# Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées. Application à la simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles.

Nicolas JAMES, sous la direction de François BOUCHON et Thierry DUBOIS.

> Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Jeudi 10 décembre 2009.





Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 1/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

multi-niveaux su grilles décalées

Simulation numérique d'écoulemen autour d'obstacles

# Domaines d'application



(a) Météorologie



(b) Automobile

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 2/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexts

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

numérique d'écoulement autour d'obstacles

# Plan de l'exposé

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 3/41

#### Nicolas JAMES

#### Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveau

Simulation numérique d'écoulement autour d'obstacles

### Sommaire

#### Contexte

Eq. de N-S pour un fluide incompressible Théorie phénoménologique de la turbulence Conséquences en Simulation Numérique Directe Schéma M.A.C.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacle

Conclusion - perspectives

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 4/41

Nicolas JAMES

Sommai

#### Contexte

un fluide incompressible Théorie phénoménologi de la turbulence Conséquences e Simulation

en temps Schéma M.A.C

multi-niveaux su grilles décalées

numérique d'écoulement autour d'obstacles

### Eq. de N-S pour un fluide incompressible

Soient  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  et t > 0. La vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2$  et la pression  $p = p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$  sont solutions de

$$\begin{split} & \frac{\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} \left( \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \right) - \Delta \mathbf{u} / Re + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ & \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ & \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial \Omega, \\ & \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ à } t = 0. \end{split}$$

οù

$$Re = U_*L_*/\nu,$$

avec

$$\nu=\mu/\rho$$
 viscosité cinématique.

fluides	glycérine	air à 20°	eau à 20°
ν	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$10^{-6}$
Re	42	3 594	50 000

Table: 
$$L_* = 10^{-2} m \text{ et } U_* = 5 m.s^{-1}$$
.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 5/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Eq. de N-S pour un fluide incompressible

phénoménologique de la turbulence
Conséquences en
Simulation
Numérique
Directe
Discrétisation

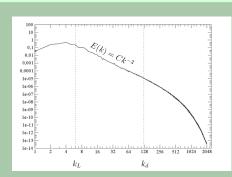
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

imulation numérique l'écoulements nutour

# Théorie phénoménologique de la turbulence

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{\imath \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad E(k) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in S_k} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2, \ k \in \mathbb{N}$$
$$S_k = \{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 : |\mathbf{k}| \in [k - 0.5, k + 0.5) \}$$

$$E(k) \sim Ck^{-3}, k \in [k_L, k_d], \quad k_d/k_L \sim Re^{1/2}.$$



• R.H. Kraichnan, *Inertial* ranges in two-dimensional turburlence, Phys. Fluids **10**, 1967.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Eq. de N-S pour un fluide

Théorie phénoménologique de la turbulence

Conséquences en Simulation Numérique Directe Discrétisation

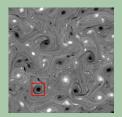
Méthodes

multi-niveaux sur grilles décalées

numérique d'écoulements autour d'obstacles

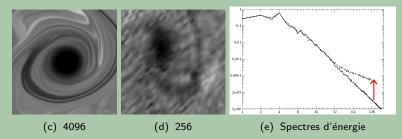
Conclusion -

### Conséquences en Simulation Numérique Directe



Maillage trop grossier,

- → Perte équilibre Transfert / Dissipation,
- → Accumulation Energie sur les modes élevés,
- $\rightarrow$  Solution non physique.



### Méthode Multi-niveaux :

Décomposition échelles de la vitesse et correction petites échelles

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 7/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Eq. de N-S pour un fluide incompressible Théorie

Conséquences en Simulation Numérique

Discrétisation en temps Schéma M.A.C.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

numérique d'écoulements autour

d obstacies

# Schéma en temps B.D.F. + Méth. de Proj.

Soit  $\delta t > 0$ . Notons  $\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)$  et  $p^k(\mathbf{x}) \approx p(\mathbf{x}, t_k)$ ,  $t_k = k\delta t$ .

