n'a pas été mise en évidence auparavant.

Bibliographie

- [1] G. BAL, *On the convergence and the stability of the parareal algorithm to solve partial differential equations*, 40 (2005), pp. 425–432.
- [2] E. BLAYO, *Compact finite difference schemes for ocean models. I. Ocean waves*, *J. Comput. Phys.*, 164 (2000), pp. 241–257.
- [3] L. CHERFILS, M. PETCU ET M. PIERRE, *A finite element discretization of the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, *DCDS-A*, 27 (2010), no.4, pp. 1511–1533.
- [4] R. CHILL, E. FAŠANGOVÁ ET J. PRÜSS, *Convergence to steady state of solutions of the Cahn-Hilliard and Caginalp equations with dynamic boundary conditions*, *Math. Nachr.*, 279 (2006), pp. 1448–1462.
- [5] C. DAVID ET P. SAGAUT, *Structural stability of the finite dispersion-relation preserving schemes*, *Chaos, Solitons & Fractals*, in press.
- [6] C. DAVID, P. SAGAUT ET T. SENGUPTA, *A linear dispersive mechanism for numerical error growth : spurious caustics*, arXiv : math.AP/0607407 v1, (2006).
- [7] C. M. ELLIOTT, D. A. FRENCH ET F. A. MILNER, *A second order splitting method for the Cahn-Hilliard equation*, *Numer. Math.*, 54 (1989), pp. 575–590.
- [8] C. FARHAT ET M. CHANDESIRIS, *Time-decomposed parallel time-integrators : theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid-structure applications*, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 58 (2003), pp. 1397–1434.
- [9] C. FARHAT, J. CORTIAL, C. DASTILLUNG ET H. BAVESTRELLO, *Time-parallel implicit integrators for the near-real-time prediction of linear structural dynamic responses*, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 67 (2006), pp. 697–724.
- [10] S. FAURE, M. PETCU, R. TEMAM ET J. TRIBBIA, *On the inaccuracies of some finite volume discretizations of the linearized Shallow Water problem*, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, vol. 8 (2011), pp. 518–554.
- [11] H. P. FISCHER, PH. MAASS ET W. DIETERICH, *Novel surface modes in spinodal decomposition*, *Phys. Rev. Letters*, 79 (1997), pp. 893–896.

- [12] H. P. FISCHER, PH. MAASS ET W. DIETERICH, *Diverging time and length scales of spinodal decomposition modes in thin films*, Europhys. Letters, 62 (1998), pp. 49–54.
- [13] C. G. GAL, *A Cahn-Hilliard model in bounded domains with permeable walls*, Math. Methods Appl. Sci., 29 (2006), pp. 2009–2036.
- [14] C. G. GAL, *Exponential attractors for a Cahn-Hilliard model in bounded domains with permeable walls*, Electron. J. Differential Equations, (2006), pp. 1–23 (electronic).
- [15] M. J. GANDER ET E. HAIRER, *Nonlinear convergence analysis for the parareal algorithm*, Domain decomposition methods in science and engineering XVII, pp. 45–56, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., 60, Springer, Berlin, (2008).
- [16] M. GANDER ET M. PETCU, *Analysis of a Krylov subspace enhanced parareal algorithm for linear problems*, Paris-Sud Working Group on Modelling and Scientific Computing 2007–2008, ESAIM Proc., 25 (2008), pp. 114–129.
- [17] M. J. GANDER ET S. VANDERWALLE, *Analysis of the parareal time-parallel time-integration method*, SIAM J. Sci. Comput., 29 (2007), no. 2, pp. 556–578.
- [18] G. GILARDI, A. MIRANVILLE ET G. SCHIMPERNA, *On the Cahn-Hilliard equation with irregular potentials and dynamic boundary conditions*, Commun. Pure Appl. Anal., 8 (2009), pp. 881–912.
- [19] R. GROTJAHN ET J. O’BIEN, *Some inaccuracies in finite differencing hyperbolic equations*, Monthly Weather Review, 104 (1976), pp. 180–194.
- [20] R. KENZLER, F. EURICH, PH. MAASS, B. RINN, J. SCHROPP, E. BOHL ET W. DIETERICH, *Phase separation in confined geometries : solving the Cahn-Hilliard equation with generic boundary conditions*, Comput. Phys. Comm., 133 (2001), pp. 139–157.
- [21] J.-L. LIONS, Y. MADAY ET G. TURINICI, *Résolution d’EDP par un schéma en temps “pararéel”*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 332 (2001), pp. 661–668.
- [22] S. LOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. Notes, (1965).
- [23] A. MIRANVILLE ET S. ZELIK, *Exponential attractors for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, Math. Methods Appl. Sci., 28 (2005), pp. 709–735.
- [24] J. PRÜSS, R. RACKE ET S. ZHENG, *Maximal regularity and asymptotic behavior of solutions for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl., 185 (2006), pp. 627–648.
- [25] R. RACKE ET S. ZHENG, *The Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, Adv. Differential Equations, 8 (2003), pp. 83–110.

