



N° d'ordre : D.U. 1995

UNIVERSITÉ BLAISE-PASCAL

(U.F.R. de Sciences et Technologies)

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

N° : 626

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

(SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

par

Nicolas JAMES

Titulaire du diplôme de Master

MÉTHODES MULTI-NIVEAUX SUR GRILLES DÉCALÉES.
APPLICATION À LA SIMULATION NUMÉRIQUE
D'ÉCOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES.

Soutenue publiquement le 10 décembre 2009, devant la commission d'examen :

François BOUCHON	Co-directeur
Emmanuel CREUSE	Rapporteur
Thierry DUBOIS	Directeur
Emmanuel MAITRE	Examineur
Bertrand MAURY	Examineur
Rachid TOUZANI	Examineur

Rapporteurs de Thèse : Emmanuel CREUSE et Jie SHEN.

Remerciements

Je remercie Emmanuel CREUSE et Jie SHEN d'avoir lu mon manuscrit de thèse et d'avoir rédigé un rapport aussi rapidement. A cette occasion, M. CREUSE m'a proposé des perspectives de recherche fortes intéressantes. Il a aussi accepté d'entrer dans la composition du jury de ma soutenance de thèse, tout comme Emmanuel MAITRE, Bertrand MAURY et Rachid TOUZANI.

Je tiens également à remercier mes deux directeurs de thèse : François BOUCHON et Thierry DUBOIS. Grâce à leur disponibilité et à leurs compétences scientifiques, mes interrogations ont toujours débouché sur des éléments de réponse, par le biais d'une discussion à trois. De plus, leur simplicité et leur bonne humeur a permis d'établir rapidement une ambiance de travail favorable à la Recherche.

Pour mener à bien mes activités d'enseignement, j'ai reçu l'aide de nombreux enseignants-chercheurs, notamment : Thierry BUFFARD, Claire CHAINAIS, Benjamin DELAY, Marie-Josée JASOR et Jérôme LEMOINE. Ils ont immédiatement fait confiance à l'enseignant en herbe que j'étais à mes débuts. Merci à tous.

Pendant ces trois années, j'ai été accueilli au Laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand. Je souligne le dynamisme et le travail remarquable des directeurs (Youcef AMIRAT, puis Michaël HEUSENER et Jean PICARD) et des secrétaires (Valérie SOURLIER pour le Laboratoire et Marie-Paule BRESSOULALY pour le Département).

Installé au premier étage dans le bureau 1109, j'ai croisé la route de nombreuses personnes qui aujourd'hui comptent pour moi. Pour cela, je donne un grand merci à Mathieu GOURCY et à Ingrid VIOLET pour leurs précieux conseils, un verre de Bourgogne à Olivier BODARD et à Serge DACHIAN pour les parties de rigolade, un vrai coup droit à Damien FERNEY pour qu'il puisse enfin savoir jouer au squash (je rigole), un chèque-cadeau d'un montant colossale à valoir sur vente-privee.com à Magnolia MAMAGHANI pour son plaisir, une borne d'arcade dernier cri à Cédric BARREL pour toutes ses fameuses blagues, une ascension du Mont Everest à Vivien CLAUZON pour tous ces moments passés ensemble (on se souviendra d'une fameuse ballade au Puy-de-Dôme avant le lever du jour et des nombreuses soirées improvisées), un jet privé à Malcom DJENNO, le plus français des gabonais, pour qu'il puisse venir en Auvergne dès qu'il en a envie, et puis une maison avec jardin à Haïja MOUSTAFA où il corrigera les copies de ses étudiants, car je sais qu'il aime ça.

J'embrasse mes parents qui m'ont tant soutenu durant toute ma scolarité. Ils m'ont aidé à entreprendre chacun de mes projets (agrégation, thèse). Mes grands-parents occupent aussi une place importante dans ma vie, en particulier Lucienne et Paul, je leur dédie ce document.

Enfin, je pense à Elise, mon épouse depuis peu, ma compagne depuis déjà huit années. Alors qu'elle était à Poitiers pour terminer ses études, je me suis plongé dans la simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles (Malcom, Vivien et Haïja s'en rappellent). Elle me disait souvent que je travaillais trop. Je lui dis maintenant que, pour elle, j'ai toute la vie.

A Lucienne et Paul.

Sommaire

Introduction	11
1 Modélisation des écoulements incompressibles turbulents	17
1.1 Écoulements fluides : modélisation mathématique et aspects physiques	18
1.2 Discrétisations des équations de Navier-Stokes	36
2 Algorithme multi-niveaux et applications	53
2.1 Introduction.	55
2.2 Notations et définitions	58
2.3 Propriétés géométriques des opérateurs	60
2.4 Construction des opérateurs	72
2.5 Séparation des échelles	79
2.6 Méthodes multiniveaux	93
2.7 Résultats numériques	103
2.8 Opérateurs d'interpolation et conditions aux limites de Dirichlet	116
3 Nouveau schéma pour la simulation d'écoulements autour d'obstacles	127
3.1 Description du problème	128
3.2 Le placement des inconnues	131
3.3 Discrétisation de l'étape de prédiction	134
3.4 Discrétisation de l'étape de correction	154
3.5 Description du solveur rapide	159
3.6 Simulations numériques directes	160
3.7 Simulations multi-niveaux : résultats préliminaires	174
Conclusion	187

Introduction

Les méthodes développées dans cette thèse sont notamment motivées par des problèmes issus de l'industrie (aéronautique, automobile) et de l'environnement (météorologie, dispersion de polluant).

Modélisation d'un écoulement turbulent

Un écoulement turbulent est caractérisé par la présence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Il est formé de structures (tourbillons et filaments) de dimensions très variées qui interagissent entre elles. On associe à chaque écoulement un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds. Plus ce nombre est grand, plus la différence entre la taille de la plus grande structure et celle de la plus petite est importante. La théorie phénoménologique de la turbulence, initialement développée par Kolmogorov en dimension trois [47], [48], permet de décrire la répartition de l'énergie parmi les échelles d'un écoulement turbulent. Selon cette théorie, il existe un ensemble d'échelles pour lesquelles le transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles dû aux effets des termes non-linéaires et la dissipation de l'énergie liée à la viscosité du fluide s'équilibrent.

L'écoulement incompressible d'un fluide homogène et newtonien est modélisé par les équations de Navier-Stokes adimensionnées

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

où les inconnues sont la vitesse \mathbf{u} et la pression p . La force extérieure \mathbf{f} et le nombre de Reynolds Re sont les données du problème. Ces équations sont complétées par une condition initiale et des conditions aux limites qui dépendent du phénomène physique modélisé. Elles sont discrétisées à l'aide d'un schéma en temps et en espace. Lorsque le terme de transport est explicite, une condition de stabilité de type CFL entraîne une contrainte sur le pas de temps du schéma.

Méthodes de simulation numérique

La simulation numérique des écoulements turbulents est délicate. En effet, lorsque le pas d'espace du maillage est plus grand que l'échelle dissipative, le maillage ne permet pas la représentation des plus petites échelles de l'écoulement réel. L'énergie transférée depuis les grandes échelles vers les petites échelles, par l'action des termes d'interaction non-linéaires, n'est pas dissipée correctement. On constate alors une augmentation anormale de l'énergie au niveau des échelles qui correspondent à la taille de la maille de calcul. En conséquence, la réalisation d'une simulation numérique directe (résolution de toutes les échelles physiques sans modélisation de la turbulence) pour des écoulements caractérisés par un nombre de Reynolds élevé est très coûteuse en ressources informatiques, c'est-à-dire en encombrement mémoire (plusieurs dizaines voire centaines de Go) et en temps calcul (plusieurs centaines

voire milliers d'heures CPU). Plusieurs méthodes ont été développées pour permettre la simulation d'écoulements à nombres de Reynolds élevés.

Simulation des grandes échelles

En simulation des grandes échelles, la vitesse du fluide \mathbf{u} est décomposée en

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad (0.0.2)$$

où $\bar{\mathbf{u}}$ est la vitesse des grandes échelles et \mathbf{u}' est une fluctuation de la vitesse provenant des petites échelles. Les équations des grandes échelles sont obtenues formellement à partir des équations de Navier-Stokes, par l'application d'un filtre. L'effet des petites échelles sur la dynamique des grandes échelles est représenté par un terme d'interaction non-linéaire appelé tenseur des contraintes sous-maillages. La plupart des modèles expriment ce tenseur en fonction des échelles résolues [33], [29], [30].

Méthodes multi-niveaux

Les méthodes multi-niveaux reposent sur une séparation en espace des échelles de l'écoulement. La vitesse \mathbf{u} , solution des équations de Navier-Stokes, est décomposée en

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad (0.0.3)$$

où \mathbf{y} (resp. \mathbf{z}) représente les grandes (resp. petites) échelles. Les nouvelles inconnues (\mathbf{y} , \mathbf{z}) ont des propriétés très différentes. L'énergie cinétique de la composante \mathbf{z} est faible par rapport à celle de \mathbf{y} . Par contre, \mathbf{z} , considérée comme signal temporel oscille plus et avec une fréquence plus élevée que la composante grandes échelles (plus de détails dans [37]). L'évolution des grandes échelles dépend des petites échelles par l'intermédiaire des termes d'interaction non-linéaires.

Les méthodes multi-niveaux dynamiques utilisent une approche quasi-stationnaire : l'évolution de la composante petites échelles est négligée durant plusieurs itérations. Les termes d'interaction petites/grandes échelles sont figés pendant plusieurs V-cycles successifs à la manière des méthodes multigrilles (voir [77] et [15]), ce qui définit un cycle multi-niveaux. L'analyse d'erreur est étudiée et les cycles multi-niveaux sont gérés dynamiquement. Cette technique a été développée dans de nombreux contextes : pour les méthodes volumes finis [36], pour les méthodes spectrales [10], [31], pour les méthodes éléments finis [18], [19], et pour les méthodes utilisant une décomposition en ondelettes [25], [27].

Dans une autre approche, les méthodes multi-niveaux consistent à accélérer la convergence vers la solution d'un problème stationnaire, par exemple celle du problème de Stokes, en utilisant un algorithme de type Uzawa. La résolution du système linéaire sur grille fine est alors équivalente à la résolution d'une suite de systèmes linéaires de tailles plus petites. Ces systèmes linéaires correspondent à des niveaux de grilles imbriquées. Ici, les propriétés physiques de l'écoulement ne sont pas prises en compte. On cite en particulier les travaux [21] et [64] dans le contexte des méthodes différences finies.

Dans une dernière approche, les méthodes multi-niveaux consistent à appliquer un traitement spécifique à chaque échelle, en considérant les propriétés physiques de l'écoulement. Dans le cadre spectral [11], [53], [32], la décomposition des échelles est utilisée pour imposer la décroissance du spectre d'énergie. La dynamique des grandes échelles est améliorée par le contrôle de l'accumulation de l'énergie sur les modes élevés. Le cadre spectral est le contexte le plus naturel pour la décomposition des échelles. On extrait simplement les grandes échelles en tronquant le développement en série de Fourier de la vitesse. Nous proposons d'étendre ces travaux dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet afin de pouvoir traiter des problèmes plus réalistes.

Nous nous plaçons dans le contexte Différences Finies/Volumes Finis sur maillage cartésien. La position des inconnues (\mathbf{u}, p) sur le maillage est de type MAC [42]. Il est possible de séparer les échelles de l'écoulement en ayant recours à des opérateurs d'interpolation dans l'espace physique. La décomposition (0.0.3) est obtenue en définissant les grandes échelles par

$$\mathbf{y} = \mathcal{P}\mathcal{R}\mathbf{u} \quad (0.0.4)$$

et les petites échelles par

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{y}, \quad (0.0.5)$$

où \mathcal{R} (resp. \mathcal{P}) est un opérateur de restriction (resp. prolongement) qui agit sur les champs de vitesse définis sur maillage MAC. Dans [64], le facteur de raffinement entre les niveaux de grille est égal à trois. Grâce à ce choix, certaines inconnues coïncident entre deux niveaux de grille consécutifs. Cette injection est un opérateur de restriction naturel. Ce choix a néanmoins un inconvénient : le nombre de niveaux de grille est très limité. Par exemple, pour quatre niveaux de grilles imbriquées, il y a un facteur 27 entre le niveau le plus fin et le niveau le plus grossier. Un facteur de raffinement inférieur permet une meilleure décomposition des échelles.

Dans [82], les opérateurs d'interpolation sont définis lorsque ce facteur est égal à deux et ils conservent (en un certain sens) la divergence d'un champ de vitesse défini sur maillage MAC. C'est une propriété très intéressante dans le cadre de la simulation des écoulements incompressibles. Malheureusement, ces opérateurs ne séparent pas efficacement les différentes échelles de l'écoulement (voir Section 2.5.3.3).

La première partie de notre travail concerne donc la construction de nouveaux opérateurs d'interpolation sur maillage MAC qui conservent la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement et le développement d'une méthode multi-niveaux, inspirée de [11], utilisant ces opérateurs. L'algorithme multi-niveaux est testé dans un premier temps dans le cas de la turbulence homogène (écoulement périodique), afin d'éviter les difficultés liées au traitement des bords. Nous avons ensuite proposé une extension des opérateurs d'interpolation qui permet de prendre en compte les conditions aux limites de Dirichlet. Une simulation multi-niveaux sur grille grossière est effectuée dans le cas de la simulation numérique d'écoulement dans une cavité entraînée. Nous avons ensuite souhaité tester les performances de l'algorithme multi-niveaux dans le cas d'écoulements autour d'un obstacle. Le choix d'une méthode de type frontière immergée sur grille cartésienne avec placement des inconnues de type MAC s'est donc imposé.

Méthodes de type frontière immergée

L'idée majeure de ces méthodes est de ne pas adapter la grille de calcul à la géométrie du problème, ici l'obstacle. Loin de l'obstacle, le schéma est robuste, il est identique à celui utilisé pour l'écoulement avec conditions aux limites périodiques. La difficulté provient de l'écriture du schéma à proximité de l'obstacle. Ces dernières années, beaucoup d'auteurs se sont intéressés à cette problématique. Voici une liste non exhaustive des techniques utilisées dans la littérature :

- méthodes de « forçage » [24], [69], [51], [75], [34], [39], [54], [56] : la condition aux limites sur l'obstacle est modélisée par l'ajout d'une force dans le second membre de l'équation du moment.
- méthodes de type cellules fantômes (*ghost cell approach*) [6], [60], [28] : les inconnues situées en dehors du fluide sont exprimées en fonction des inconnues situées à l'intérieur du fluide par une procédure d'interpolation.
- méthodes de pénalisation : ces méthodes utilisent une méthode de pénalisation pour prendre en compte la condition aux limites sur l'obstacle [1]. L'obstacle est assimilé à un milieu poreux de perméabilité très faible. Cela revient à résoudre les équations de Navier-Stokes dans le fluide et les équations de Darcy dans le solide.
- méthodes utilisant un terme de masse [45] : l'obstacle est approché en supposant qu'il coupe les mailles de calcul uniquement en diagonale. Un terme de masse q^k est défini pour représenter la divergence de la vitesse intégrée sur une maille K coupée par l'obstacle

$$q^k \approx \frac{1}{|K|} \int_K \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx. \quad (0.0.6)$$

- méthodes de type mailles coupées (*cut cell method*) [7] : le placement des inconnues est adapté aux mailles coupées par l'obstacle. Cette technique est parfois complétée par une méthode qui consiste à traiter différemment les mailles les plus petites. Selon ces travaux, la condition de stabilité numérique, écrite sur les plus petites mailles, induit une forte contrainte sur le pas de temps du schéma. Dans [23] et [81], une telle cellule est fusionnée avec une cellule voisine (*mergin cell*) et dans [46] ces inconnues sont reliées à d'autres inconnues par une relation maître/esclave (*slaving cell*).

Pour la plupart de ces méthodes, l'algorithme de résolution des systèmes linéaires est itérative. Or, l'obstacle coupe généralement les mailles de calcul de façons très variées. Ceci peut affecter le conditionnement des systèmes linéaires et rendre la convergence difficile. De telles méthodes sont donc limitées à l'usage de maillages grossiers, ce qui induit une limitation sur le nombre de Reynolds de l'écoulement simulé. D'ailleurs, nous remarquons que dans la littérature le nombre de Reynolds des écoulements simulés par une méthode de type frontière immergée dépasse rarement 1000.

La deuxième partie de notre travail concerne donc le développement d'un nouveau schéma numérique de type *cut cell* semi-implicite pour la simulation d'écoulements autour d'obstacles dont la résolution est effectuée par une méthode directe. Ce schéma est appliqué à la simulation numérique d'écoulements autour d'un obstacle cylindrique. Plusieurs types de sillages sont observés : écoulements stationnaires, allée tourbillonnaire, sillage turbulent. Des résultats

préliminaires concernant l'application de l'algorithme multi-niveaux sont présentés.

Présentation du travail de thèse

La présente thèse s'articule en trois parties. Dans la première, nous traitons de la modélisation des écoulements incompressibles turbulents. Dans la Section 1.1, nous rappelons les hypothèses physiques qui conduisent aux équations de Navier-Stokes et nous énonçons quelques résultats mathématiques concernant les solutions de ces équations. Les écoulements turbulents sont ensuite décrits par une approche statistique : la théorie phénoménologique de la turbulence. Le comportement du fluide à proximité d'une paroi et le bilan des forces qui s'appliquent sur celle-ci sont présentés. L'écriture d'un schéma numérique d'ordre deux sur maillage MAC est l'objet de la Section 1.2.