$$\begin{split} \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - 4\mathbf{u}^k + \mathbf{u}^{k-1}}{2\delta t} - \triangle \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} / Re &= -\nabla p^k + \mathbf{f}^{k+1} \\ -2 \operatorname{div} \big( \mathbf{u}^k \otimes \mathbf{u}^k \big) + \operatorname{div} \big( \mathbf{u}^{k-1} \otimes \mathbf{u}^{k-1} \big), \\ \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} |_{\partial \Omega} &= \mathbf{g}. \end{split}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - 2\delta t \, \nabla (\delta p^{k+1}) / 3$$

$$\operatorname{div} \, \mathbf{u}^{k+1} = 0$$

$$(\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}) \, |_{\partial\Omega} \, .\mathbf{n} = 0.$$

où 
$$\delta p^{k+1} = p^{k+1} - p^k$$
.

$$\triangle \left(\delta p^{k+1}\right) = 3 \operatorname{div} \, \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}/2\delta t$$
$$\partial_{\mathbf{n}} \left(\delta p^{k+1}\right)|_{\partial \Omega} = 0,$$

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Nicolas JAMES

Sommaire

Eq. de N-S pour un fluide incompressible

rneorie phénoménologiq de la turbulence Conséquences ei Dimulation Numérique

Discrétisation en temps Schéma M.A.C

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

# Schéma M.A.C.: placement des inconnues

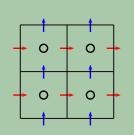
Soit  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$ .

On pose  $\ell = L/n_{\ell}$ ,  $h = H/n_{h}$ ,  $x_{i} = i \ell$  et  $y_{i} = j h$ .

On suppose que  $\ell = h$ .

$$K_{i,j} = \begin{bmatrix} x_{i-1} , x_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{j-1} , y_j \end{bmatrix}$$

$$u_{ij}(t) \simeq \frac{1}{\ell h} \int_{K_{i+\frac{1}{2},j}} u(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}, \quad v_{ij}(t) \simeq \frac{1}{\ell h} \int_{K_{ij+\frac{1}{2}}} v(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$
$$p_{ij}(t) \simeq \frac{1}{\ell h} \int_{K_{ij}} p(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}.$$





• F.H. Harlow et J.E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Phys. Fluids **8**, 1965. Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 9/41

Nicolas JAMES

Somman

Eq. de N-S pour un fluide

incompressible Théorie phénoménologiqu

e la turbulence onséquences en mulation umérique irecte

en temps Schéma M.A.C.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion -

### Sommaire

Contexte

### Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Opérateurs d'interpolation Propriétés des opérateurs Séparation des échelles Algorithme multi-niveaux Résultats numériques

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 10/41

Nicolas JAMES

Sommain

Context

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

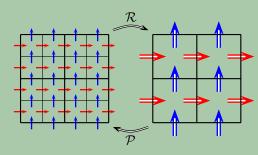
Opérateurs d'interpolation Propriétés des opérateurs

> Séparation d échelles Algorithme multi-niveaux Résultats

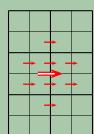
numérique d'écoulemer autour

d'obstacles

# Opérateurs d'interpolation : restriction



$$(\mathcal{R}u)_{i,j} = \left(u_{2i-1,2j} + u_{2i-1,2j-1} + u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j} + u_{2i,2j-1} + u_{2i,2j-2} + u_{2i+1,2j} + u_{2i+1,2j-1}\right)/8$$



Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

11/41 Nicolas JAMES

Sommai

Contexto

multi-niveaux su

#### Opérateurs d'interpolation

Propriétés des opérateurs Séparation des échelles

Algorithme multi-niveaux Résultats

Résultats numériques

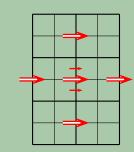
numérique d'écoulements

d'obstacles

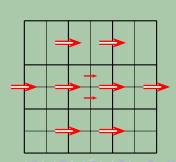
perspectives

# Opérateurs d'interpolation : prolongement

$$(\mathcal{P}u)_{2i,2j} = \left[u_{i-1,j} + 2u_{i,j+1} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}\right]/8$$



$$(\mathcal{P}u)_{2i-1,2j} = \left[u_{i-1,j+1} + 3u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + 3u_{i,j}\right]/8$$