- [26] G. A. STAFF ET E. M. RØNQUIST, *Stability of the parareal algorithm*, Domain decomposition methods in science and engineering, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., 40 (2005), pp. 449–456.
- [27] R. VICHNEVETSKY, *Wave propagation analysis of difference schemes for hyperbolic equations : a review*, Internat. J. Numer. Methods Fluids, 7 (5) (1987), pp. 409–452.
- [28] H. WU ET S. ZHENG, *Convergence to equilibrium for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, J. Differential Equations, 204 (2004), pp. 511–531.

4

Liste de publications

Articles publiés dans des revues internationales

1. *M. Petcu, R. Temam, et D. Wirosoetisno. Existence and regularity results for the primitive equations. *Comm. Pure Appl. Analysis*, 3(1) :115–131, March 2004.
2. M. Petcu et R. Temam. Control for the sine-Gordon equation. *ESAIM : COCV*, 10 :553–573, 2004.
3. *M. Petcu. Gevrey class regularity for the primitive equations in space dimension 2. *Asymptotic Analysis*, 39(1) :1–13, 2004.
4. M. Petcu et A. Rousseau. On the δ -Primitive and Boussinesq type equations. *Advances in Differential Equations*, 10(5) : 579–599, 2005.
5. *M. Petcu, R. Temam, et D. Wirosoetisno. Renormalization group method applied to the primitive equation. *Journal of differential equations*, 208 : 215–257, 2005.
6. M. Petcu. Euler Equation in a channel in space dimension 2 and 3. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – series A*, 13, no. 3, 755-778, 2005.
7. M. Petcu et A. Rousseau. Numerical time-schemes for an ocean related system of PDEs. *Numerical Methods in Partial Differential Equations*, 22 : 32-47, 2006.
8. *M. Petcu et D. Wirosoetisno. Sobolev and Gevrey regularity for the primitive equations in a space dimension 3, *Applicable Analysis*, 84(2005), no. 8, 769-788.
9. M. Petcu. Euler equations in a 3D channel with nonhomogenous boundary conditions, *Differential and Integral Equations*, 19, no. 3, 297-326, 2006.
10. *M. Petcu. On the three-dimensional primitive equations, *Advances in Differential Equations*, 11, no. 11, 1201-1226, 2006
11. *M. Petcu. On the backward uniqueness of the primitive equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 87, no. 3, 275-289, 2007

12. B. Ewald, M. Petcu et R. Temam. Stochastic solutions of the two-dimensional primitive equations of the ocean and atmosphere, *Analysis and Applications*, 5, no. 2, 183-198, 2007
13. *M. Gander et M. Petcu. Analysis of the modified parareal algorithm for second-order ordinary differential equations, *AIP Conference Proceedings : Numerical Analysis and Applied Mathematics*, 233-236, 2007
14. *M. Petcu et R. Temam. The Shallow Water equations with Dirichlet boundary conditions on the velocity, *DCDS-S*, vol. 4, no. 1, 2011
15. *L. Cherfils, M. Petcu et M. Pierre. A finite element discretization of the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, *DCDS-A*, vol. 27, no.4, 1511–1533, 2010
16. *C. Lucas, M. Petcu et A. Rousseau. Quasi-hydrostatic primitive equations for ocean global circulation models, *Chin. Ann. Math.*, 31B(5), pp. 1-20, 2010
17. C. Jung, M. Petcu et R. Temam. Singular perturbation analysis on a homogeneous ocean circulation model, à paraître dans *Analysis and Applications*
18. *S. Faure, M. Petcu, R. Temam et J. Tribbia. On the inaccuracies of some finite volume discretizations of the linearized Shallow Water problem, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, vol. 8, no. 3, pp. 518-541, 2011
19. *M. Petcu et R. Temam. The Shallow Water equations with transparent boundary conditions , à paraître dans *Mathematical Methods in the Applied Sciences*
20. *A. Huang, M. Petcu et R. Temam. Supercritical Shallow Water equations with topography, à paraître dans *Annals of the University of Bucharest, Mathematics Section*
21. *M. Petcu. Exponential Decay of the Power Spectrum and Finite Dimensionality for Solutions of the Three Dimensional Primitive Equations, à paraître dans *Numerische Mathematik*

Ouvrages et articles dans des ouvrages

22. M. Petcu, R. Temam et M. Ziane. Some mathematical problems in fluid dynamics, *Handbook of Numerical Analysis* special volume on *Computational Methods for the Ocean and the Atmosphere*, 577-750, 2009

Proceedings à des Congrès avec comité de lecture

23. M. Gander et M. Petcu. Analysis of a Krylov subspace enhanced parareal algorithm, *ESAIM Proc.*, 25, pp.114-129, 2008

Articles en préparation

24. *M. Petcu et R. Temam. An interface problem: the two-layer Shallow Water equations
25. *A. Bousquet, M. Petcu, M. C. Shiue, R. Temam et J. Tribbia, Boundary conditions for limited area models
26. *M. Petcu, R. Temam et D. Wirosoetisno. Renormalization group method for the three dimensional primitive equations

*Articles résumés dans le mémoire.