La deuxième partie concerne la présentation des opérateurs d'interpolation et de l'algorithme multi-niveaux. La construction des opérateurs est détaillée dans les Sections 2.3 et 2.4, leurs propriétés dans l'espace spectral sont présentées dans la Section 2.5. Ces opérateurs sont utilisés dans le cadre d'une méthode multi-niveaux originale. La vitesse est résolue sur le niveau de grille le plus fin, les autres niveaux de grille servent uniquement à la décomposition du champ de vitesse. Dans la Section 2.6, la décomposition des échelles est utilisée pour définir une correction locale des petites échelles de l'écoulement. L'algorithme multi-niveaux corrige de façon dynamique en temps les petites échelles afin d'améliorer la dynamique des grandes échelles. La Section 2.7 est consacrée à l'application de la méthode multi-niveaux dans le cas des conditions aux limites périodiques. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. Nous présentons ensuite dans la Section 2.8 une extension des opérateurs d'interpolation dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet. La méthode multi-niveaux est ensuite appliquée à la simulation numérique d'écoulements dans une cavité entraînée.

La troisième partie concerne la présentation d'un nouveau schéma numérique pour la simulation d'écoulements autour d'obstacles. Nous utilisons une méthode de projection en temps [76], afin de découpler la vitesse et la pression. La discrétisation de l'étape de prédiction est présentée dans la Section 3.3. Nous employons pour cela une approximation Différences Finies d'ordre un de l'opérateur laplacien continu utilisant 6 inconnues. Cette discrétisation est une extension de l'approximation à 5 points classique. Le terme non-linéaire est discrétisé avec une approche Volumes Finis. Nous avons démontré que cette approximation est également d'ordre un. La discrétisation de l'étape de correction est présentée dans la Section 3.4. La divergence discrète est définie lorsqu'une maille de calcul est coupée par l'obstacle. Cette définition généralise la notion de divergence discrète sur une maille entièrement située dans le fluide. La méthode directe de résolution des systèmes linéaires est détaillée dans la Section 3.5. Le maillage est supposé uniforme dans la direction verticale, il est alors possible d'appliquer une transformée de Fourier rapide. Moyennant une étape de prétraitement relativement coûteuse en début de simulation, le nombre d'opérations par itération est de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2 \ln(n))$, c'est-à-dire du même ordre que pour une simulation d'écoulement dans une cavité entraînée. La Section 3.6 contient les résultats des simulations numériques directes. Les écoulements à nombres de Reynolds 1, 10, 40, 80, 200 et 9500 sont simulés avec précision

et une étude de la convergence en grille est effectuée. Des résultats préliminaires concernant l'application de l'algorithme multi-niveaux à la simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles sont regroupés dans la Section 3.7.

Chapitre 1

Modélisation des écoulements incompressibles turbulents

Sommaire

1.1	Écoulements fluides : modélisation mathématique et aspects physiques	18
1.1.1	Les équations de Navier-Stokes	18
1.1.2	Théorie phénoménologique de la turbulence	29
1.1.3	Couche limite et traînée	32
1.2	Discrétisations des équations de Navier-Stokes	36
1.2.1	Le schéma MAC	36
1.2.2	Méthodes de résolution des systèmes linéaires	41
1.2.3	Méthodes spectrales	50

1.1 Écoulements fluides : modélisation mathématique et aspects physiques

1.1.1 Les équations de Navier-Stokes

La dynamique des fluides est gouvernée par les lois de conservation de la physique classique : conservation de la masse, du moment et de l'énergie. On déduit de ces lois des équations aux dérivées partielles qui forment un modèle mathématique : les équations de Navier-Stokes.

Dans certains cas, comme pour les écoulements incompressibles ou les fluides homogènes, les équations peuvent être simplifiées. Nous commençons par rappeler brièvement la modélisation d'un écoulement, supposé incompressible, pour un fluide newtonien et homogène. On trouve plus de détails dans [78].

1.1.1.1 Un peu de modélisation

On se place dans l'espace tri-dimensionnel \mathbb{R}^3 muni du repère cartésien usuel. Le vecteur

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

désigne les coordonnées d'un point quelconque dans ce repère. On suppose que la région de l'espace occupée par le fluide à chaque instant $t \geq 0$ est un ouvert régulier de \mathbb{R}^3 , noté $\Omega(t)$. On introduit la densité du fluide

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+,$$

la vitesse du fluide

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$$

et la pression dans le fluide

$$p = p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R},$$

on suppose que ces quantités sont définies en chaque point $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ et à chaque instant $t \geq 0$. La position \mathbf{x} d'une particule de fluide est reliée au champ de vitesse du fluide \mathbf{u} par le système d'équations aux dérivées ordinaires suivant :

Définition 1.1.1. TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE

Soit $\mathbf{x}_0 \in \Omega(0)$, on note $t \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ la solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{u}(\mathbf{y}(t), t), & t > 0 \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Remarque 1.1.1. Soit \mathbf{x}_0 la position d'une particule à $t = 0$, le vecteur $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^3$ donne la position de cette particule au temps t . Ainsi, la trajectoire d'une particule issue d'un point \mathbf{x}_0 est donnée par

$$S_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), t \geq 0\}. \quad (1.1.2)$$

La trajectoire $S_{\mathbf{x}_0}$ est une courbe dont la régularité dépend de celle du champ de vitesse \mathbf{u} . La Figure 1.1 illustre la trajectoire d'une particule issue d'un point \mathbf{x}_0 arbitraire. Sur ce dessin, on remarque qu'une particule peut se trouver à deux instants distincts au même point de l'espace.

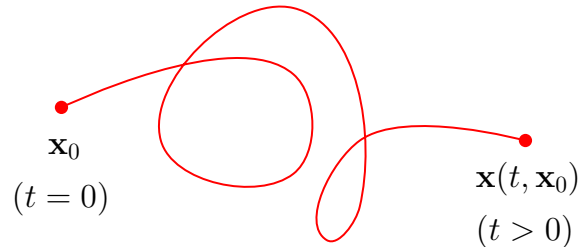


FIGURE 1.1 – La trajectoire d'une particule de fluide.

Pour décrire la dynamique du fluide, on s'intéresse à la déformation au cours du temps d'un volume de fluide qui est constitué en permanence des mêmes particules.

Définition 1.1.2. VOLUME MATÉRIEL

Soit $t \geq 0$. On appelle volume matériel l'ensemble défini par

$$V(t) = \{\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in V_0\}, \quad (1.1.3)$$

où V_0 est un ensemble quelconque de particules qui est inclus dans $\Omega(0)$.

Remarque 1.1.2. L'ensemble $V(t)$ dépend de l'instant t , il est inclus dans $\Omega(t)$. La Figure 1.2 illustre le déplacement et la déformation d'un volume matériel $V(t)$ au cours du temps. Sur cette même figure, on a représenté un point appartenant à $V(t)$, ainsi que sa trajectoire.

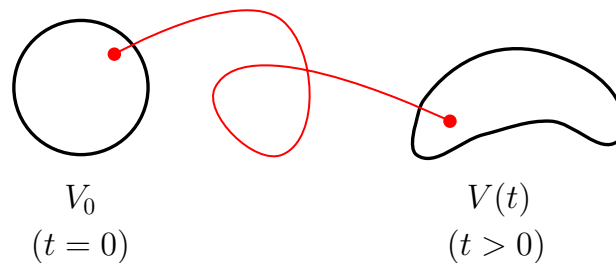


FIGURE 1.2 – Un volume matériel se déforme au cours du temps.

Nous énonçons maintenant un résultat fondamental concernant la variation temporelle d'une intégrale portant sur un volume matériel.

Théorème 1.1.1. THÉORÈME DE TRANSPORT DE REYNOLDS [78]

Soient $V(t)$ un volume matériel et $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ un champ scalaire suffisamment régulier, alors

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi \, d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x}, \quad (1.1.4)$$

où $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est la vitesse du fluide au point \mathbf{x} et au temps t .

Remarque 1.1.3. On suppose que les quantités telles que la vitesse et la densité dépendent continûment de la position \mathbf{x} et du temps t . C'est l'**hypothèse des milieux continus**. Ces considérations sont développées plus finement dans [3].

- **Loi de conservation de la masse.**

Soit $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ la densité du fluide au point \mathbf{x} et au temps t . La loi de conservation de la masse exprime que la masse d'un volume matériel $V(t)$ arbitraire doit être constante au cours du temps,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \, d\mathbf{x} = 0. \quad (1.1.5)$$

En utilisant le théorème de transport (1.1.4), il vient

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.1.6)$$

Ceci étant vrai quel que soit le volume matériel $V(t)$, on en déduit l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.1.7)$$

On peut écrire l'équation (1.1.7) sous la forme équivalente suivante

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.1.8)$$

où

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (1.1.9)$$

est la **dérivée totale** ou encore **dérivée particulière** de la densité. Elle exprime la dérivée suivant la trajectoire d'une particule.

Définition 1.1.3. On dit qu'un écoulement est **incompressible** si la densité de chaque particule de fluide est constante le long de sa trajectoire. Cette propriété se traduit mathématiquement par la relation

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (1.1.10)$$

Dans ce cas, l'équation de continuité (1.1.8) est simplifiée, elle devient

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.1.11)$$

Remarque 1.1.4. La propriété (1.1.11) exprime l'incompressibilité de l'écoulement qui n'est, en toute rigueur, pas équivalente à l'incompressibilité du fluide. En réalité, tous les fluides sont compressibles, certains plus que d'autres. Lorsqu'on suppose qu'un écoulement est incompressible, on considère que la compressibilité du fluide est négligeable dans le contexte de l'écoulement étudié.

Définition 1.1.4. On dit qu'un fluide est **homogène** si la densité du fluide est identique en chaque point de l'espace

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t). \quad (1.1.12)$$

Remarque 1.1.5. L'incompressibilité de l'écoulement n'implique pas que toutes les particules ont la même densité. Par exemple, un mélange d'huile et d'eau peut être supposé incompressible, bien que la densité ne soit pas constante dans l'espace. La relation (1.1.10) implique seulement que la densité de chaque particule ne change pas durant son mouvement. Il s'en suit que si le fluide est homogène à un instant initial, il restera homogène au cours du temps. Ainsi, pour l'écoulement **incompressible** d'un fluide **homogène**, on admet que la densité est constante

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0, \quad \forall \mathbf{x}, \forall t. \quad (1.1.13)$$

- Loi de conservation du moment.

La loi de conservation du moment est l'application aux fluides du principe fondamental de la dynamique. Elle exprime que la variation du moment sur un volume matériel est égal à la somme des forces qui s'appliquent sur ce volume

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f}^b \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} \mathbf{f}^s \, dS, \quad (1.1.14)$$

où \mathbf{f}^b représente la résultante des forces par unité de masse et \mathbf{f}^s représente la résultante des forces par unité de surface.

Soit $i \in \{1, 2, 3\}$, on désigne par u_i la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse \mathbf{u} . En substituant ϕ par ρu_i dans le théorème de transport, on peut écrire la conservation du moment sous la forme équivalente suivante

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho f_i^b \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} f_i^s \, dS. \quad (1.1.15)$$

Remarque 1.1.6. Un exemple de force massique est la force gravitationnelle,

$$\mathbf{f} = (0, 0, -g)^t, \quad (1.1.16)$$

où g est la constante gravitationnelle, exprimé en $m \cdot s^{-2}$.

Il est montré dans [2] qu'il existe un tenseur à neuf composantes, noté

$$\tau = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}, \quad (1.1.17)$$

appelé **tenseur des contraintes**, tel que la $i^{\text{ème}}$ composante de la force de surface prend la forme

$$f_i^s = \sum_{1 \leq j \leq 3} \tau_{ij} n_j, \quad (1.1.18)$$

où $\mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est la normale sortante unitaire à la surface considérée. Lorsque les caractéristiques de l'écoulement (rhéologie du fluide, conditions de température, de vitesse et de pression) le permettent, on peut compléter le système d'équations (1.1.15) par une relation qui relie le tenseur des contraintes à la vitesse et à la pression dans le fluide.

Définition 1.1.5. *On dit qu'un fluide est **newtonien** lorsque le tenseur des contraintes s'écrit*

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \right), \quad (1.1.19)$$

où

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1.20)$$

sont les composantes du tenseur des déformations,

$$p = p(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.21)$$

est la pression qui agit sur le fluide au point \mathbf{x} et au temps t ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.1.22)$$

est le symbole de Kronecker et μ désigne la viscosité dynamique du fluide.

Remarque 1.1.7. *La plupart des fluides usuels, dans des conditions standards, satisfont ce modèle de fluide. On trouve plus de détails dans l'ouvrage de Batchelor [3].*

Supposons que le fluide est newtonien. L'équation du moment (1.1.15) devient

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = \rho f_i^b - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial x_i} + \mu \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.1.23)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = \rho f_i^b - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial x_i}, \quad (1.1.24)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien usuel.

Si on suppose de plus que le fluide est homogène et que l'écoulement est incompressible, le raisonnement développé dans la Remarque 1.1.5 implique que la densité ρ est constante. En utilisant l'équation de continuité (1.1.11), l'équation du moment (1.1.24) devient

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i \mathbf{u}) \right) - \mu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_i^b, \quad (1.1.25)$$

pour i appartenant à $\{1, 2, 3\}$.

Pour résumer ce qui vient de précéder, le système d'équations de Navier-Stokes (1.1.10)-(1.1.15) pour la modélisation de l'écoulement, supposé incompressible, d'un fluide newtonien et homogène se simplifie et devient (1.1.11)-(1.1.25).

Remarque 1.1.8. *La déformation du fluide est ici décrite avec une approche **eulérienne**. Cette description consiste à observer les modifications des propriétés du fluide en des points fixes du milieu. Les caractéristiques locales du fluide sont alors fonction du point de l'espace \mathbf{x} et du temps t . C'est la description que l'on utilise le plus souvent en mécanique des fluides. À l'opposé la description **lagrangienne** consiste à observer les modifications des propriétés d'une particule fluide que l'on suit dans son mouvement. Cette description donne une bonne idée de ce qui se passe dans le fluide. En revanche, il est difficile de connaître l'état du fluide en un point donné de l'espace et du temps puisque le référentiel se déplace constamment.*

1.1.1.2 Les problèmes étudiés

Nous considérons l'écoulement, supposé incompressible, d'un fluide homogène, newtonien, de masse volumique (i.e. densité) $\rho > 0$ constante et de viscosité dynamique $\mu > 0$. Nous faisons l'hypothèse simplificatrice que l'écoulement s'effectue principalement dans le plan (Oxy).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la région du plan occupée par le fluide. Le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ et la pression $p(\mathbf{x}, t)$ au point $\mathbf{x} \in \Omega$ et au temps $t > 0$ vérifient les équations de Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1.1.26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.1.27)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (1.1.28)$$

où $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ est une force extérieure et \mathbf{u}_0 est la condition initiale pour la vitesse. La notation \otimes désigne le produit

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = (u_i u_j)_{1 \leq i, j \leq 2}. \quad (1.1.29)$$

Proposition 1.1.1. *Sous l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement, le terme convectif peut s'écrire sous la forme suivante*

$$\operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.1.30)$$

Démonstration. On considère la première composante du terme convectif

$$(\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_1 = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \quad (1.1.31)$$

$$= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.1.32)$$

$$= (\mathbf{u} \cdot \nabla) u + u (\operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (1.1.33)$$

$$= (\mathbf{u} \cdot \nabla) u, \quad (1.1.34)$$

car l'écoulement est supposé incompressible. \square

Remarque 1.1.9. Dans le système international des unités de mesures,

- la vitesse est exprimée en $m.s^{-1}$,
- la pression en Pascal, sachant que $1 Pa = 1 N.m^{-2}$,
- la force extérieure en Newton, sachant que $1 N = 1 kg.m.s^{-2}$,
- la masse volumique en $kg.m^{-3}$,
- et la viscosité dynamique en $Pa.s$.

A titre d'exemples, on trouve dans le Tableau 1.1 la masse volumique et la viscosité dynamique de quelques fluides usuels.

fluides	glycérine	air à 20°C	eau à 20°C
masse volumique	1 260	1.293	1 000
viscosité dynamique	1.5	1.8×10^{-5}	10^{-3}

TABLE 1.1 – Masse volumique et viscosité dynamique de quelques fluides usuels.

On introduit une vitesse U_* et une longueur L_* caractéristiques de l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle cylindrique immobile, la vitesse caractéristique correspond à la vitesse du fluide loin de l'obstacle et la longueur caractéristique au diamètre de l'obstacle. On opère les changements de variables suivants

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/L_*, \quad t' = t/T_*, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}/U_*, \quad p' = p/U_*^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{f}' = (T_*^2/L_*)\mathbf{f}, \quad (1.1.35)$$

où le temps caractéristique T_* est défini par

$$T_* = L_*/U_*. \quad (1.1.36)$$

On montre que le nouveau couple vitesse/pression (\mathbf{u}', p') vérifie les équations de Navier-Stokes adimensionnées

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}' + \nabla p' / \rho = \mathbf{f}' / \rho, \quad (1.1.37)$$

où le nombre de Reynolds Re et la viscosité cinématique ν désignent les quantités

$$Re = \frac{U_* L_*}{\nu}, \quad \nu = \mu / \rho. \quad (1.1.38)$$

Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous utiliserons \mathbf{u} , p et \mathbf{f} pour désigner les quantités \mathbf{u}' , p'/ρ et \mathbf{f}'/ρ .