#### Méthodes multi-niveaux sur

multi-niveaux sur grilles décalées 12/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

C-----

multi-niveaux sur

#### Opérateurs d'interpolation

Propriétés des opérateurs Séparation des échelles

Algorithme multi-niveaux Résultats

Résultats numériqu

Simulation numérique

autour d'obstacles

# Propriétés des opérateurs

### Opérateurs d'ordre deux :

$$\left\| \mathcal{R}u^{\mathbf{n}} - u^{\mathbf{n}/2} \right\|_{\infty} \leq Ch^{2},$$
$$\left\| \mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2} - u^{\mathbf{n}} \right\|_{\infty} \leq Ch^{2}$$

Conservation de la divergence discrète :

$$D_{\mathbf{n}/2}(\mathcal{R}\mathbf{u})_{i,j} = \sum_{p, q} d_{p, q} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{u})_{p, q}$$
$$D_{\mathbf{n}}(\mathcal{P}\mathbf{u})_{i, j} = \sum_{p, q} e_{p, q} D_{\mathbf{n}/2}(\mathbf{u})_{p, q}$$

où  $D_n$  est la divergence discrète sur la grille  $\mathcal{G}_n$ .

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 13/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

léthodes

grilles décalées

Opérateurs

Propriétés des opérateurs Séparation des

Algorithme multi-niveaux Résultats

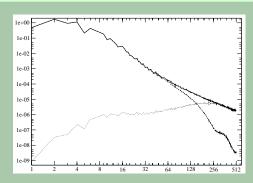
Simulation numérique

autour d'obstacles

### Séparation des échelles : 2 niveaux

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \left( \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \mathcal{PR}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \mathcal{PR}\mathbf{u} \end{array} \right)$$

$$\|\mathbf{z}\|_{\infty} \leq \mathit{Ch}^2$$
 
$$D\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow D\mathbf{y} = \mathbf{0} = D\mathbf{z}$$



Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 14/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

> Opérateurs d'interpolation Propriétés des opérateurs

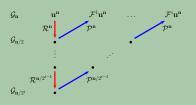
#### Séparation des échelles

Algorithme multi-niveaux Résultats numériques

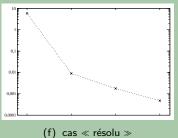
Simulation numérique d'écoulement autour

Conclusion -

### Séparation des échelles : n niveaux



$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{i} &= \mathcal{P}^{(i)} \circ \mathcal{R}^{(i)}, \\ \delta^{i}_{\mathcal{F}} \mathbf{u} &= \left(\mathcal{F}^{i-1} - \mathcal{F}^{i}\right) \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \delta^{i}_{\mathcal{F}} \mathbf{u}\right) + \mathcal{F}^{n} \mathbf{u}. \end{aligned}$$



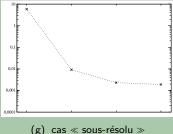


FIGURE: Energie des différentes échelles, 4 niveaux.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 15/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Méthodes multi-niveaux s

Opérateurs d'interpolation

#### Séparation des échelles

Algorithme multi-niveaux Résultats

Simulation numérique d'écoulements autour

Conclusion -

4 - 1 4 - 1 - 1 - 1 - 1

# Algorithme multi-niveaux

1. énergie cinétique (locale) des niveaux d'échelle sur des groupements de mailles

$$E_{p,q}(\delta_{\mathcal{F}}^{i}\mathbf{u}), i \in \{1,2,3\}$$

2. coefficients de correction locaux :

$$c_{p,\,q} = \frac{E_{p,\,q}(\delta_{\mathcal{F}}^2\mathbf{u})}{\sqrt{E_{p,\,q}(\delta_{\mathcal{F}}^3\mathbf{u})E_{p,\,q}(\delta_{\mathcal{F}}^1\mathbf{u})}}$$

- 3. limitateur  $c_{min} \le c_{p, q} \le 1$  (dans la pratique  $c_{min} = 0.99$ )
- 4. interpolation des coefficients de correction sur chaque maille
- 5. correction de la vitesse intermédiaire :

$$\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{y} + c \mathbf{z}$$

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 16/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

d'interpolation
Propriétés des
opérateurs
Séparation des

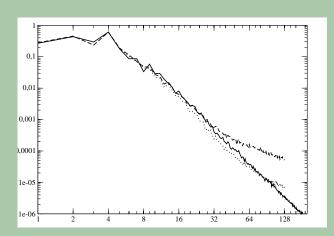
Algorithme multi-niveaux

Résultats numériques

numérique d'écoulemen autour

### Résultats numériques : périodique

- accumulation énergie maîtrisée
- ▶ pente du spectre  $\approx Ck^{-3}$
- dynamique des grandes échelles retrouvée



Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 17/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

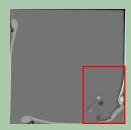
Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

d'interpolation
Propriétés des
ppérateurs
Séparation des
échelles
Algorithme

Résultats numériques

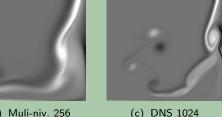
numérique d'écoulements autour d'obstacles

### Résultats numériques : cavité



- ► DNS grossière → accumulation petites structures près de la paroi
- Méth. multi-niveaux → développement de la couche limite amélioré





(a) DNS 256

(b) Muli-niv. 256

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 18/41

#### Nicolas IAMES

#### Résultats numériques

### Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

### Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée Schéma numérique

Schema numerique

Solveur rapide

Résultats numériques

Conclusion - perspectives

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 19/41

#### Nicolas JAMES

Sommai

Contoud

Méthodes multi-niveaux su

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

numérique L'obstacle

L'obstacle Les ratios

Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de prédiction Discrétisation

de l'étape de correction Solveur rapide

Résultats numériques



Méthode de type frontière immergée sur maillage cartésien

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 20/41

Nicolas JAMES

multi-niveaux sur

Sommaire

fronti\unhbox \voidb@x

Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique L'Obstacle

- ► Écoulements plus réalistes
- Application de la méthode multi-niveaux développée.

ère;  $mmerg \in e_t exte.jpg \in re; mmerg \in e_t exte.jpg$ 

- ▶ Dans la littérature : forçage, ghost cell, pénalisation, cut cell (avec mergin cell, slaving cell), ...
- ▶ Développement d'une nouvelle méthode de type « cut cell ».

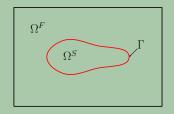
de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de correction

Le placement des inconnues

Résultats numériques

### L'obstacle

Domaine d'étude rectangulaire. Obstacle  $\Omega^S$  délimité par une courbe fermée  $\Gamma \subset \Omega$ .



Distance algébrique à la courbe Γ

$$egin{aligned} d: \Omega &
ightarrow \mathbb{R} \ \mathbf{x} &\mapsto \left\{ egin{aligned} d(\mathbf{x}, \Gamma) & ext{si } \mathbf{x} \in \Omega^S \ -d(\mathbf{x}, \Gamma) & ext{sinon} \end{aligned} 
ight.$$

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 21/41

#### Nicolas IAMES

L'obstacle

#### Les ratios

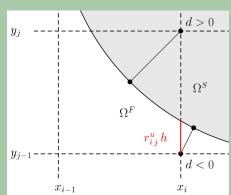
de l'étape de de l'étape de

### Les ratios

$$r_{ij}^u \approx \frac{|\sigma_{i,j}^u \cap \Omega^F|}{|\sigma_{i,j}^u|} \in [0,1],$$

οù

$$\sigma_{i,j}^u = \{x_i\} \times [y_{j-1}, y_j].$$



#### Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 22/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

numérique d'écoulemen autour

Méthodes de type frontièr

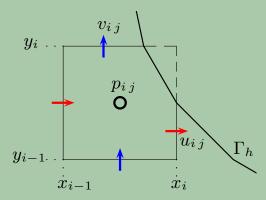
mmergee Schéma numérique

Les ratios

Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de prédiction

de l'étape de correction Solveur rapide Résultats numériques

### Placement des inconnues



- Position de la vitesse adaptée à l'expression de la divergence discrète.
- ▶ Interpolation du gradient de la pression.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 23/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Context

multi-niveaux su grilles décalées

> Simulation numérique d'écoulement

d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique

Les ratios

#### Le placement des inconnues

de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de

correction Solveur rapido Résultats

Conclusion -

4 - 1 4 - 1 4 - 1 4 - 1

# Construction du schéma : étape de prédiction

Loin de l'obstacle : discrétisations centrées d'ordre 2.