Remarque 1.1.10. *Nous allons étudier le système d'équations adimensionnées, car il est plus simple à étudier. En effet, le nombre de Reynolds est l'unique paramètre physique qui intervient dans ces équations. On remarque ainsi que deux écoulements sont similaires (à un changement d'échelles près) lorsqu'ils sont caractérisés par le même nombre de Reynolds. On s'intéressera donc à la résolution des équations de Navier-Stokes adimensionnées suivantes*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1.1.39)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.1.40)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (1.1.41)$$

Remarque 1.1.11. *Dans le système international des unités de mesures, la viscosité cinématique ν est exprimée en $m^2 s^{-1}$. On montre facilement que le nombre de Reynolds Re est un nombre sans dimension.*

On trouve dans le Tableau 1.2 la viscosité cinématique et le nombre de Reynolds associés à l'écoulement de quelques fluides usuels, autour d'un obstacle immobile de forme cylindrique de diamètre égal à 1 cm, lorsque la vitesse du fluide loin de l'obstacle est uniforme et égale à $5 m \cdot s^{-1}$. Les caractéristiques de ces fluides (masse volumique et viscosité dynamique) ont été données précédemment dans le Tableau 1.1.

fluides	glycérine	air à 20°	eau à 20°
viscosité cinématique	1.2×10^{-3}	1.4×10^{-5}	10^{-6}
nombre de Reynolds	42	3 594	50 000

TABLE 1.2 – Viscosité cinématique et nombre de Reynolds associés aux écoulements de quelques fluides usuels. Les grandeurs caractéristiques sont ici $L_* = 10^{-2} m$ et $U_* = 5 m \cdot s^{-1}$.

Les équations de Navier-Stokes sont complétées par des conditions aux limites qui dépendent du problème physique que l'on souhaite modéliser. On a représenté sur la Figure 1.3 quelques exemples de simulations. Dans ce travail, nous considérons les problèmes suivants :

- des écoulements avec conditions aux limites périodiques modélisant la turbulence homogène,
- des écoulements dans une cavité avec des conditions aux limites de type Dirichlet,
- et des écoulements autour d'un obstacle avec des conditions aux limites mixtes (condition aux limites de Dirichlet, de Neumann).

• Écoulements périodiques.

Les conditions aux limites périodiques sont généralement utilisées pour modéliser des écoulements dans un petit volume suffisamment éloigné des parois, de telle sorte que les effets de couches limites peuvent être négligés. On suppose que

$$\mathbf{u}, p, \mathbf{f} \text{ et } \mathbf{u}_0 \text{ sont périodiques de période } 2\pi \text{ dans chaque direction.} \quad (1.1.42)$$

Dans ce contexte, on est amené à considérer le domaine $\Omega = (0, 2\pi)^2$.

• **Écoulements dans une cavité.**

Le fluide remplit une cavité assimilée au domaine $\Omega = (0, 1)^2$. Soit $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, la vitesse vérifie

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } y = 1 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1.43)$$

Le fluide est ainsi confiné dans la cavité et il n'y a pas de force extérieure ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$). La vitesse uniforme appliquée sur le bord supérieur du domaine entraîne le fluide contenu dans la cavité. On observe sur chaque paroi, le développement d'une couche limite dont l'épaisseur varie avec la viscosité ν .

• **Écoulements autour d'un obstacle**

Enfin, nous considérons des écoulements autour d'obstacles dans un domaine rectangulaire

$$\Omega = (-X_u, X_d) \times (-A, A).$$

Un objet de forme quelconque est placé à l'origine du repère. En entrée, on impose un profil de vitesse uniforme

$$\mathbf{u} = (u_\infty, 0) \text{ si } x = -X_u. \quad (1.1.44)$$

Les bords horizontaux sont supposés imperméables et la vitesse varie peu dans la direction verticale

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ et } v = 0 \text{ si } |y| = A. \quad (1.1.45)$$

En sortie, on applique une condition aux limites dite « convective », utilisée dans [69]. La vitesse sur le plan de sortie est obtenue en résolvant une équation de transport de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \text{ si } x = X_d, \quad (1.1.46)$$

où u_c est une vitesse de convection constante. Ces conditions aux limites permettent aux tourbillons qui se dirigent vers le plan de sortie de s'échapper du domaine de calcul sans créer de perturbation à l'intérieur du domaine. En pratique, l'équation (1.1.46) est discrétisée par une méthode explicite et la vitesse de convection est égale à la vitesse moyenne du fluide sur le plan de sortie. L'incompressibilité du fluide entraîne que u_c est aussi égale à la vitesse moyenne sur le plan d'entrée et donc

$$u_c = u_\infty.$$

Enfin, on impose une condition de non-glissement sur l'obstacle. La vitesse d'une particule de fluide en contact avec le solide est égale à la vitesse de l'obstacle

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Gamma_S} \text{ sur } \Gamma_S. \quad (1.1.47)$$

Nous souhaitons observer les propriétés du fluide au voisinage de l'obstacle (décollement de

la couche limite, coefficient de traînée, de portance). Lorsque les bords du domaine de calcul sont suffisamment éloignés de l'obstacle, les conditions aux limites (1.1.44)-(1.1.45)-(1.1.46) influent peu sur la dynamique de l'écoulement à proximité de l'obstacle.

Il n'y a pas de force extérieure ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$). La présence de l'obstacle engendre la création d'un sillage en aval. En changeant les caractéristiques du fluide, on observe différents types de sillage : laminaire, allée tourbillonnaire, turbulent.

1.1.1.3 Quelques résultats mathématiques

Nous rappelons dans cette section quelques résultats classiques de la théorie mathématique des équations de Navier-Stokes. De nombreux ouvrages sont consacrés à cette thématique. Les preuves des théorèmes d'existence et d'unicité sont présentées dans [71].

On introduit les espaces fonctionnels H et V qui sont respectivement des sous-espaces de $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ dont les éléments vérifient les conditions aux limites (1.1.42) ou (1.1.43) ainsi que la contrainte d'incompressibilité (1.1.27). De plus, dans le cas périodique, la condition $\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ est imposée aux éléments ψ de H et V .

Les espaces H et V sont munis des produits scalaires canoniques respectifs $(-, -)_H$ et $(-, -)_V$ définis par

$$(\psi, \phi)_H = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \tag{1.1.48}$$

et

$$(\psi, \phi)_V = \int_{\Omega} \nabla\psi(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \tag{1.1.49}$$

On désigne par $|\cdot|_H$ et $|\cdot|_V$ les normes associées. L'espace dual de V est noté V' .

On cherche \mathbf{u} solution de (1.1.39), (1.1.40) et (1.1.41) au sens des distributions. La formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes consiste à chercher $\mathbf{u}(\cdot, t) \in V$ solution sur $(0, T)$ de

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + \frac{1}{Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_H \tag{1.1.50}$$

pour toute fonction test $\mathbf{v} \in V$. La forme tri-linéaire b est définie par

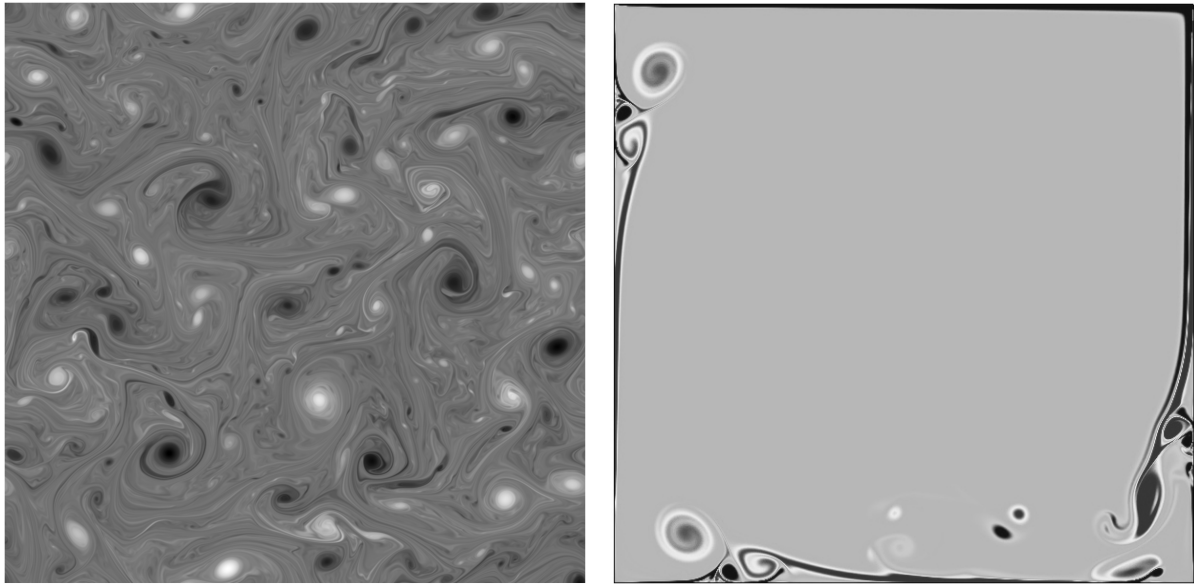
$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w})_H$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. On rappelle ci-après les résultats classiques d'existence et d'unicité de solutions pour (1.1.50) valables lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Théorème 1.1.2. *(Solutions faibles) Soient $\mathbf{u}_0 \in H$ et $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$. Il existe une unique solution \mathbf{u} solution au sens des distributions sur $(0, T)$ de (1.1.50) avec $\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0$ telle que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Cette solution est unique et satisfait $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ et $\partial\mathbf{u}/\partial t \in L^2(0, T; V')$. De plus, l'application définie pour $t > 0$ par*

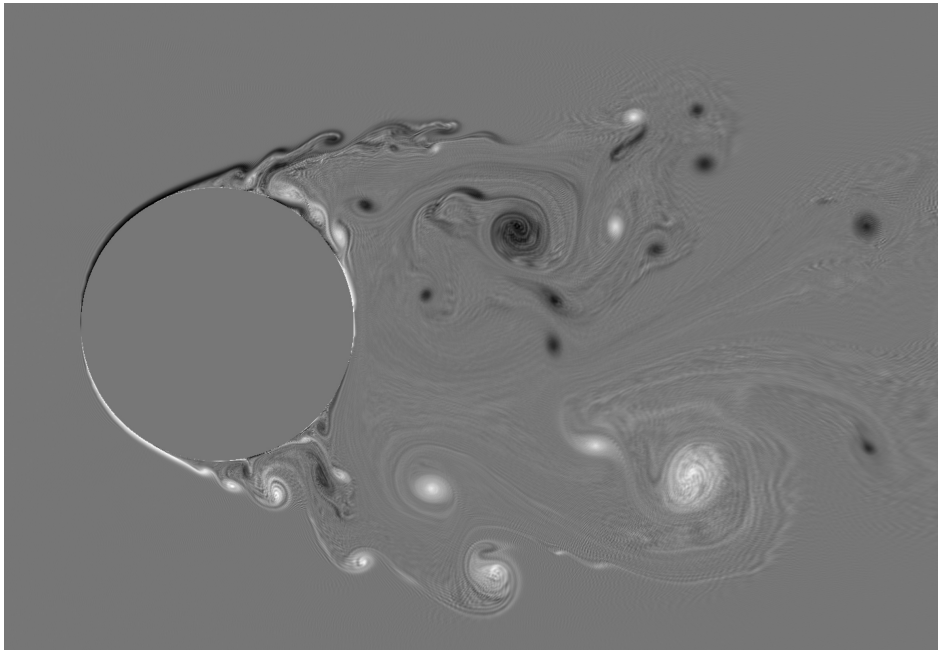
$$S(t) : \mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}(t) \tag{1.1.51}$$

est continue de H dans lui-même.



(a)

(b)



(c)

FIGURE 1.3 – Exemples d’écoulements : périodique (a), dans une cavité (b) et autour d’un obstacle (c).

Théorème 1.1.3. (*Solutions fortes*) Soient $\mathbf{u}_0 \in V$ et $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H)$. Il existe une unique solution \mathbf{u} de (1.1.50) avec $\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0$ telle que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V \cap H^2(\Omega)^2) \cap L^\infty(0, T; V)$. De plus, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; V)$ et $\partial \mathbf{u} / \partial t \in L^2(0, T; H)$.

1.1.2 Théorie phénoménologique de la turbulence

1.1.2.1 Notations

On se place dans le contexte périodique. Soit \mathbf{u} un champ de vitesse périodique, de période 2π dans chaque direction de l'espace et de classe \mathcal{C}^1 , alors \mathbf{u} s'écrit sous la forme d'une série de Fourier

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.1.52)$$

avec

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (1.1.53)$$

où \mathbf{k} désigne un point à coordonnées entières et $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$ est le coefficient de Fourier de \mathbf{u} associé au mode \mathbf{k} . Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in S_k} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2, \quad (1.1.54)$$

où $|\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|$ désigne le module du coefficient de Fourier $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ et S_k est l'ensemble défini par

$$S_k = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \in [k - 0,5, k + 0,5) \right\} \quad (1.1.55)$$

On constate sur la Figure 1.4 que le nombre de points dans la couronne S_k est de l'ordre de k . La quantité $E(k)$ représente l'énergie cinétique associée aux nombres d'onde contenus dans la couronne S_k . L'ensemble

$$\{E(k), k \in \mathbb{N}\}$$

est appelé **spectre d'énergie** associé au champ de vitesse \mathbf{u} . La représentation graphique du spectre d'énergie rend compte des interactions entre les différentes échelles de l'écoulement. De même, on définit le **spectre d'enstrophie** par

$$\{\epsilon(k), k \in \mathbb{N}\},$$

avec

$$\epsilon(k) = \sum_{\mathbf{k} \in S_k} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2. \quad (1.1.56)$$

On montre facilement que $\epsilon(k) \approx 2k^2 E(k)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. On définit ensuite l'énergie cinétique E par

$$E = \sum_{k=0}^{+\infty} E(k) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2, \quad (1.1.57)$$

et l'enstrophie par

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon(k) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2. \quad (1.1.58)$$

L'identité de Parseval implique

$$E = \frac{1}{2|\Omega|} |\mathbf{u}|_H. \quad (1.1.59)$$

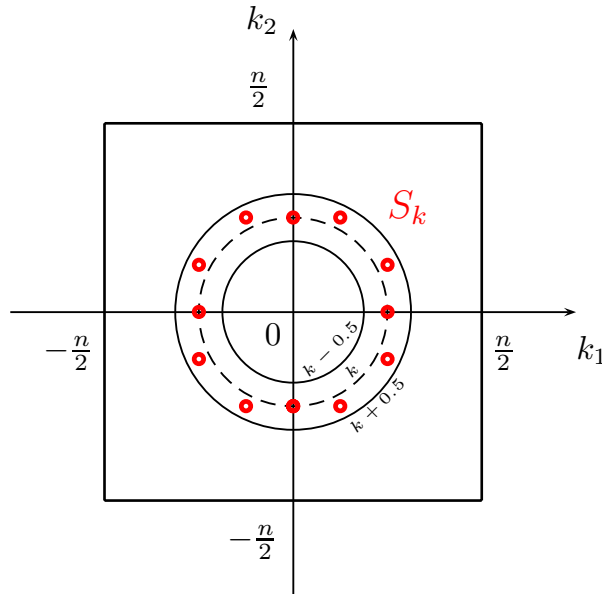


FIGURE 1.4 – Modes compris dans la couronne S_k .

Proposition 1.1.2. *On note*

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

la vorticité d'un champ de vitesse \mathbf{u} . On montre l'égalité suivante :

$$|\Omega| \epsilon = |\omega|_H^2 = |\mathbf{u}|_V^2. \quad (1.1.60)$$

Démonstration. La contrainte d'incompressibilité implique

$$|k_2| |\hat{\omega}(\mathbf{k})| = |\mathbf{k}|^2 |\hat{u}(\mathbf{k})| \quad (1.1.61)$$

et

$$|k_1| |\hat{\omega}(\mathbf{k})| = |\mathbf{k}|^2 |\hat{v}(\mathbf{k})|. \quad (1.1.62)$$

D'où

$$|\hat{\omega}(\mathbf{k})| = |\mathbf{k}| |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|. \quad (1.1.63)$$

De plus, la relation

$$|\hat{\omega}(\mathbf{k})| = |\nabla \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})| \quad (1.1.64)$$

est triviale. Pour conclure, il suffit d'appliquer l'identité de Parseval. \square

1.1.2.2 Comportement asymptotique des solutions.

Supposons que la force extérieure \mathbf{f} est indépendante du temps t et appartient à H . On rappelle ici un résultat fondamental concernant la majoration de l'énergie cinétique de la solution de la formulation variationnelle (1.1.50). On trouve plus de détails dans [70].