### A proximité de l'obstacle

```
\left\{ \begin{array}{l} \triangle \textbf{u} \ : \ \text{discrétisation D. F. d'ordre 1} \\ \text{div}\left(\textbf{u} \otimes \textbf{u}\right) \ : \ \text{discrétisation V. F. d'ordre 1} \end{array} \right.
```

• N. Matsunaga et T. Yamamoto, Superconvergence of the Shortley-Weller approximation for Dirichlet problems, J. Comp. Appl. Math. **116**, 2000.



Schéma d'ordre 2.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 24/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

multi-niveaux sur grilles décalées

> Simulation numérique d'écoulements

autour d'obstacles

type frontiere immergée Schéma

L'obstacle Les ratios

Les ratios
Le placement

Le placement des inconnues Discrétisation

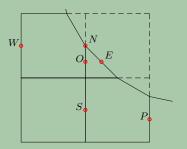
de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de correction Solveur rapide Résultats

# Discrétisation étape de prédiction : $\triangle u$

Schéma D. F. d'ordre un  $\Leftrightarrow$  Approx. exacte pour  $P \in \mathbb{R}_2[X, Y]$ .

$$\mathcal{V} = \{O, N, S, E, W, P\}$$

- $\triangleright$  O la position de  $u_{ij}$ ,
- ► *N*, *S*, *E*, *W* parmis inconnues/bord,
- P arbitraire.



Trouver les coeff.  $\alpha_M \in \mathbb{R}$  t.q.

$$\sum_{M\in\mathcal{V}}\alpha_M u(M) = \triangle u(O) + \mathcal{O}(h).$$

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 25/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

. . .

Méthodes multi-niveaux s

Simulation numérique d'écoulement autour

Méthodes de type frontière immergée

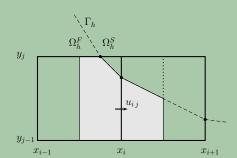
chema numérique L'obstacle

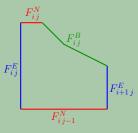
Les ratios Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de

prédiction Discrétisation de l'étape de correction

Solveur rapid Résultats numériques

# Discrétisation étape de prédiction : $div(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ (1/3)





 $\tilde{K}_{i,j} = K_{i,j} \cap \Omega^F$ 

$$\mathcal{I}_{i,j} = \int_{\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}} (\partial_{x}(u^{2}) + \partial_{y}(uv)) d\mathbf{x} 
= \int_{\partial \tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}} (u^{2}n_{x} + (uv)n_{y}) dS 
= \mathbf{F}_{i+1,j}^{E} - \mathbf{F}_{i,j}^{E} + \mathbf{F}_{i,j}^{N} - \mathbf{F}_{i,j-1}^{N} + \mathbf{F}_{i,j}^{B},$$

 $\rightarrow$  reconstruction des flux

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 26/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Context

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulement

> obstacles Viéthodes de

ype frontière mmergée

imérique

L'obstacle Les ratios

Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de

prédiction
Discrétisation
de l'étape de
correction

Résultats numériques

# Discrétisation étape de prédiction : $div(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ (2/3)

$$\mathcal{I}_{i,j} \approx F_{i+1,j}^{E\,app} - F_{i,j}^{E\,app} + F_{i,j}^{N\,app} - F_{i,j-1}^{N\,app} + F_{i,j}^{B\,app} = NL_1(\mathbf{u})_{i,j}.$$

### Ordre d'approximation

$$C_h = \left\{ \min_{\left|\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}\right| > 0} \left|\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}\right| \right\} / h^2.$$

S'il existe une constante  $C_0 > 0$  t.q.  $C_h > C_0$ ,  $\forall h$ , alors

$$\frac{1}{|\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}|}(NL_1(\mathbf{u})_{i,j}-\mathcal{I}_{i,j})=\mathcal{O}(h),$$

dès que  $\left| \tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j} \right| > 0$ .

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 27/41

Nicolas JAMES

Sommaire

ontexte

ivietnodes multi-niveaux sur grilles décalées

mulation imérique écoulement

itour obstacles

Méthodes de ype frontière mmergée

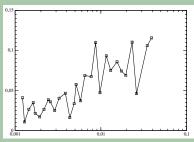
umérique L'obstacle

Les ratios Le placement des inconnue

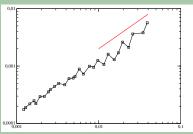
Discrétisation de l'étape de prédiction Discrétisation

de l'étape de correction Solveur rapide Résultats

# Discrétisation étape de prédiction : $div(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ (3/3)



Coefficient  $C_h$  en fonction du pas d'espace h



Erreur d'approximation de la non-linéarité en fonction de h  $\psi$ ordre 1

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 28/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux s zrilles décalées

iumérique l'écoulement iutour

d'obstacles

Méthodes de type frontière mmergée

Schéma numérique

L'obstacle Les ratios

Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de

prédiction
Discrétisation
de l'étape de
correction

Solveur rapid Résultats numériques

### Construction du schéma : étape de correction

- div u : Divergence discrète / maille
- $\nabla p$ : Opérateur d'interpolation du gradient de pression

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 29/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

multi-niveaux sur grilles décalées

> numérique d'écoulement autour

d'obstacles Méthodes d type frontiè

type frontière immergée Schéma

L'obstacle

Les ratios Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de

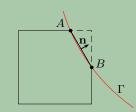
Discrétisation de l'étape de correction

Résultats numériques

# Divergence discrète en présence d'un obstacle (1/2)

$$\begin{split} \iint_{\tilde{K}_{i,j}} \operatorname{div} \, \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= \int_{\partial \tilde{K}_{i,j}} \mathbf{u}.\mathbf{n} \, dS \\ &= \int_{\sigma^u_{i,j} \cap \Omega^F} u dS - \int_{\sigma^u_{i-1,j} \cap \Omega^F} u \, dS \\ &+ \int_{\sigma^v_{i,j} \cap \Omega^F} v dS - \int_{\sigma^v_{i,j-1} \cap \Omega^F} v \, dS + \int_{\widehat{AB}} \mathbf{u}.\mathbf{n} \, dS, \end{split}$$

où 
$$\widehat{AB} = \Gamma \cap K_{i,j}$$
.



Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 30/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements nutour

Méthodes de type frontière immergée

numérique L'obstacle

Les ratios

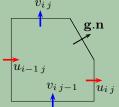
des inconnues Discrétisation de l'étape de prédiction

#### Discrétisation de l'étape de correction

Résultats numérique

Conclusion -

# Divergence discrète en présence d'un obstacle (2/2)



• Si  $h \ll$  rayon de courbure de  $\Gamma$  :

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{u.n} \, dS \approx \int_{[AB]} \mathbf{u.n} \, dS$$
$$\approx L \, \mathbf{g} \Big( (A+B)/2 \Big) . \mathbf{n}_{i,j}.$$

$$\bullet \int_{\sigma_{i,j}^u \cap \Omega^F} u \, dS \approx r_{i,j}^u \, h \, u_{i,j} \ \text{et} \ \int_{\sigma_{i,j}^v \cap \Omega^F} v \, dS \approx r_{i,j}^v \, h \, v_{i,j}.$$

$$(D_{obs}\mathbf{u})_{i,j} = h \left( r_{i,j}^{u} u_{i,j} - r_{i-1,j}^{u} u_{i-1,j} \right) + h \left( r_{i,j}^{v} v_{i,j} - r_{i,j-1}^{v} v_{i,j-1} \right)$$

$$+ L \mathbf{g} \left( (A+B)/2 \right) \cdot \mathbf{n}_{i,j}$$

$$= (D_{obs}^{0} \mathbf{u})_{i,j} + D_{i,j}^{supp}$$

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 31/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Méthodes