En prenant le produit scalaire dans H de l'équation du moment par \mathbf{u} , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|_H^2 - \frac{1}{Re} (\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u})_H + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_H.$$

Ensuite, on utilise le fait que $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0^1$. En moyennant sur Ω , il s'ensuit l'équation d'énergie suivante

$$\frac{dE}{dt} + \frac{\epsilon}{Re |\Omega|} = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{u})_H}{|\Omega|}. \quad (1.1.65)$$

Le taux de dissipation de l'énergie est donc proportionnel à l'enstrophie ϵ et le taux d'injection d'énergie correspond au terme $(\mathbf{f}, \mathbf{u})_H$. En utilisant un lemme de Gronwall, on montre l'inégalité suivante

$$E(t) \leq E(t=0)e^{-C_1 t} + C_2 |\mathbf{f}|_H^2 (1 - e^{-C_1 t}), \quad (1.1.66)$$

pour tout t positif. Les constantes C_1 et C_2 sont strictement positives et ne dépendent pas de t . En passant à la limite lorsque t tend vers l'infini, il vient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E(t) \leq C_2 |\mathbf{f}|_H^2. \quad (1.1.67)$$

Ce résultat implique que l'attracteur global pour le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un ensemble compact de H , qui est invariant par $S(t)$ et qui attire tous les ensembles bornés de H .

1.1.2.3 Loi de décroissance du spectre.

En 1941, Kolmogorov proposa dans les articles [47] et [48] de décrire le spectre d'énergie lorsque la dimension de l'espace est égale à trois. Dans ces articles, l'auteur prédit l'existence d'un ensemble d'échelles qui atteignent rapidement en temps un état d'équilibre statistique. Ces échelles correspondent à des nombres d'onde \mathbf{k} tels que $k_L \leq |\mathbf{k}| \leq k_d$, l'ensemble $[k_L, k_d]$ est appelé **zone inertielle**. Le mode k_L est caractéristique des échelles comportant l'essentiel de l'énergie cinétique. A l'opposé, le mode k_d caractérise les échelles dissipatives, c'est-à-dire les échelles qui sont dissipées sous l'effet des forces visqueuses. La formule obtenue par Kolmogorov à l'aide d'une analyse dimensionnelle, valable pour k dans la zone inertielle, est la suivante

$$E(k) = C_K (\nu \epsilon(\mathbf{u}))^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}},$$

1. La preuve de ce résultat est donnée dans la Section 3.3.2.2.

où C_K est appelée constante de Kolmogorov.

En 1967, Kraichnan présenta dans [50] une théorie qui étend les travaux de Kolmogorov au cas bi-dimensionnel. Dans la zone inertielle (voir Figure 1.5), Kraichnan déduit par une analyse dimensionnelle que le spectre d'énergie admet une décroissance en k^{-3} . On trouve dans [32] les principaux développements qui ont suivi cette théorie.

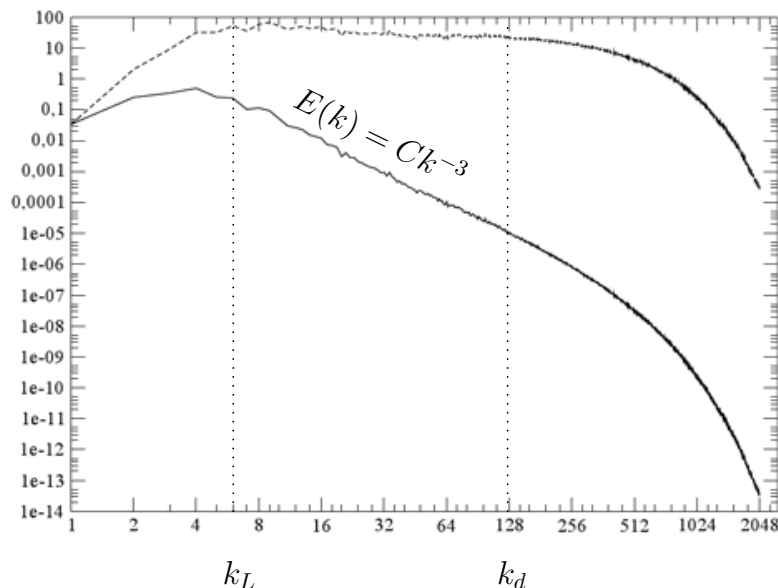


FIGURE 1.5 – Décroissance du spectre d'énergie en dimension deux. En trait plein, le spectre d'énergie $E(k)$, en tirets la fonction $k^3 E(k)$. Dans la zone inertielle $[k_L, k_d]$, la pente du spectre d'énergie est en k^{-3} .

1.1.3 Couche limite et traînée

1.1.3.1 Couche limite

Lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une paroi supposée fixe, la vitesse du fluide est nulle sur la paroi (condition de non-glissement) et, loin de l'obstacle, elle est égale à la vitesse de l'écoulement non perturbé. Le profil de la vitesse le long de la normale à la paroi dépend évidemment des caractéristiques de l'écoulement, en particulier du nombre de Reynolds. Lorsque le nombre de Reynolds est faible, la viscosité a un effet prépondérant et la vitesse varie progressivement pour atteindre la vitesse au bord. Au contraire, si le nombre de Reynolds est élevé, la vitesse à l'infini se maintient jusqu'à une courte distance de l'obstacle. La zone proche de la paroi où la vitesse varie depuis la vitesse de l'écoulement non perturbé jusqu'à atteindre la vitesse de la paroi est appelée **couche limite**. On rappelle un résultat concernant l'épaisseur de la couche limite que l'on trouve dans [3].

Proposition 1.1.3. *On estime que l'épaisseur moyenne de la couche limite δ_0 est de l'ordre de $Re^{-\frac{1}{2}}$, lorsque $Re \rightarrow +\infty$.*

1.1.3.2 Bilan de forces agissant sur une paroi

Dans un fluide au repos, une résistance s'oppose au mouvement d'un corps. De façon équivalente, une force s'applique sur un obstacle immobile placé dans un écoulement uniforme. Comme on l'a illustré sur la Figure 1.6, cette force \mathbf{F} se décompose naturellement en (F_d, F_l) dans la base orthonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, où \mathbf{e}_1 désigne la direction principale de l'écoulement.

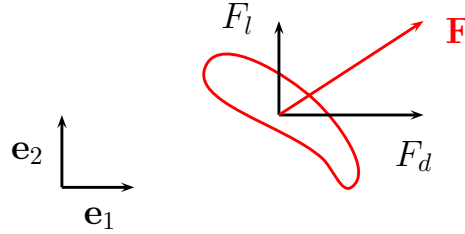


FIGURE 1.6 – Forces appliquées sur un obstacle placé dans un fluide.

La composante $F_d \mathbf{e}_1$ est appelée **force de traînée** (*drag force*) et la composante $F_l \mathbf{e}_2$ est appelée **force de portance** (*lift force*). En aéronautique, on cherche souvent à minimiser la force de traînée et à maximiser la force de portance, afin de consommer moins d'énergie.

Par exemple, dans le domaine automobile, on veut que les pneumatiques d'une voiture restent plaqués au sol pour conserver une bonne adhérence : ici, on parle de **force d'appui** (*down force*). On peut augmenter cette force en installant sur le véhicule des ailerons ou des spoilers. Dans le domaine de l'aviation, on veut que cette force soit maximale afin d'augmenter les performances de l'appareil en vol. Les ingénieurs s'intéressent ici à la conception des profils d'aile et au choix de leur inclinaison. On cherche aussi à minimiser les variations de la force de portance, car elles engendrent un comportement du véhicule désagréable pour les utilisateurs, voire une perte du contrôle du pilote.

La force \mathbf{F} dépend toujours de la masse volumique ρ , de la vitesse du fluide loin de l'obstacle u_∞ et d'une aire A qui correspond à la surface vue par l'écoulement, ici le diamètre de l'obstacle. Une analyse dimensionnelle conduit à la formule suivante

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_d \\ F_l \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho A u_\infty \begin{pmatrix} C_d \\ C_l \end{pmatrix}, \quad (1.1.68)$$

où C_d et C_l sont des nombres sans dimension, appelés respectivement **coefficient de traînée** et **coefficient de portance**.

Comme dans [51], on considère Ω_0 , un sous ensemble du domaine Ω qui contient le solide Ω_S . On intègre la première composante de l'équation de conservation du moment sur Ω_0 , il vient

$$\int_{\Omega_0} f_1 \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} u \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_0} u \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} p n_1 \, d\sigma - \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma. \quad (1.1.69)$$

On fait tendre formellement Ω_0 vers l'ensemble qui représente l'obstacle, c'est-à-dire Ω_S .

Comme la vitesse est nulle sur l'obstacle, l'intégrale qui porte sur le terme non linéaire disparaît. En supposant que l'écoulement est stationnaire, l'équation (1.1.69) devient

$$-\int_{\Omega_0} f_1 \, d\mathbf{x} = -\int_{\partial\Omega_0} pn_1 \, d\sigma + \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma. \quad (1.1.70)$$

Finalement, la résultante des forces qui s'appliquent sur l'obstacle est

$$F_d = F_d^p + F_d^\tau, \quad (1.1.71)$$

où, le terme

$$F_d^p = -\int_{\partial\Omega_s} pn_1 \, d\sigma \quad (1.1.72)$$

est appelé **traînée de pression**. Il représente la somme des forces exercées par la pression sur l'obstacle. La force de pression est localement dirigée dans la direction normal à la surface. Cette traînée est liée à la présence d'une surpression en amont de l'obstacle et d'une dépression en aval. Le terme

$$F_d^\tau = \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma. \quad (1.1.73)$$

est appelé **traînée de frottement**. Il représente la somme des forces exercées par le frottement du fluide sur l'obstacle. La force de frottement est localement dirigée dans la direction parallèle à la surface.

Remarque 1.1.12. *On déduit formellement de l'incompressibilité du fluide l'approximation suivante :*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \approx \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp)}{\partial n} \mathbf{n}^\perp, \quad (1.1.74)$$

où \mathbf{n}^\perp est la direction parallèle à la surface, obtenue par rotation d'angle $\pi/2$ de \mathbf{n} . En effet, l'incompressibilité de l'écoulement implique

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial n} + \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp)}{\partial n^\perp} = 0. \quad (1.1.75)$$

Or, la vitesse du fluide est nulle sur l'obstacle, on en déduit formellement

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp)}{\partial n^\perp} = 0 \quad (1.1.76)$$

et donc :

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial n} = 0. \quad (1.1.77)$$

On écrit la décomposition de la vitesse \mathbf{u} dans la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp\}$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp)\mathbf{n}^\perp, \quad (1.1.78)$$

On applique la dérivée normale à l'équation (1.1.78), avec la relation (1.1.77), il vient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp)}{\partial n} \mathbf{n}^\perp. \quad (1.1.79)$$

Définition 1.1.6. On appelle **contrainte de cisaillement** la quantité suivante

$$\tau = \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\perp)}{\partial n}. \quad (1.1.80)$$

La contrainte de cisaillement est définie comme la variation de la composante tangentielle de la vitesse près de l'obstacle. La couche limite est illustrée sur la Figure 1.7.

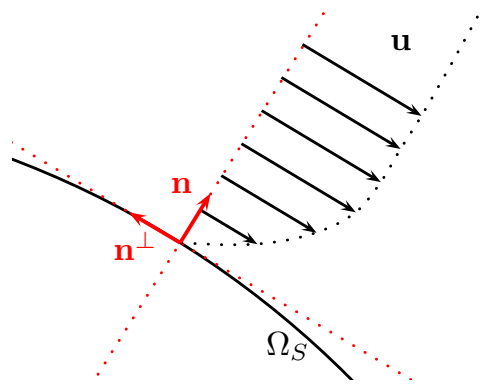


FIGURE 1.7 – Couche limite et contrainte de cisaillement.

Remarque 1.1.13. D'après (1.1.74), on a :

$$\tau \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \mathbf{n}^\perp. \quad (1.1.81)$$

Avec la Définition 1.1.6, on a

$$F_d^\tau \approx \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega_S} \tau n_1^\perp d\sigma \text{ et } F_d^p = - \int_{\partial\Omega_0} p n_1 d\sigma. \quad (1.1.82)$$

On introduit de même les quantités

$$F_l^\tau \approx \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega_S} \tau n_2^\perp d\sigma \text{ et } F_l^p = - \int_{\partial\Omega_0} p n_2 d\sigma. \quad (1.1.83)$$

On a alors :

$$F_d = F_d^p + F_d^\tau \text{ et } F_l = F_l^p + F_l^\tau. \quad (1.1.84)$$

1.2 Discrétisations des équations de Navier-Stokes

1.2.1 Le schéma MAC

1.2.1.1 Méthode de projection

Soit δt le pas de temps. Pour tout entier k , on définit $t_k = k \delta t$ et on considère \mathbf{u}^k et p^k les approximations respectives des inconnues \mathbf{u} et p à l'instant t_k . Nous utilisons un schéma aux différences rétrogrades (BDF) pour approcher la dérivée en temps en t_{k+1} , ainsi qu'une méthode de projection [76] [41] pour obtenir le schéma suivant :

Etape 1 : La vitesse dite « intermédiaire » $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$ est solution de l'équation

$$\frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - 4\mathbf{u}^k + \mathbf{u}^{k-1}}{2\delta t} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = -2\nabla \cdot (\mathbf{u}^k \otimes \mathbf{u}^k) + \nabla \cdot (\mathbf{u}^{k-1} \otimes \mathbf{u}^{k-1}) - \nabla p^k + \mathbf{f}^{k+1} \quad (1.2.1)$$

dans Ω , complétée par les conditions aux limites

$$\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} |_{\partial\Omega} = \mathbf{g}. \quad (1.2.2)$$

Etape 2 : La vitesse \mathbf{u}^{k+1} est solution de l'équation suivante

$$\mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \frac{2\delta t}{3} \nabla (p^{k+1} - p^k) \quad (1.2.3)$$

dans Ω , vérifie la contrainte d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1} = 0 \quad (1.2.4)$$

et satisfait les conditions aux limites

$$(\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}) \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2.5)$$

On définit l'incrément de la pression au temps t_{k+1} par

$$\delta p^{k+1} = p^{k+1} - p^k. \quad (1.2.6)$$

En appliquant l'opérateur div à l'équation (1.2.3), et en utilisant la contrainte d'incompressibilité (1.2.4), on obtient une équation portant uniquement sur l'incrément de pression

$$\Delta (\delta p^{k+1}) = \frac{3}{2\delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} \quad (1.2.7)$$

dans Ω , qui est complétée par la condition de Neumann

$$\frac{\partial (\delta p^{k+1})}{\partial n} = 0, \quad (1.2.8)$$

qui provient de (1.2.5). Connaissant l'incrément de pression δp^{k+1} , on déduit la vitesse \mathbf{u}^{k+1} grâce à la relation (1.2.3).

1.2.1.2 Discrétisation spatiale.

Nous considérons un domaine d'étude rectangulaire

$$\Omega = (0, L) \times (0, H), \quad (1.2.9)$$

discrétisé à l'aide d'un maillage uniforme. Soient n_ℓ et n_h deux entiers qui représentent respectivement le nombre de points du maillage dans la direction horizontale et verticale. On définit les pas d'espace dans chaque direction

$$\ell = \frac{L}{n_\ell}, \quad h = \frac{H}{n_h} \quad (1.2.10)$$

et les subdivisions régulières

$$\begin{aligned} x_i &= i \ell, \quad 0 \leq i \leq n_\ell, \\ y_j &= j h, \quad 0 \leq j \leq n_h. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq n_\ell$ et $1 \leq j \leq n_h$, on définit la maille principale

$$K_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (1.2.12)$$

et les mailles décalées

$$K_{i,j}^u = K_{i+\frac{1}{2},j} \quad (1.2.13)$$

et

$$K_{i,j}^v = K_{i,j+\frac{1}{2}}. \quad (1.2.14)$$

On trouve deux principaux types de discrétisations :

- Les méthodes à variables décalées de type M.A.C. (abrégé de « Marker and Cell ») consistent à approcher la pression p au centre de $K_{i,j}$, la première composante de la vitesse u au centre de $K_{i,j}^u$ et la deuxième composante de la vitesse v au centre de $K_{i,j}^v$ (voir Figure 1.8). Cette méthode, proposée la première fois en 1965 par Harlow et Welch dans [42], est d'une très grande robustesse. Elle est utilisée pour de nombreux types d'écoulements (monophasique, diphasique, compressible, incompressible, turbulent, laminaire, ...) avec succès.
- Les méthodes à variables colocalisées consistent à approcher la vitesse et la pression au centre de la maille $K_{i,j}$. Ce n'est qu'en 1981 que les premières méthodes à variables colocalisées ont été proposées par Hsu [44], Prakash [65] et Rhie [66]. La principale raison du développement tardif de ces méthodes vient du fait qu'elles donnaient lieu à un mauvais couplage de la vitesse et de la pression, ce qui entraîne de fortes instabilités numériques. Dans [35], l'auteur explique comment ces difficultés peuvent être résolues.

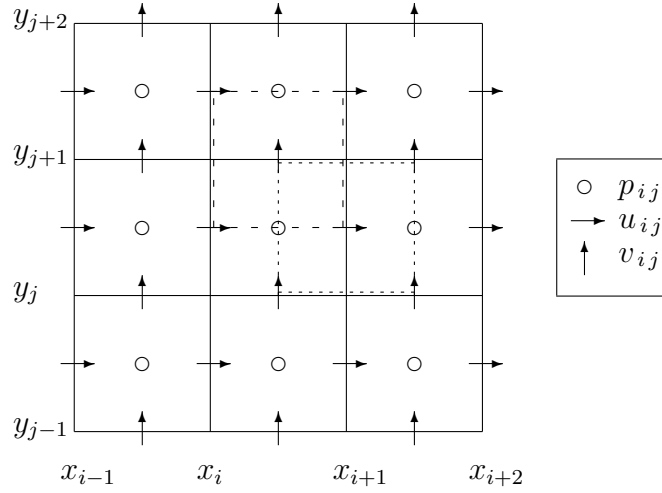


FIGURE 1.8 – Position des inconnues discrètes sur le maillage.