multi-niveaux sur grilles décalées

umérique 'écoulement: utour

Méthodes de type frontière

Schéma numérique

L'obstacle Les ratios

Les ratios Le placemen des inconnue

Discrétisation de l'étape de prédiction

#### Discrétisation de l'étape de correction

Résultats numériques

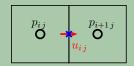
Conclusion perspectives

4 - - 4 - - 4 - - 4 -

# Opérateur d'interpolat° du gradient de pression $\mathcal{P}_{\phi}$

En l'absence d'obstacle

$$Gp = \begin{pmatrix} (p_{i+1,j} - p_{i,j})/h \\ (p_{i,j+1} - p_{i,j})/h \end{pmatrix}$$

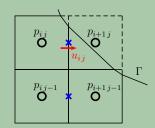


$$D(G\delta p) = \frac{3}{2} \frac{h^2}{\delta t} D(\tilde{\mathbf{u}})$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{2}{3} \frac{\delta t}{h^2} G\delta p$$

$$\Rightarrow D(\mathbf{u}) = 0$$

### En présence d'obstacle



$$D_{obs}^{0}(\mathcal{P}_{\phi}(G\delta p)) = \frac{3}{2} \frac{h^{2}}{\delta t} D_{obs}(\tilde{\mathbf{u}})$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{2}{3} \frac{\delta t}{h^{2}} \mathcal{P}_{\phi}(G\delta p)$$

$$\Rightarrow D_{obs}(\mathbf{u}) = 0$$

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 32/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

numérique d'écoulements autour d'obstacles Méthodes de type frontière

L'obstacle Les ratios Le placement des inconnues

de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de correction

Résultats

### Solveur rapide (1/2)

Obstacle  $\rightarrow$  systèmes linéaires non symétriques

Méthode de résolution de systèmes linéaires **itératives**. Mailles coupées

- $\rightarrow \, \mathsf{Syst\`{e}mes} \,\, \mathsf{mal} \,\, \mathsf{conditionn\acute{e}s}$ 
  - → Convergence difficile
    - $\rightarrow {\sf Simulation} \ {\sf sur} \ {\sf maillage} \ {\sf grossier}$ 
      - → Simulation d'écoulements à Re faible

Méthode de résolution des systèmes linéaires directe.

- Etape de pré-traitement : O(n³) opérations. Si obstacle immobile, une fois par simulation.
- 2. Dans ce cas,  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$  opérations par itération (idem écoulement sans obstacle).

• B.L. Buzbee, F.W.Dorr, J.A. George et G.H. Golub, The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions, SIAM J. Num. Anal. 8, 1971.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 33/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique L'obstacle

L'obstacle
Les ratios
Le placement
des inconnues
Discrétisation
de l'étape de
prédiction
Discrétisation
de l'étape de

Solveur rapide Résultats

### Solveur rapide (2/2)

### Exemple de simulation :

```
\Omega = (-5, 5)^2, obstacle = disque, D = 1,
```

Maillage uniforme, n = 1024, 412 mailles coupées

Tps CPU prétraitement : 6 min

Tps CPU par itération : 1.6 s

Mémoire allouée : 300 Mo  $\approx an^2$ , a = 310 octets/point.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 34/41

### Nicolas JAMES

Sommain

Context

Methodes multi-niveaux sur grilles décalées

> Simulation numérique d'écoulements nutour

d'obstacles Méthodes de type frontière

> mmergee Schéma numérique

L'obstacle

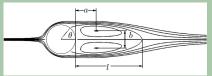
Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de

#### Solveur rapide Résultats

numériques

### Résultats numériques : Re = 1, 10, 20, 40

### Écoulements stationnaires



• R. Bouard et M. Coutanceau, Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation, J. Fluid Mech. **79**, 1977.

$$\sum \mathsf{Forces}_{/\mathsf{obstacle}} = \left( \begin{array}{c} F_d \\ F_I \end{array} \right) = \frac{1}{2} \rho A u_{\infty} \left( \begin{array}{c} C_d \\ C_I \end{array} \right),$$