Une comparaison intéressante entre ces deux méthodes peut être trouvée dans [63]. Les méthodes à variables colocalisées sont plus faciles à mettre en oeuvre et la mise en place d'un algorithme multi-niveaux est simplifiée.

On définit les inconnues discrètes du problème pour la composante horizontale de la vitesse

$$u_{ij}(t) \simeq \frac{1}{\ell h} \int_{K_{i,j}^u} u(x, y, t) dx dy, \quad (1.2.15)$$

pour la composante verticale de la vitesse

$$v_{ij}(t) \simeq \frac{1}{\ell h} \int_{K_{i,j}^v} v(x, y, t) dx dy, \quad (1.2.16)$$

et pour la pression

$$p_{ij}(t) \simeq \frac{1}{\ell h} \int_{K_{i,j}} p(x, y, t) dx dy. \quad (1.2.17)$$

Approximation de l'équation de la vitesse intermédiaire : l'équation (1.2.1) pour la composante horizontale de la vitesse

$$\begin{aligned} \frac{3\tilde{u}^{k+1} - 4u^k + u^{k-1}}{2\delta t} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{u}^{k+1} = & -2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^k u^k) + \frac{\partial}{\partial y} (u^k v^k) \right] \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^{k-1} u^{k-1}) + \frac{\partial}{\partial y} (u^{k-1} v^{k-1}) \right] - \frac{\partial p^k}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{k+1} - \frac{2\delta t}{3Re} \Delta \tilde{u}^{k+1} = \frac{1}{3} & \left[4u^k - u^{k-1} - 2\delta t \left(2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^k u^k) + \frac{\partial}{\partial y} (u^k v^k) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^{k-1} u^{k-1}) + \frac{\partial}{\partial y} (u^{k-1} v^{k-1}) \right] + \frac{\partial p^k}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

En intégrant cette équation sur la maille $K_{i,j}^u$, on obtient pour chacun des termes :

$$\int_{K_{i,j}^u} u \, dx \, dy \simeq (\ell h) u_{i,j}. \quad (1.2.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}^u} \Delta u \, dx \, dy &= \int_{\partial K_{i,j}^u} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \\ &\simeq h \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\ell} \right) + h \left(\frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{\ell} \right) + \\ &\quad \ell \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} \right) + \ell \left(\frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h} \right). \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Nous notons $L(u)_{i,j}$ ce dernier terme.

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}^u} \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \, dy &= \int_{\partial K_{i,j}^u} p \, n_x \, dS \\ &\simeq h (p_{i+1,j} - p_{i,j}). \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}^u} \left[\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right] \, dx \, dy &= \int_{\partial K_{i,j}^u} [(u^2)n_x + (uv)n_y] \, dS \\ &\simeq h \left[\frac{(u_{i,j} + u_{i+1,j})^2}{4} - \frac{(u_{i,j} + u_{i-1,j})^2}{4} \right] \\ &+ \ell \left[\frac{(u_{i,j} + u_{i,j+1})(v_{i,j} + v_{i+1,j})}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(u_{i,j} + u_{i,j-1})(v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1})}{4} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Nous notons $NL_1(\mathbf{u})_{i,j}$ ce dernier terme. Ces approximations conduisent à la première étape du schéma numérique. Nous calculons la première composante de la vitesse intermédiaire $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$ à l'aide du schéma suivant

$$\begin{aligned} (\ell h) \tilde{u}_{i,j}^{k+1} - \frac{2\delta t}{3Re} L(\tilde{u}^{k+1})_{i,j} &= \frac{1}{3} \left[\ell h \left(4u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\delta t \left(2NL_1(\mathbf{u}^k)_{i,j} - NL_1(\mathbf{u}^{k-1})_{i,j} \right) \right. \\ &\quad \left. + h (p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k) \right], \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

complété par les conditions aux limites de type Dirichlet

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{0,j}^{k+1} &= g(0, y_{j+\frac{1}{2}}, t_{k+1}), \\
 \tilde{u}_{n_\ell,j}^{k+1} &= g(L, y_{j+\frac{1}{2}}, t_{k+1}), \\
 \frac{\tilde{u}_{i,0}^{k+1} + \tilde{u}_{i,1}^{k+1}}{2} &= g(x_i, 0, t_{k+1}), \\
 \frac{\tilde{u}_{i,n_h+1}^{k+1} + \tilde{u}_{i,n_h}^{k+1}}{2} &= g(x_i, H, t_{k+1}).
 \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

On utilise un schéma analogue pour calculer la composante verticale \tilde{v}^{k+1} .

Approximation de l'étape de correction : on intègre la première composante de (1.2.3) sur la maille $K_{i,j}^u$, on a

$$(\ell h) u_{i,j}^{k+1} = (\ell h) \tilde{u}_{i,j}^{k+1} - \frac{2\delta t}{3} h (\delta p_{i+1,j}^{k+1} - \delta p_{i,j}^{k+1}). \tag{1.2.26}$$

On intègre ensuite la deuxième composante de (1.2.3) sur la maille $K_{i,j}^v$, ce qui mène à

$$(\ell h) v_{i,j}^{k+1} = (\ell h) \tilde{v}_{i,j}^{k+1} - \frac{2\delta t}{3} \ell (\delta p_{i,j+1}^{k+1} - \delta p_{i,j}^{k+1}). \tag{1.2.27}$$

On intègre enfin l'équation (1.2.5) sur la maille $K_{i,j}$, on a

$$h(u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}) + \ell(v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1}) = 0. \tag{1.2.28}$$

En combinant les trois équations ci-dessus, on montre que l'incrément de la pression δp^{k+1} vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned}
 \frac{2\delta t}{3} \left(h \frac{\delta p_{i+1,j}^{k+1} - 2\delta p_{i,j}^{k+1} + \delta p_{i-1,j}^{k+1}}{\ell} + \ell \frac{\delta p_{i,j+1}^{k+1} - 2\delta p_{i,j}^{k+1} + \delta p_{i,j-1}^{k+1}}{h} \right) \\
 = h(\tilde{u}_{i,j}^{k+1} - \tilde{u}_{i-1,j}^{k+1}) + \ell(\tilde{v}_{i,j}^{k+1} - \tilde{v}_{i,j-1}^{k+1}).
 \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Remarque 1.2.1. *On obtient le même résultat en discrétisant directement (1.2.7). En effet, lorsqu'on utilise un maillage uniforme, la composée du gradient discret et de la divergence discrète est égale à l'opérateur laplacien discret.*

Nous calculons l'incrément de pression δp^{k+1} à l'aide du schéma suivant

$$\begin{aligned}
 h \frac{\delta p_{i+1,j}^{k+1} - 2\delta p_{i,j}^{k+1} + \delta p_{i-1,j}^{k+1}}{\ell} + \ell \frac{\delta p_{i,j+1}^{k+1} - 2\delta p_{i,j}^{k+1} + \delta p_{i,j-1}^{k+1}}{h} \\
 = \frac{3}{2\delta t} [h(\tilde{u}_{i,j}^{k+1} - \tilde{u}_{i-1,j}^{k+1}) + \ell(\tilde{v}_{i,j}^{k+1} - \tilde{v}_{i,j-1}^{k+1})],
 \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

complété par les conditions aux limites de Neumann, provenant de (1.2.8)

$$\begin{aligned}
\delta p_{i,0}^{k+1} &= \delta p_{i,1}^{k+1}, \\
\delta p_{i,n_h+1}^{k+1} &= \delta p_{i,n_h}^{k+1}, \\
\delta p_{0,j}^{k+1} &= \delta p_{1,j}^{k+1}, \\
\delta p_{n_\ell+1,j}^{k+1} &= \delta p_{n_\ell,j}^{k+1}.
\end{aligned} \tag{1.2.31}$$

Enfin, nous calculons la vitesse \mathbf{u}^{k+1} à l'aide du schéma suivant :

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{k+1} &= \tilde{u}_{i,j}^{k+1} - \frac{2\delta t}{3} \left(\frac{\delta p_{i+1,j}^{k+1} - \delta p_{i,j}^{k+1}}{\ell} \right), \\
v_{i,j}^{k+1} &= \tilde{v}_{i,j}^{k+1} - \frac{2\delta t}{3} \left(\frac{\delta p_{i,j+1}^{k+1} - \delta p_{i,j}^{k+1}}{h} \right).
\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

1.2.2 Méthodes de résolution des systèmes linéaires

1.2.2.1 Bases de vecteurs propres

Nous présentons dans cette partie une base orthogonale formée de vecteurs propres pour l'opérateur discret obtenu par approximation centrée du laplacien mono-dimensionnel. Cette base nous sert à résoudre les systèmes linéaires correspondant au schéma MAC.

Soit f une fonction régulière définie sur $(0,1)$ à valeurs réelles. Le problème continu consiste à trouver une fonction u qui vérifie

$$-u'' = f \tag{1.2.33}$$

sur l'intervalle $(0,1)$ et les conditions aux limites de Dirichlet. Les réels $u(0)$ et $u(1)$ sont des données du problème. L'existence d'une solution de (1.2.33) est admise. Soit n un entier strictement positif, on pose $h = 1/n$. L'intervalle $(0,1)$ est discrétisé à l'aide des deux subdivisions suivantes :

$$\begin{aligned}
x_i &= ih, \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\} \\
\text{et } xx_i &= (x_{i-1} + x_i)/2, \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\}.
\end{aligned} \tag{1.2.34}$$

On considère le second membre $F = (f_i)_{i=1,\dots,n}$, avec

$$f_i = f(xx_i)$$

et on cherche $U = (u_i)_{i=1,\dots,n}$ tel que u_i est une approximation de $u(xx_i)$. La discrétisation par différences finies du second ordre sur une subdivision uniforme de pas h consiste à approcher $-u''$ au point xx_i par

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2}.$$

Lorsque $i = 1$ (respectivement $i = n$), nous approchons u_0 par $2u(0) - u_1$ (respectivement

u_{n+1} par $2u(1) - u_n$). Il vient alors la discrétisation suivante

$$-u''(xx_1) \approx \frac{-u_2 + 3u_1 - 2u(0)}{h^2} \quad (1.2.35)$$

et

$$-u''(xx_n) \approx \frac{-u_{n-1} + 3u_n - 2u(1)}{h^2} \quad (1.2.36)$$

Les termes $-2u(0)/h^2$ et $-2u(1)/h^2$ sont évidemment reportés dans le second membre du système linéaire. Ainsi, nous avons défini une discrétisation du second ordre du Laplacien mono-dimensionnel sur maillage uniforme. La représentation matricielle de cet opérateur discret est la matrice

$$\frac{1}{h^2} D_1 \quad (1.2.37)$$

où la matrice D_1 est définie par

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}). \quad (1.2.38)$$

Une solution efficace pour résoudre le système

$$D_1 U = F \quad (1.2.39)$$

est d'utiliser une base de vecteurs propres de D_1 . Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, le vecteur

$$\phi^k = \left(\sin \left(\frac{(2i-1)k\pi}{2n} \right) \right)_{i=1, \dots, n}$$

est un vecteur propre de D_1 associé à la valeur propre

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$$

La famille de vecteurs propres $\{\phi^k\}_{k=1, \dots, n}$ est une base orthogonale. On note P_1 la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base

$$P_1 = (\phi^1 \dots \phi^k \dots \phi^n) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}).$$

Il s'ensuit que

$$P_1^t D_1 P_1 = \Delta_1 \quad (1.2.40)$$

est une matrice diagonale dont le k -ième élément de la diagonale est le produit de la valeur

propre λ_k par le carré de la norme du vecteur ϕ^k , c'est à dire

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \|\phi^1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \|\phi^n\|^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}). \quad (1.2.41)$$

Précisons que $\|\mathbf{x}\|$ est la norme du vecteur x de \mathbb{R}^n associé au produit scalaire $(.,.)$ défini par

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Pour résoudre le système $D_1 U = F$, il suffit de procéder en trois étapes :

1. Calculer $\tilde{F} = P^t F$
2. Résoudre $\Delta_1 \tilde{U} = \tilde{F}$
3. Calculer $U = P \tilde{U}$

Remarque 1.2.2. *Rapidité de la méthode* : Si n est un produit de petits nombres premiers (typiquement de 2 et 3), les étapes 1 et 3 nécessitent $\mathcal{O}(n \log(n))$ opérations. La matrice Δ_1 étant diagonale, l'étape 2 ne nécessite que n opérations. Au total, la résolution du système (1.2.39) nécessite seulement $\mathcal{O}(n \log(n))$ opérations.

Simplicité de la méthode : Cette transformée de Fourier discrète rapide est disponible dans la librairie Fortran appelée DFFTPACK V1.0 écrite par Paul N. Swarztrauber au Centre national de recherche atmosphérique au Colorado.

Inconvénients : Se limite à l'utilisation d'une subdivision uniforme.

1.2.2.2 Cholesky

Lors de la résolution des systèmes linéaires correspondant au schéma MAC, nous avons besoin de résoudre des systèmes linéaires de matrices A carrées tridiagonales et symétriques. Nous proposons d'utiliser pour cela la décomposition de Cholesky. On cherche à décomposer A sous la forme :

$$A = LDL^t,$$

où L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et D est une matrice diagonale. Une fois cette décomposition obtenue, la solution du système

$$Ax = b \quad (1.2.42)$$

est obtenue directement par la résolution successive de

1. un système tridiagonal inférieur $Lz = b$
2. un système diagonal $Dy = z$
3. un système tridiagonal supérieur $L^t x = y$

1.2.2.3 Découplage du système en n systèmes tri-diagonaux

Nous proposons de détailler dans cette section la méthode utilisée pour résoudre le système portant sur la première composante de la vitesse intermédiaire. Notons que les systèmes portant sur la seconde composante de la vitesse intermédiaire et sur l'incrément de pression sont résolus de façon analogue. On suppose que le pas d'espace est constant dans la direction verticale est égal à h . Le pas d'espace dans la direction horizontale est éventuellement variable, on note $\ell_i = x_i - x_{i-1}$ et $\ell_{i+\frac{1}{2}} = (\ell_i + \ell_{i+1})/2$. On pose $\alpha = 2\nu\delta t/3$. La première composante de la vitesse intermédiaire vérifie pour tout $1 \leq i \leq n_\ell - 1$ et $1 \leq j \leq n_h$,

$$(\ell_{i+\frac{1}{2}}h)u_{ij} - \alpha \left(h \left(\frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{\ell_{i+1}} - \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{\ell_i} \right) + \ell_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h} \right) \right) = b_{ij}, \quad (1.2.43)$$

où le second membre b contient tous les termes explicites du schéma

$$b_{ij} = \left(\ell_{i+\frac{1}{2}}h (4u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1}) - 2\delta t (2NL_1(\mathbf{u}^k)_{ij} - NL_1(\mathbf{u}^{k-1})_{ij} + h(p_{i+1j}^k - p_{ij}^k)) \right) / 3 \quad (1.2.44)$$

Ces équations sont complétées par les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} u_{0j} &= g(x_0, y_{j-\frac{1}{2}}), \\ u_{n_h j} &= g(x_{n_h}, y_{j-\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (1.2.45)$$

et selon le type de condition à la limite souhaitée

$$\begin{array}{l|l} \text{si Dirichlet} & \text{si Libre} \\ u_{i0} = 2g_1(x_i, 0) - u_{i1} & u_{i0} = u_{i1} \\ u_{i n_h + 1} = 2g_1(x_i, H) - u_{i n_h} & u_{i n_h + 1} = u_{i n_h} \end{array} \quad (1.2.46)$$

1.2.2.4 Formulation matricielle

Les champs à deux indices du type

$$W = \{w_{ij} \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n_\ell - 1, 1 \leq j \leq n_h\},$$

sont notés sous la forme du vecteur colonne de $\mathbb{R}^{(n_\ell-1)n_h}$ suivant

$$W = \left(w_{11} \quad \dots \quad w_{1n_h} \quad \dots \quad w_{n_\ell-11} \quad \dots \quad w_{n_\ell-1n_h} \right)^t \quad (1.2.47)$$

On applique cette notation à U et b . Le système (1.2.43) s'écrit alors sous la forme matricielle suivante

$$A_2 U = b, \quad (1.2.48)$$

où A_2 est la matrice tridiagonale par blocs définie par

$$A_2 = \begin{pmatrix} B_1 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & B_2 & C_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & C_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{n_\ell-1} \\ 0 & \dots & 0 & C_{n_\ell-1} & B_{n_\ell-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n_\ell-1)n_h, (n_\ell-1)n_h}(\mathbb{R}), \quad (1.2.49)$$

avec les matrices B_i et C_i définies respectivement par

$$B_i = \alpha \frac{\ell_{i+\frac{1}{2}}}{h} D_1^y + \alpha h \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) I_{n_h} + \omega_i I_{n_h} \in \mathcal{M}_{n_h, n_h}(\mathbb{R}) \quad (1.2.50)$$

et

$$C_i = -\alpha \frac{h}{\ell_i} I_{n_h} \in \mathcal{M}_{n_h, n_h}(\mathbb{R}), \quad (1.2.51)$$

où ω_i est égal à l'aire de la maille K_{ij}^u

$$\omega_i = \ell_{i+\frac{1}{2}} h,$$

la matrice I_{n_h} est la matrice identité de dimension n_h et la matrice D_1^y est une représentation discrète de la dérivée partielle seconde dans la direction verticale. Si on utilise des conditions aux limites de Dirichlet, on définit la matrice D_1^y par

$$D_1^y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_h, n_h}(\mathbb{R}), \quad (1.2.52)$$

et on doit ajouter au second membre le vecteur de $\mathbb{R}^{((n_\ell-1)n_h)^2}$ suivant

$$\alpha h \left(\frac{g(0, yy_1)}{\ell_1} \quad \dots \quad \frac{g(0, yy_{n_h})}{\ell_1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{g(x_{n_\ell}, yy_1)}{\ell_{n_\ell}} \quad \dots \quad \frac{g(x_{n_\ell}, yy_{n_h})}{\ell_{n_\ell}} \right)^t, \quad (1.2.53)$$

afin de prendre en compte les termes de bord. En revanche, si on utilise des conditions aux limites de type Libre, c'est à dire telles que $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, on définit la matrice D_1^y par

$$D_1^y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_h n_h}(\mathbb{R}). \quad (1.2.54)$$

et on n'ajoute pas de terme au second membre.

1.2.2.5 Changement de base

On introduit la matrice de passage P_2 diagonale par blocs suivante

$$P_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & P_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P_1 \end{pmatrix}}_{(n_\ell - 1) \text{ blocs de taille } n_h} \in \mathcal{M}_{(n_\ell - 1)n_h (n_\ell - 1)n_h}(\mathbb{R}), \quad (1.2.55)$$

où la matrice P_1 est la matrice de passage de taille n_h formée par les vecteurs propres de la matrice D_1^y introduits dans la partie 1.2.2.1. On suppose que les vecteurs propres sont de norme égale à 1, on a alors :

$$P_1^t D_1^y P_1 = \Delta_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n_h} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_h n_h}(\mathbb{R}), \quad (1.2.56)$$

où Δ_1 est la matrice diagonale de taille n_h , qui contient les valeurs propres de la matrice D_1^y . On applique le changement de base à la matrice A_2 , notons Δ_2 cette nouvelle matrice

$$\Delta_2 = P_2^t A_2 P_2. \quad (1.2.57)$$

On peut écrire Δ_2 sous la forme

$$\Delta_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} E_1 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline C_2 & E_2 & C_3 & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & C_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{n_\ell-1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & C_{n_\ell-1} & E_{n_\ell-1} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{(n_\ell-1)n_h, (n_\ell-1)n_h}(\mathbb{R}). \quad (1.2.58)$$

La matrice Δ_2 est tridiagonale. En effet, les matrices E_i sont définies par

$$E_i = \alpha \frac{\ell_{i+\frac{1}{2}}}{h} \Delta_1 + \alpha h \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) I_{n_h} + \omega_i I_{n_h}. \quad (1.2.59)$$

Le $j^{\text{ème}}$ élément de la diagonale principale de Δ_2 est donc donné par

$$\omega_i + \alpha \left(\frac{\lambda_j \ell_{i+\frac{1}{2}}}{h} + h \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) \right). \quad (1.2.60)$$

A l'aide de ce changement de base, la résolution du système (1.2.48) est équivalente à la résolution successive de

$$\tilde{b} = P_2^t b, \quad (1.2.61)$$

$$\Delta_2 \tilde{U} = \tilde{b}, \quad (1.2.62)$$

et

$$U = P_2 \tilde{U}. \quad (1.2.63)$$

1.2.2.6 Matrice de permutation

Dans le but de simplifier la résolution du système (1.2.62), on introduit la matrice de permutation σ qui transforme le vecteur W de $\mathbb{R}^{(n_\ell-1)n_h}$, noté

$$W = \left(w_{11} \quad \dots \quad w_{1n_h} \quad \dots \quad w_{n_\ell-11} \quad \dots \quad w_{n_\ell-1n_h} \right)^t \quad (1.2.64)$$

en

$$\sigma W = \left(w_{11} \quad \dots \quad w_{n_\ell-11} \quad \dots \quad w_{1n_h} \quad \dots \quad w_{n_\ell-1n_h} \right)^t. \quad (1.2.65)$$

A titre d'exemple pour $n_\ell = n_h = 4$, la matrice σ est égale à

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{(n_\ell-1)n_h, (n_\ell-1)n_h}(\mathbb{R}). \quad (1.2.66)$$

Plus généralement, si i et j sont deux indices qui varient respectivement dans $\{1, \dots, n_\ell - 1\}$ et $\{1, \dots, n_h\}$, alors les éléments de la ligne $(j-1)(n_\ell-1)+i$ sont tous nuls sauf le $(i-1)n_h+j$ ème qui vaut 1. Rappelons qu'une matrice de permutation est inversible et que son inverse est sa transposée. On multiplie le système (1.2.62) à gauche par la matrice de permutation σ . Le système tridiagonal de matrice Δ_2 est transformé en

$$T\sigma\tilde{U} = \sigma\tilde{b} \quad (1.2.67)$$

avec

$$T = \sigma\Delta_2\sigma^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & T_{n_h} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{(n_\ell-1)n_h, (n_\ell-1)n_h}(\mathbb{R}), \quad (1.2.68)$$

où les blocs T_j sont les matrices tridiagonales de taille $(n_\ell - 1)$ définies par

$$T_j = \left(\begin{array}{ccccc} a_1^j & b_2^j & 0 & \dots & 0 \\ b_2^j & a_2^j & b_3^j & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3^j & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n_\ell-1}^j \\ 0 & \dots & 0 & b_{n_\ell-1}^j & a_{n_\ell-1}^j \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{(n_\ell-1), (n_\ell-1)}(\mathbb{R}), \quad (1.2.69)$$

avec

$$a_i^j = \omega_i + \alpha \left(\frac{\lambda_j \ell_{i+\frac{1}{2}}}{h} + h \left(\frac{1}{\ell_i} + \frac{1}{\ell_{i+1}} \right) \right), \quad \forall i = 1, \dots, n_\ell - 1 \quad (1.2.70)$$

et

$$b_i^j = -\alpha \frac{h}{\ell_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall i = 2, \dots, n_\ell - 1. \quad (1.2.71)$$

On s'est ramené à la résolution de n_h systèmes tridiagonaux indépendants de taille $(n_\ell - 1)$. Finalement, la résolution du système 1.2.48 est équivalente à la résolution successive de

$$\tilde{b} = P_2^t b, \quad (1.2.72)$$

$$T\sigma\tilde{U} = \sigma\tilde{b}, \quad (1.2.73)$$

et

$$U = P_2\tilde{U}. \quad (1.2.74)$$

1.2.2.7 Si les vecteurs propres ne sont pas normés

Dans ce cas, la relation (1.2.40) est fautive, elle est remplacée par

$$P_1^t D_1^y P_1 = \Delta_1 N_1, \quad (1.2.75)$$

où la matrice N_1 contient les carrés des normes des vecteurs propres

$$N_1 = \begin{pmatrix} \|\phi^1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \|\phi^{n_h}\|^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_h n_h}(\mathbb{R}). \quad (1.2.76)$$

On définit la matrice

$$N_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & N_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 \end{pmatrix}}_{(n_\ell - 1) \text{ blocs de taille } n_h} \in \mathcal{M}_{(n_\ell - 1)n_h (n_\ell - 1)n_h}(\mathbb{R}). \quad (1.2.77)$$

On a alors la relation suivante :

$$P_2^t A_2 P_2 = \Delta_2 N_2. \quad (1.2.78)$$

La résolution du système (1.2.48) est équivalente à la résolution successive de

$$\tilde{b} = P_2^t b, \quad (1.2.79)$$

$$T\sigma\tilde{U} = \sigma\tilde{b}, \quad (1.2.80)$$

$$\tilde{U} = N_2^{-1}\tilde{U}, \quad (1.2.81)$$

et

$$U = P_2\tilde{U}. \quad (1.2.82)$$

Remarque 1.2.3. *Les transformées de Fourier rapides utilisées ici ne sont pas normalisées.*

En effet, un appel de la routine *dcosqf* suivi d'un appel de la routine *dcosqb* multiplie un vecteur de longueur n par $4n$. Autrement dit, la matrice N_1 vaut $(4n)I_n$. On peut dans ce cas multiplier par N_2^{-1} en dernier lieu.

1.2.3 Méthodes spectrales

On définit tout d'abord l'opérateur de projection P_N en tronquant le développement en série de Fourier d'un champ de vitesse périodique :

$$\mathbf{u} \approx P_N(\mathbf{u}) := \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Les équations de Navier-Stokes sont projetées sur l'espace à divergence nulle en utilisant l'opérateur \mathcal{P} défini de la manière suivante :

$$\mathcal{P}(\psi) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\hat{\psi}_k - \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (\mathbf{k} \cdot \hat{\psi}_k) \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

pour

$$\psi = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \hat{\psi}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Cet opérateur permet d'éliminer le gradient de pression dans l'équation du moment, et l'on obtient donc :

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{g},$$

où

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathcal{P}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}),$$

et

$$\mathbf{g} = \mathcal{P}(\mathbf{f}).$$

De la relation ci-dessus, on déduit :

$$\partial_t (P_N(\mathbf{u})) - \nu \Delta (P_N(\mathbf{u})) + B_N(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = P_N(\mathbf{g}),$$

où $B_N(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = P_N(B(\mathbf{u}, \mathbf{u}))$, car l'opérateur P_N commute avec les opérateurs de dérivation en espace et en temps. On recherche alors l'approximation \mathbf{u}_N de $P_N(\mathbf{u})$ solution de :

$$\partial_t \mathbf{u}_N - \nu \Delta \mathbf{u}_N + B_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{u}_N) = P_N(\mathbf{g}).$$

En notant $\tilde{\mathbf{u}}_k(t)$ les coefficients de Fourier de $\mathbf{u}_N(t)$, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k(t) - \nu |\mathbf{k}|^2 \tilde{\mathbf{u}}_k(t) + B_N(\widetilde{\mathbf{u}_N, \mathbf{u}_N})_k = \tilde{\mathbf{g}}_k$$

Remarque 1.2.4. *L'expression du terme non-linéaire peut être simplifiée. On a en effet :*

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{u}|^2,$$

où

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}.$$

Il en découle les relations suivantes :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathcal{P}((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}).$$

On voit ici que l'approximation du terme provenant de la diffusion ne pose pas de problème. Le terme le plus long à évaluer dans le cadre spectral est ce terme non-linéaire $B_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{u}_N)_k$. Plusieurs stratégies sont possibles, mais il faut noter que la technique consistant à évaluer ces coefficients directement en fonction des coefficients de Fourier de \mathbf{u}_N est très coûteuse en nombre d'opérations.

On préfère donc passer dans l'espace physique, évaluer point par point le produit dans cet espace physique et revenir dans l'espace spectral. Les transferts entre l'espace physique et l'espace spectral peuvent se faire rapidement grâce aux F.F.T.

Différents schémas d'intégration en temps peuvent être implémentés. Pour la partie non-linéaire, l'utilisation de méthodes implicites semble délicate. Les méthodes de Runge Kutta sont souvent utilisés, une condition CFL impose l'utilisation d'un pas de temps majoré par C/N , où C est une constante.

Chapitre 2

Algorithme multi-niveaux et applications

Sommaire

2.1	Introduction.	55
2.1.1	Enjeux et motivations.	55
2.1.2	Objectifs.	56
2.1.3	Quelques méthodes existantes.	57
2.2	Notations et définitions	58
2.3	Propriétés géométriques des opérateurs	60
2.3.1	Invariance des opérateurs	60
2.3.2	Ordre d'un opérateur	63
2.3.3	Consistance avec la contrainte d'incompressibilité	68
2.3.4	Conservation de la contrainte d'incompressibilité	71
2.4	Construction des opérateurs	72
2.4.1	Opérateur de restriction	73
2.4.2	Opérateur de prolongement	75
2.5	Séparation des échelles	79
2.5.1	Propriétés de conservation	79
2.5.2	Propriétés dans l'espace physique	80
2.5.3	Propriétés dans l'espace spectral.	81
2.6	Méthodes multiniveaux	93
2.6.1	Décomposition de la vitesse	93
2.6.2	Coefficients de correction locaux.	100
2.6.3	Description de l'algorithme	102
2.7	Résultats numériques	103
2.7.1	Simulations numériques directes	103
2.7.2	Les solutions multi-niveaux.	113
2.8	Opérateurs d'interpolation et conditions aux limites de Dirichlet	116

2.8.1	Extension du champ de vitesse sur les mailles fictives.	118
2.8.2	Restriction et prolongement de la vitesse sur le bord.	121
2.8.3	Application à la simulation de la cavité entraînée.	122

tel-00447859, version 2 - 11 Feb 2010

2.1 Introduction.

Dans cette partie, nous présentons une nouvelle méthode multi-niveaux pour les équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension deux. Afin de supprimer les difficultés liées au traitement des bords du domaine occupé par le fluide, on se placera, dans un premier temps, dans le cadre des conditions aux limites périodiques. Dans ce cas, la présentation de l'algorithme multi-niveaux est simplifiée. De plus, l'étude dans l'espace spectral permet de mieux comprendre les interactions entre les différents niveaux d'échelles de la turbulence. Enfin, on montrera que cette méthode s'applique aussi pour d'autres types de conditions aux limites.

Les équations de Navier-Stokes avec conditions aux limites périodiques modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible, dans un petit volume et loin des parois. La vitesse \mathbf{u} et la pression p satisfont le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

On retrouve le nombre de Reynolds, noté Re , qui caractérise l'écoulement. On suppose que la force extérieure \mathbf{f} est Ω -périodique et que $\int_{\Omega} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Le champ de vitesse est connu à l'instant initial

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0. \quad (2.1.2)$$

On suppose de plus que le champ de vitesse initial \mathbf{u}_0 est périodique, de période Ω , que $\int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$. On munit les équations (2.1.1) des conditions aux limites périodiques

$$\mathbf{u} \text{ est } \Omega - \text{périodique}. \quad (2.1.3)$$

Remarque 2.1.1. *Il existe un unique couple (\mathbf{u}, p) solution du système (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) (la pression étant déterminée à une constante près). De plus, cette solution vérifie*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.1.4)$$

pour tout $t > 0$.

2.1.1 Enjeux et motivations.

Ces dernières années, l'évolution des performances des ordinateurs a été considérable (rapidité d'exécution des calculs et capacité mémoire accrues). Ces progrès permettent aujourd'hui de résoudre facilement des problèmes autrefois inaccessibles, même en ayant recours aux super-calculateurs. Cependant, la difficulté à simuler des écoulements turbulents réalistes (ayant un nombre de Reynolds de l'ordre de plusieurs millions et plus) est toujours présente.

Ces difficultés sont liées à la nature même du phénomène physique étudié. En effet, comme on l'a présenté dans la Section 1.1.2.3, la théorie phénoménologique de la turbulence introduite

en 1967 par Kraichnan [50] dans le cas bi-dimensionnel montre que le rapport entre les échelles dissipatives η et la longueur caractéristique de l'écoulement L est de l'ordre de $Re^{-1/2}$ ([32], page 52). Ce résultat montre que, en première approximation, le nombre de modes nécessaires pour représenter la turbulence est une fonction polynomiale et croissante du nombre de Reynolds. Pour les méthodes du type différences finies, on obtient une estimation du nombre de points de discrétisation nécessaires pour représenter correctement l'écoulement.

Lorsque le pas d'espace du maillage est plus grand que l'échelle dissipative η , le maillage ne permet pas la représentation des plus petites échelles de la turbulence présentes dans l'écoulement. L'énergie transférée depuis les grandes échelles vers les petites échelles, par l'action des termes d'interaction non-linéaires, n'est pas dissipée correctement. On constate alors une augmentation anormale de l'énergie au niveau des échelles dont le mode est de l'ordre de la taille de la maille de calcul et la solution numérique obtenue ne représente pas le phénomène physique attendu. Ce comportement est observé en simulation des grandes échelles dans [13], en méthode multi-niveaux dans [31], ainsi que dans cette thèse.

En conséquence, la réalisation d'une simulation numérique directe (résolution de toutes les échelles physiques sans modélisation de la turbulence, DNS en abrégé) pour des écoulements caractérisés par un nombre de Reynolds élevé peut devenir très coûteuse. Elle peut pour cela nécessiter l'utilisation de machines de calcul très honorables pendant une longue durée et entraîner la consommation d'une quantité d'énergie électrique importante.

C'est pourquoi le développement de nouvelles méthodes, plus efficaces, est un enjeu qui est non seulement industriel et économique mais aussi écologique. Les méthodes multi-niveaux contribuent à la résolution de ces problèmes.

2.1.2 Objectifs.

L'idée générale des méthodes multi-niveaux est d'appliquer un traitement numérique adapté pour chaque niveau d'échelles du champ de vitesse. L'objectif étant de proposer une solution répondant aux aspects physiques du problème (décroissance correcte du spectre d'énergie), tout en gagnant du temps de calcul par rapport à une DNS. Ces méthodes sont basées sur une séparation des échelles du champ de vitesse \mathbf{u} en

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad (2.1.5)$$

où \mathbf{y} est la composante des grandes échelles et \mathbf{z} est celle des petites échelles.