Auteurs	Re = 40				
	$C_d$	$\theta$	1	а	Ь
Bouard et al		53.8	2.13	0.76	0.59
Calhoun	1.62	54.2	2.18		
Dennis et al	1.52	53.8	2.35		
Fornberg	1.50	55.6	2.24		
Linnick et al	1.54	53.6	2.28	0.72	0.60
Taira et al	1.55	54.1		0.73	0.60
Présente étude	1.50	53.4	2.26	0.710	0.60

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 35/41

Nicolas JAMES

Sommaire Contexte

> ulti-niveaux s rilles décalées

> imulation umérique

utour l'obstacles

Méthodes de type frontièr

nmergée chéma umérique

obstacle es ratios

Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de

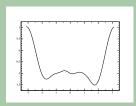
#### Résultats numériques

# Résultats numériques : Re = 80,200

### Écoulement instationnaire.

Fréquence d'émission des tourbillons = nombre de Strouhal St.

Auteurs	Re = 200			
	$C_d$	$C_{I}$	St	
Linnick et al	$1.34 \pm 0.044$	0.69	0.197	
Liu et al	$1.31 \pm 0.049$	0.69	0.192	
Miyake et al	$1.34 \pm 0.043$	0.67	0.196	
Présente étude	$1.380 \pm 0.0445$	0.678	0.197	



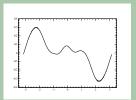


FIGURE: Répartion de la pression et de la contrainte de cisaillement sur l'obstacle.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 36/41

Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

numérique d'écoulemen autour

d'obstacles

Méthodes de type frontière

chéma umérique

L'obstacle Les ratios

Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de

Correction
Solveur rapide
Résultats

numériques Conclusion -

# Ecoulement autour d'un cylindre, Re = 200.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 37/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Context

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

Simulation numérique d'écoulement autour

Méthodes de type frontièr immergée

Schéma numérique

L'obstacle Les ratios

Les ratios Le placem des inconr

de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de

Solveur rapide Résultats

Résultats numériques

perspectives

### Résultats numériques : Re = 9500

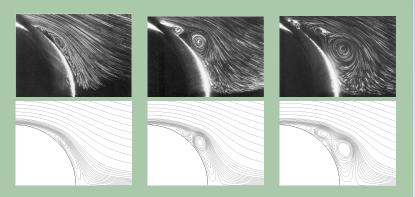


FIGURE: Décollement de la couche limite : comparaison avec des résultats expérimentaux.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 38/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Contexte

Méthodes nulti-niveaux sur rilles décalées

imérique écoulement itour

obstacles

type frontière immergée Schéma numérique

Les ratios

Le placement des inconnues Discrétisation de l'étape de prédiction Discrétisation de l'étape de

Solveur rapide Résultats numériques

Conclusion -

### Ecoulement autour d'un cylindre, Re = 9500.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 39/41

#### Nicolas JAMES

Sommaire

Context

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

> Simulation numérique d'écoulement autour

Méthodes de type frontière immergée

numérique L'obstacle

Les ratios Le placem

des inconnues
Discrétisation
de l'étape de
prédiction
Discrétisation

Discrétisation de l'étape de correction

Résultats numériques

Conclusion perspectives

4----

### Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 40/41

#### Nicolas JAMES

Sommai

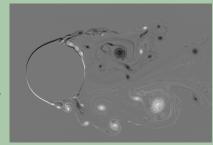
Contexte

Méthodes multi-niveaux su grilles décalées

Simulation numérique d'écoulemen autour d'obstacles

# Conclusion et perspectives

- méthode multi-niveaux originale dans le contexte MAC qui permet un gain du temps de calcul.
- nouvelle méthode « *cut cell* » qui apporte précision et rapidité.



- 1. méth. multi-niveaux autour d'un obstacle 2d
- 2. méth. multi-niveaux en 3d
- 3. écoulements tri-dimensionnels (cylindre)
- 4. méthode de raffinement local
- 5. méthode de décomposion de domaine

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées 41/41

Nicolas JAMES

Sommair

Context

multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulement: autour d'obstacles