Dans le cas périodique, une telle décomposition est naturelle. Pour obtenir une séparation des échelles, il suffit de tronquer le développement en série de Fourier de la vitesse

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.1.6)$$

à un niveau de coupure N . On définit la grandes échelles par

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq N/2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.1.7)$$

et les petites échelles par

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| > N/2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.1.8)$$

Malheureusement, cette décomposition, utilisée dans [32] est basée sur le développement spectral. Elle s'applique donc seulement dans le cadre périodique. Nous souhaitons étendre les travaux développés dans [32] à un contexte plus général : géométrie complexe, conditions aux limites de Dirichlet.

La technique que nous proposons utilise des opérateurs d'interpolation dans l'espace physique agissant sur des champs de vitesse définis sur grilles décalées. Pour filtrer la vitesse, on procède en deux étapes. La première étape consiste à transférer le champ de vitesse \mathbf{u} sur une grille grossière, par l'application d'un opérateur de restriction \mathcal{R} linéaire. Par cette opération, on souhaite supprimer les échelles qui correspondent aux plus hauts modes supportés par le maillage. La deuxième étape consiste à transférer le champ de vitesse $\mathcal{R}\mathbf{u}$ sur la même grille que \mathbf{u} , par l'application d'un opérateur de prolongement \mathcal{P} linéaire. On pose

$$\mathbf{y} = \mathcal{P}\mathcal{R}\mathbf{u}, \quad (2.1.9)$$

et

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{y}. \quad (2.1.10)$$

La composante des petites échelles \mathbf{z} doit contenir une faible partie de l'énergie contenue initialement dans \mathbf{u} . Inversement, la composante des grandes échelles \mathbf{y} doit contenir une grande partie de l'énergie contenue dans \mathbf{u} .

Nous étudions la dynamique d'un fluide incompressible. La vitesse du fluide \mathbf{u} vérifie donc la relation

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.1.11)$$

Les opérateurs que nous avons construits réalisent une séparation des échelles qui conserve la nature de l'écoulement. En effet, les composantes \mathbf{y} et \mathbf{z} vérifient les relations

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{z} = 0. \quad (2.1.12)$$

Dans le travail que nous présentons, la vitesse est résolue sur la grille la plus fine, les autres niveaux de grille servent uniquement à la décomposition du champ de vitesse. Une possibilité, non-exploitée dans ce travail, consiste à résoudre la vitesse sur les autres niveaux de grille. On pourrait aussi mettre en place une méthode de raffinement local.

2.1.3 Quelques méthodes existantes.

Cadre spectral

De nombreuses méthodes basées sur une décomposition en échelles du champ de vitesse ont été étudiées dans le cadre spectral, car cette décomposition se fait aisément en tronquant le développement du champ dans la base spectrale utilisée. Il est alors facile de mettre en œuvre les stratégies qui permettent d'appliquer des traitements différents aux différents niveaux

d'échelles.

“Gel” des petites échelles

Ces méthodes ont été développées par Dubois et Al [32] dans le cadre périodique 3D et pour le canal 3D. L'objectif était de calculer l'ensemble des échelles d'un écoulement turbulent jusqu'à l'échelle de dissipation k_d . Des stratégies basées sur des V-cycles et W-cycles ont ainsi été validées, le principe étant de réactualiser les plus grandes échelles à chaque pas de temps, en figeant les plus petites voire des niveaux d'échelles intermédiaires. Une analyse a priori permettait d'estimer l'erreur due au “gel” des différents niveaux d'échelle afin de savoir à quel moment il devenait nécessaire de les recalculer.

Les quantités statistiques des écoulements ont ainsi pu être retrouvées, parmi lesquelles la fonction “densité de probabilité” liée aux plus petites échelles de l'écoulement. Un gain de temps de calcul d'un facteur allant de 2 à 3 par rapport à la méthode classique a ainsi pu être obtenu.

Correction des petites échelles

Ces méthodes avaient la même ambition que la simulation des grandes échelles. L'idée est ici de faire un calcul très grossier (et donc très économique en mémoire et en temps de calcul), en négligeant complètement les petites échelles [11]. On définit alors un niveau d'échelles intermédiaires, correspondant aux plus petites échelles effectivement calculées. Des analyses a priori ont confirmé le fait que négliger les petites échelles induisait un calcul erroné des plus petites échelles résolues (une sur-estimation de l'énergie de ces échelles) qui induit à son tour une mauvaise estimation des plus grandes échelles calculées.

Une stratégie basée sur la correction du spectre d'énergie des plus petites échelles résolues a permis de corriger le spectre de l'écoulement, et d'estimer très correctement les plus grandes échelles.

Ces méthodes ont été validées sur différents types d'écoulements périodiques tridimensionnels (périodique forcé, écoulement d'Euler, turbulence décroissante) ainsi que dans le cas du canal 3D.

2.2 Notations et définitions

Pour simplifier la présentation, on choisit de prendre comme domaine de calcul

$$\Omega = (0, 2\pi)^2. \quad (2.2.1)$$

On peut généraliser tout ce qui va suivre au cas d'un domaine rectangulaire quelconque. Il suffit par exemple d'introduire un coefficient multiplicateur du type $\frac{2\pi}{L}$ dans les transformées de Fourier.

La méthode multi-niveaux que nous avons développée nécessite plusieurs niveaux de grilles imbriquées avec un facteur de raffinement égal à deux. Pour cette raison, les nombres n_ℓ et

n_h doivent être divisibles par $2^{n_{niv}-1}$, où n_{niv} est le nombre de niveaux de grille considérés. Pour alléger les notations, on introduit le vecteur à deux composantes entières

$$\mathbf{n} = (n_\ell, n_h). \quad (2.2.2)$$

On définit le pas d'espace maximal

$$\delta_{\mathbf{n}} = \max(\ell, h), \quad (2.2.3)$$

et la grille uniforme

$$\mathcal{G}_{\mathbf{n}} = \{(x_i, y_j), 0 \leq i \leq n_\ell, 0 \leq j \leq n_h\}. \quad (2.2.4)$$

Définition 2.2.1. Soit $\mathbf{u} = (u, v)$ une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On appelle **représentation décalée de \mathbf{u} sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$** le champ de vitesse discret à deux composantes $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = (u^{\mathbf{n}}, v^{\mathbf{n}})$ défini pour $1 \leq i \leq n_\ell$ et $1 \leq j \leq n_h$ par

$$u_{i,j}^{\mathbf{n}} = u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad v_{i,j}^{\mathbf{n}} = v(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j). \quad (2.2.5)$$

Le placement des inconnues est représenté sur la Figure 2.1.

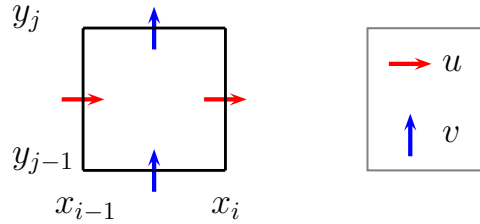


FIGURE 2.1 – Placement décalé des inconnues discrètes sur le maillage.

La pression n'intervient pas dans le schéma multi-niveaux que nous proposons. On a donc représenté seulement les inconnues discrètes de la vitesse.

Remarque 2.2.1. Par abus de notation, on écrira $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} \in \mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ lorsque $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ est un champ de vitesse défini sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$.

Remarque 2.2.2. Notre but est de construire des opérateurs d'interpolation qui permettent le transfert de la vitesse entre des niveaux de grilles ayant un facteur de raffinement égal à deux. On va donc construire un **opérateur de restriction**

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\mathbf{n}} : \mathcal{G}_{\mathbf{n}} &\rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{n}/2} \\ \mathbf{u}^{\mathbf{n}} &\mapsto \mathbf{u}^{\mathbf{n}/2} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

qui transforme un champ de vitesse défini sur une grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ en un champ de vitesse défini

sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$ et un **opérateur de prolongement**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^n &: \mathcal{G}_{n/2} \rightarrow \mathcal{G}_n \\ \mathbf{u}^{n/2} &\mapsto \mathbf{u}^n \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

qui transforme un champ de vitesse défini sur une grille $\mathcal{G}_{n/2}$ en un champ de vitesse défini sur la grille \mathcal{G}_n .

Remarque 2.2.3. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à propos du niveau de grille sur lequel est appliqué l'opérateur d'interpolation, on notera \mathcal{R} au lieu de \mathcal{R}^n et \mathcal{P} au lieu de \mathcal{P}^n . C'est le cas notamment des opérateurs d'interpolation définis dans le contexte des conditions aux limites périodiques, car il n'y a pas de traitement spécifique dû aux bords du domaine.

Remarque 2.2.4. Les opérateurs d'interpolation agissent différemment sur les deux composantes de la vitesse. Néanmoins, elles seront traitées de façon analogue. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on utilisera les abus de notation suivants :

$$\mathcal{R}\mathbf{u} = (\mathcal{R}u, \mathcal{R}v) \quad (2.2.8)$$

et

$$\mathcal{P}\mathbf{u} = (\mathcal{P}u, \mathcal{P}v) \quad (2.2.9)$$

pour la restriction et le prolongement de chaque composante d'un champ de vitesse discret.

Remarque 2.2.5. Les deux niveaux de grilles \mathcal{G}_n et $\mathcal{G}_{n/2}$ sont représentés sur la Figure 2.2. On voit que la grille $\mathcal{G}_{n/2}$ s'emboîte dans la grille \mathcal{G}_n , qui est deux fois plus fine. Malheureusement, en raison du placement décalé, les inconnues discrètes définies sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$ ne coïncident pas avec certaines inconnues de la grille \mathcal{G}_n . En conséquence, il n'existe pas de restriction triviale du type

$$\mathcal{I} : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n/2}, \quad (\mathcal{I}\mathbf{u}^n)_{i,j} = \mathbf{u}_{\phi_1(i), \phi_2(j)}^n,$$

où les inconnues $\mathbf{u}_{\phi_1(i), \phi_2(j)}^n$ et $\mathbf{u}_{i,j}^{n/2}$ seraient localisées au même point.

Certains auteurs cherchent à obtenir une injection entre les niveaux de grille. Lorsque les inconnues sont décalées, P. Pouillet propose dans [64] de prendre un facteur de raffinement égal à trois. De même, lorsque les inconnues de vitesse sont colocalisées, S. Faure propose aussi dans [36] de prendre un facteur égal à trois.

2.3 Propriétés géométriques des opérateurs

2.3.1 Invariance des opérateurs

2.3.1.1 Opérateur de restriction

Considérons un opérateur de restriction \mathcal{R} . On note $\mathbf{u}^n = (u^n, v^n)$ un champ de vitesse sur la grille \mathcal{G}_n . L'opérateur de restriction \mathcal{R} associe à \mathbf{u}^n un champ de vitesse à deux composantes

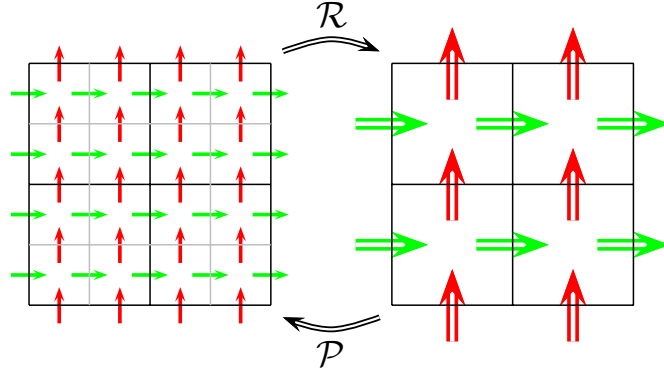


FIGURE 2.2 – Les opérateurs d’interpolation transfèrent le champ de vitesse entre des niveaux de grille ayant un facteur de raffinement égal à deux.

$(\mathcal{R}u^n, \mathcal{R}v^n)$ défini sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$, deux fois moins fine. L’opérateur de restriction est supposé linéaire. Pour chaque entier i et j , il existe des coefficients réels $b_{p,q}^{i,j}$ tels que

$$(\mathcal{R}u^n)_{i,j} = \sum_{p,q} b_{p,q}^{i,j} u_{p,q}^n. \quad (2.3.1)$$

On peut faire naturellement plusieurs hypothèses sur l’opérateur de restriction.

- Analogie entre u et v : l’interpolation des deux composantes de la vitesse doit être traitée de façon analogue. Il est donc naturel de supposer l’existence d’une correspondance entre les coefficients d’interpolation des deux composantes de la vitesse. Sachant que l’interpolation de la première composante est donnée par (2.3.1), on écrit

$$(\mathcal{R}v^n)_{i,j} = \sum_{p,q} \tilde{b}_{p,q}^{i,j} v_{p,q}^n, \quad (2.3.2)$$

avec

$$\tilde{b}_{p,q}^{i,j} = b_{2(i-j)+q, 2(j-i)+p}^{i,j}, \quad (2.3.3)$$

pour tout i, j, p, q entiers.

- Invariance par translation : soient δ_i et δ_j deux entiers quelconques. Le schéma d’interpolation en (x_{2i}, y_{2j-1}) , point de localisation de $u_{i,j}^{n/2}$, est identique à celui utilisé au point $(x_{2i}, y_{2j-1}) + 2(\delta_i \ell, \delta_j h)$, point de localisation de $u_{i+\delta_i, j+\delta_j}^{n/2}$. Cette hypothèse est justifiée car la configuration d’interpolation en ces différents points est la même. Elle se traduit sur les coefficients de l’opérateur par la relation

$$b_{p,q}^{i+\delta_i, j+\delta_j} = b_{p-2\delta_i, q-2\delta_j}^{i,j}, \quad (2.3.4)$$

pour tout p et q entiers.

- Symétrie de l’opérateur par rapport à un axe horizontal : vu le placement des inconnues, on peut supposer que les coefficients qui interviennent dans le schéma d’interpo-

lation sont symétriques par rapport à la droite horizontale passant par le point d'interpolation, c'est-à-dire que

$$b_{p,4j-1-q}^{i,j} = b_{p,q}^{i,j}, \quad (2.3.5)$$

pour tout p et q entiers.

- Symétrie de l'opérateur par rapport à un axe vertical : de même, on peut supposer que les coefficients intervenant dans le schéma d'interpolation sont symétriques par rapport à la droite verticale passant par le point d'interpolation, c'est à dire que

$$b_{4i-p,q}^{i,j} = b_{p,q}^{i,j}, \quad (2.3.6)$$

pour tout p et q entiers.

Remarque 2.3.1. *Si on suppose (2.3.4), alors pour définir l'opérateur de prolongement \mathcal{R} , il suffit de définir les coefficients $b_{p,q}^{i_0,j_0}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ pour une paire quelconque d'entiers (i_0,j_0) . En effet, l'invariance par translation permet d'étendre la définition de l'opérateur aux autres points d'interpolation. Si on suppose de plus (2.3.5) et (2.3.6), alors il suffit de définir les coefficients $b_{p,q}^{i_0,j_0}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $p \leq 2i_0$ et $q \leq 2j_0$. Les symétries (horizontale et verticale) de l'opérateur permettent de trouver les autres coefficients du schéma d'interpolation.*

2.3.1.2 Opérateur de prolongement

Considérons un opérateur de prolongement \mathcal{P} . On note $\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2} = (u^{\mathbf{n}/2}, v^{\mathbf{n}/2})$ un champ de vitesse sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2}$. L'opérateur de prolongement \mathcal{P} associe à $\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2}$ un champ de vitesse à deux composantes $(\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2}, \mathcal{P}v^{\mathbf{n}/2})$ défini sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$, deux fois plus fine. L'opérateur de prolongement est supposé linéaire. Pour chaque entier i et j , il existe des coefficients réels $c_{p,q}^{i,j}$ tels que

$$(\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{i,j} = \sum_{p,q} c_{p,q}^{i,j} u_{p,q}^{\mathbf{n}/2}. \quad (2.3.7)$$

On peut faire naturellement plusieurs hypothèses sur l'opérateur de prolongement.

- Analogie entre u et v : l'interpolation des deux composantes de la vitesse doit être traitée de façon analogue. Il est donc naturel de supposer l'existence d'une correspondance entre les coefficients d'interpolation des deux composantes de la vitesse. Sachant que l'interpolation de la première composante est donnée par (2.3.7), on écrit

$$(\mathcal{P}v^{\mathbf{n}/2})_{i,j} = \sum_{p,q} \tilde{c}_{p,q}^{i,j} v_{p,q}^{\mathbf{n}/2}, \quad (2.3.8)$$

avec

$$\tilde{c}_{p,q}^{2i+\delta_i, 2j+\delta_j} = c_{(i-j)+q, (j-i)+p}^{2i+\delta_i, 2j+\delta_i}, \quad (2.3.9)$$

pour tout i, j, p, q entiers et δ_i, δ_j dans $\{-1, 0\}$.

- Invariance par translation : soient δ_i et δ_j deux entiers quelconques. Le schéma d'interpolation en $(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})$, point de localisation de $u_{i,j}^{\mathbf{n}}$, est identique à celui utilisé au point $(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) + 2(\delta_i \ell, \delta_j h)$, point de localisation de $u_{i+2\delta_i, j+2\delta_j}^{\mathbf{n}}$. Cette hypothèse est

justifiée car la configuration d'interpolation en ces différents points est la même. Elle se traduit sur les coefficients de l'opérateur par la relation

$$c_{p,q}^{i+2\delta_i, j+2\delta_j} = c_{p-\delta_i, q-\delta_j}^{i,j}, \quad (2.3.10)$$

pour tout p et q entiers.

- Invariance par une symétrie d'axe horizontal : les schémas d'interpolation aux points $(x_i, y_{2j-\frac{1}{2}})$ et $(x_i, y_{2j-\frac{3}{2}})$ sont symétriques par rapport au point (x_i, y_{2j-1}) , c'est-à-dire que

$$c_{p,q}^{i, 2j-1} = c_{p, 2j-q}^{i, 2j}, \quad (2.3.11)$$

pour tout p et q entiers.

- Symétrie de l'opérateur par rapport à un axe vertical : au vu du placement des inconnues, on peut supposer que les coefficients intervenant dans le schéma d'interpolation sont symétriques par rapport à la droite verticale passant par le point d'interpolation, c'est-à-dire que

$$c_{i+p,q}^{2i,j} = c_{i-p,q}^{2i,j} \quad \text{et} \quad c_{2i-1-p,q}^{2i-1,j} = c_{p,q}^{2i-1,j}, \quad (2.3.12)$$

pour tout p et q entiers.

Remarque 2.3.2. Si on suppose (2.3.8), (2.3.10) et (2.3.11), alors pour définir l'opérateur de prolongement \mathcal{P} , il suffit de définir les coefficients $c_{p,q}^{2i_0, 2j_0}$ et $c_{p,q}^{2i_0-1, 2j_0}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ pour une paire quelconque d'entiers i_0 et j_0 . En effet, les invariances par translation et par symétrie permettent d'étendre la définition de l'opérateur aux autres points d'interpolation.

Si on suppose de plus (2.3.12), alors il suffit de définir les coefficients $c_{p,q}^{2i_0, 2j_0}$ et $c_{p,q}^{2i_0-1, 2j_0}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $p \leq i_0$. La symétrie de l'opérateur permet de trouver les autres coefficients du schéma d'interpolation.

2.3.2 Ordre d'un opérateur

Définition 2.3.1. ETENDUE D'UN OPÉRATEUR

Soient $(x_p)_{p=0\dots n_\ell}$ et $(y_q)_{q=0\dots n_h}$ les subdivisions de pas respectifs ℓ et h . On appelle **étendue d'un opérateur de restriction** \mathcal{R} la quantité $\Delta(\mathcal{R})$ définie par

$$\Delta(\mathcal{R}) = \max\{\Delta_x(\mathcal{R}), \Delta_y(\mathcal{R})\} \quad (2.3.13)$$

avec

$$\Delta_x(\mathcal{R}) = \max_{\substack{i, j, p, q \text{ tels que} \\ b_{p,q}^{i,j} \neq 0}} \frac{|x_p - x_{2i}|}{\ell} \quad (2.3.14)$$

et

$$\Delta_y(\mathcal{R}) = \max_{\substack{i, j, p, q \text{ tels que} \\ b_{p,q}^{i,j} \neq 0}} \frac{|y_{q-\frac{1}{2}} - y_{2j-1}|}{h}. \quad (2.3.15)$$

On appelle *étendue d'un opérateur de prolongement* \mathcal{P} la quantité $\Delta(\mathcal{P})$ définie par

$$\Delta(\mathcal{P}) = \max\{\Delta_x(\mathcal{P}), \Delta_y(\mathcal{P})\} \quad (2.3.16)$$

avec

$$\Delta_x(\mathcal{P}) = \max_{\substack{i, j, p, q \text{ tels que} \\ c_{p, q}^{i, j} \neq 0}} \frac{|x_{2p} - x_i|}{\ell} \quad (2.3.17)$$

et

$$\Delta_y(\mathcal{P}) = \max_{\substack{i, j, p, q \text{ tels que} \\ c_{p, q}^{i, j} \neq 0}} \frac{|y_{2q-1} - y_{j-\frac{1}{2}}|}{h}. \quad (2.3.18)$$

Remarque 2.3.3. Soit un opérateur \mathcal{A} qui ne possède pas de direction privilégiée, c'est-à-dire tel que

$$\Delta_x(\mathcal{A}) \approx \Delta_y(\mathcal{A}),$$

alors le nombre d'opérations requises pour l'interpolation d'un champ de vitesse $\mathbf{u} \in \mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ est de l'ordre de

$$\Delta(\mathcal{A})^2 n_\ell n_h.$$

Dans le cadre de l'application de la méthode multi-niveaux, le prolongement et la restriction sont utilisés à chaque itération (en temps) de la simulation. Par soucis de réduction du temps de calcul, il est donc intéressant de construire des opérateurs dont l'étendue est faible. De plus, on sait qu'un opérateur dont l'étendue est faible permet d'extraire, par le procédé de séparation des échelles

$$\mathbf{y} = \mathcal{P}\mathcal{R}\mathbf{u} \text{ et } \mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{y},$$

les plus petites structures de l'écoulement. Le comportement local du champ de vitesse et la hiérarchie entre les différents niveaux d'échelles sont pris en compte dans l'algorithme que nous proposons. Pour cette raison, il est aussi important de construire des opérateurs dont l'étendue est faible.

Définition 2.3.2. ERREUR D'INTERPOLATION

Soit $\mathbf{u} = (u, v)$ un champ de vitesse régulier défini sur Ω . Soient $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ et $\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2}$ les représentations décalées de \mathbf{u} sur les grilles $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ et $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2}$. On définit l'erreur d'interpolation d'un opérateur de restriction \mathcal{R} par

$$e_{\mathbf{n}}(\mathcal{R}) = \max\{e_{\mathbf{n}}^u(\mathcal{R}), e_{\mathbf{n}}^v(\mathcal{R})\}, \quad (2.3.19)$$

avec

$$e_{\mathbf{n}}^u(\mathcal{R}) = \max_{ij} |(\mathcal{R}u^{\mathbf{n}})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}/2}| \quad \text{et} \quad e_{\mathbf{n}}^v(\mathcal{R}) = \max_{ij} |(\mathcal{R}v^{\mathbf{n}})_{ij} - v_{ij}^{\mathbf{n}/2}|. \quad (2.3.20)$$

De même, on définit l'erreur d'interpolation d'un opérateur de prolongement \mathcal{P} par

$$e_{\mathbf{n}}(\mathcal{P}) = \max\{e_{\mathbf{n}}^u(\mathcal{P}), e_{\mathbf{n}}^v(\mathcal{P})\}, \quad (2.3.21)$$

avec

$$e_{\mathbf{n}}^u(\mathcal{P}) = \max_{i,j} |(\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}}| \quad \text{et} \quad e_{\mathbf{n}}^v(\mathcal{P}) = \max_{i,j} |(\mathcal{P}v^{\mathbf{n}/2})_{ij} - v_{ij}^{\mathbf{n}}|. \quad (2.3.22)$$

On rappelle que $\delta_{\mathbf{n}}$ désigne le pas d'espace maximal de la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$.

Définition 2.3.3. ORDRE D'UN OPÉRATEUR

Soit k un entier naturel. On dira qu'un opérateur \mathcal{A} est d'ordre k s'il existe une constante C qui ne dépend pas de \mathbf{n} telle que

$$|e_{\mathbf{n}}(\mathcal{A})| \leq C\delta_{\mathbf{n}}^k. \quad (2.3.23)$$

Proposition 2.3.1. ERREUR D'INTERPOLATION LOCALE POUR LA RESTRICTION

Soit $\mathbf{u} = (u, v)$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 définie sur Ω . On considère $\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2}$ et $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ les représentations décalées de \mathbf{u} sur les grilles $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2}$ et $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$. Soit \mathcal{R} un opérateur de prolongement et i, j des entiers. On montre la majoration de l'erreur d'interpolation locale $(\mathcal{R}\mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}/2}$ suivante

$$\begin{aligned} |(\mathcal{R}\mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}/2}| &\leq \sum_{\substack{r,s \geq 0 \\ r+s \leq 2}} |\alpha_{r,s}^{i,j}| \left| \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s}(x_{2i}, y_{2j-1}) \right| (\ell^r h^s) \\ &+ \left\{ \sum_{p,q} |b_{p,q}^{i,j}| \right\} C^u \Delta(\mathcal{R}) \delta_{\mathbf{n}}^3, \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

où les réels $\alpha_{r,s}^{i,j}$ sont définis par

$$\alpha_{r,s}^{i,j} = \begin{cases} \left\{ \sum_{p,q} b_{p,q}^{i,j} \right\} - 1 & \text{si } (r, s) = (0, 0), \\ \frac{1}{r!s!} \sum_{p,q} b_{p,q}^{i,j} (p-2i)^r (q-2j+0.5)^s & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3.25)$$

La constante C^u dépend uniquement de la fonction u et $\Delta(\mathcal{R})$ est l'étendue de l'opérateur \mathcal{R} définie par (2.3.13).

Démonstration. On considère le développement de Taylor à l'ordre deux de u au point (x_{2i}, y_{2j-1})

$$T(x, y) = \sum_{\substack{r,s \geq 0 \\ r+s \leq 2}} \frac{1}{r!s!} (x - x_{2i})^r (y - y_{2j-1})^s \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s}(x_{2i}, y_{2j-1}). \quad (2.3.26)$$

Soient p et q entiers. Le développement de Taylor $T_{p,q} = T(x_p, y_{q-\frac{1}{2}})$ donne une valeur approchée de $u_{p,q}^{\mathbf{n}}$. L'erreur de troncature $|u_{p,q}^{\mathbf{n}} - T_{p,q}|$ satisfait la majoration suivante

$$|u_{p,q}^{\mathbf{n}} - T_{p,q}| \leq C_{p,q}^u \max \left\{ |x_p - x_{2i}|, |y_{q-\frac{1}{2}} - y_{2j-1}| \right\}^3, \quad (2.3.27)$$

où $C_{p,q}^u$ est une constante qui dépend des extremas des dérivées partielles d'ordre trois de u sur le segment qui joint les points $(x_p, y_{q-\frac{1}{2}})$ et (x_{2i}, y_{2j-1}) . Il vient alors :

$$\begin{aligned} |(\mathcal{R}u^{\mathbf{n}})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}/2}| &= \left| \left\{ \sum_{p,q} b_{p,q}^{i,j} u_{p,q}^{\mathbf{n}} \right\} - u_{i,j}^{\mathbf{n}/2} \right| \\ &\leq \left| \left\{ \sum_{p,q} b_{p,q}^{i,j} T_{p,q} \right\} - u_{i,j}^{\mathbf{n}/2} \right| \\ &\quad + \sum_{p,q} |b_{p,q}^{i,j}| C_{p,q}^u \max \left\{ |x_p - x_{2i}|, |y_{q-\frac{1}{2}} - y_{2j-1}| \right\}^3. \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

On montre que le premier terme est majoré par

$$\sum_{\substack{r,s \geq 0 \\ r+s \leq 2}} |\alpha_{r,s}^{i,j}| \left| \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s}(x_{2i}, y_{2j-1}) \right| (\ell^r h^s) \quad (2.3.29)$$

et le second par

$$\left\{ \sum_{p,q} |b_{p,q}^{i,j}| \right\} C^u \max \{ \Delta_x(\mathcal{R}), \Delta_y(\mathcal{R}) \} \delta_{\mathbf{n}}^3, \quad (2.3.30)$$

où C^u dépend des extremas des dérivées partielles d'ordre trois de u sur le domaine Ω . \square

Remarque 2.3.4. On a fait apparaître dans (2.3.24) le polynôme en ℓ et h de degré inférieur ou égal à deux intervenant dans l'erreur d'interpolation locale $(\mathcal{R}u^{\mathbf{n}})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}/2}$.

Proposition 2.3.2. ERREUR D'INTERPOLATION LOCALE POUR LE PROLONGEMENT

Soit $\mathbf{u} = (u, v)$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 définie sur Ω . On considère $\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2}$ et $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ les représentations décalées de \mathbf{u} sur les grilles $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2}$ et $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$. Soit \mathcal{P} un opérateur de prolongement et i, j des entiers. On montre la majoration de l'erreur d'interpolation locale $(\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}}$ suivante

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{ij} - u_{ij}^{\mathbf{n}}| &\leq \sum_{\substack{r,s \geq 0 \\ r+s \leq 2}} |\beta_{r,s}^{i,j}| \left| \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) \right| (\ell^r h^s) \\ &\quad + \left\{ \sum_{p,q} |c_{p,q}^{i,j}| \right\} C^u \Delta(\mathcal{P}) \delta_{\mathbf{n}}^3, \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

où les réels $\beta_{r,s}^{i,j}$ sont définis par

$$\beta_{r,s}^{i,j} = \begin{cases} \left\{ \sum_{p,q} c_{p,q}^{i,j} \right\} - 1 & \text{si } (r, s) = (0, 0), \\ \frac{1}{r! s!} \sum_{p,q} c_{p,q}^{i,j} (2p - i)^r (2q - j - 0.5)^s & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3.32)$$

La constante C^u dépend uniquement de la fonction u et $\Delta(\mathcal{P})$ est l'étendue de l'opérateur \mathcal{P}

définie par (2.3.16).

Démonstration. On utilise les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 2.3.1. \square

Remarque 2.3.5. *L'erreur d'interpolation locale pour la deuxième composante de la vitesse associée à un opérateur de restriction \mathcal{R} vérifiant (2.3.2) s'obtient en remplaçant $\alpha_{r,s}^{i,j}$ par $\alpha_{s,r}^{i,j}$ dans la formule (2.3.24).*

De même, l'erreur d'interpolation locale pour la deuxième composante de la vitesse associée à un opérateur de prolongement \mathcal{P} vérifiant (2.3.8) s'obtient en remplaçant $\beta_{r,s}^{i,j}$ par $\beta_{s,r}^{i,j}$ dans la formule (2.3.31).

Proposition 2.3.3. OPÉRATEUR DE RESTRICTION D'ORDRE DEUX : CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE

Soit \mathcal{R} un opérateur de restriction dont les coefficients d'interpolation $b_{p,q}^{i,j}$ vérifient (2.3.2), (2.3.4), (2.3.5) et (2.3.6). L'opérateur \mathcal{R} est d'ordre deux si et seulement si

$$\sum_{p,q} b_{p,q}^{i,j} = 1. \quad (2.3.33)$$

Démonstration. L'hypothèse (2.3.2) implique qu'il suffit d'étudier l'erreur d'interpolation de la première composante de la vitesse.

L'hypothèse (2.3.4) implique que les coefficients $\alpha_{r,s}^{i,j}$ qui interviennent dans l'erreur d'interpolation locale sont indépendants des indices i et j , c'est-à-dire que

$$\alpha_{r,s}^{i,j} = \alpha_{r,s}, \quad (2.3.34)$$

pour tout i et j . La relation (2.3.33) implique que $\alpha_{0,0} = 0$. De plus, les hypothèses (2.3.5) et (2.3.6) impliquent que $\alpha_{1,0} = 0$ et $\alpha_{0,1} = 0$. On obtient alors pour tout i et j la majoration suivante

$$\left| (\mathcal{R}u^n)_{ij} - u_{ij}^{n/2} \right| \leq C^u \delta_n^2, \quad (2.3.35)$$

avec la constante C^u qui dépend de la fonction u . \square

Lemme 2.3.1. *Soit \mathcal{P} un opérateur de prolongement. Soient δ_i et δ_j entiers. On a les implications suivantes*

$$(2.3.10) \quad \Rightarrow \quad \beta_{r,s}^{i+2\delta_i, j+2\delta_j} = \beta_{r,s}^{i,j} \quad \text{pour tout } i \text{ et } j. \quad (2.3.36)$$

$$(2.3.11) \quad \Rightarrow \quad \beta_{r,s}^{i, 2j-1} = (-1)^s \beta_{r,s}^{i, 2j} \quad \text{pour tout } i \text{ et } j. \quad (2.3.37)$$

$$(2.3.12) \quad \Rightarrow \quad \beta_{1,0}^{i,j} = 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et } j. \quad (2.3.38)$$

Proposition 2.3.4. OPÉRATEUR DE PROLONGEMENT D'ORDRE DEUX : CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE

Soit \mathcal{P} un opérateur de prolongement dont les coefficients d'interpolation $c_{p,q}^{i,j}$ vérifient les hypothèses (2.3.8), (2.3.10), (2.3.11) et (2.3.12). Soient i_0 et j_0 deux entiers quelconques. L'opérateur \mathcal{P} est d'ordre deux si et seulement si

$$\sum_{p,q} c_{p,q}^{i,j} = 1, \quad (2.3.39)$$

et

$$\sum_q \left\{ (2q - j - 0.5) \left(\sum_p c_{p,q}^{i,j} \right) \right\} = 0, \quad (2.3.40)$$

pour $(i, j) \in \{(i_0, j_0), (i_0 + 1, j_0)\}$.

Démonstration. Tout d'abord l'hypothèse (2.3.8) implique qu'il suffit d'étudier l'erreur d'interpolation de la première composante de la vitesse. Soient δ_i et δ_j entiers. D'après le Lemme 2.3.1, les coefficients $\beta_{r,s}^{i,j}$ qui interviennent dans l'erreur d'interpolation locale vérifient les relations

$$\beta_{r,s}^{i+2\delta_i, j+2\delta_j} = \beta_{r,s}^{i,j} \quad (2.3.41)$$

et

$$\beta_{r,s}^{i, 2j-1} = (-1)^s \beta_{r,s}^{i, 2j}, \quad (2.3.42)$$

pour tout i, j entiers. On se ramène donc à l'étude des coefficients $\beta_{r,s}^{i_0, j_0}$ et $\beta_{r,s}^{i_0+1, j_0}$. Or l'hypothèse (2.3.12) et les relations (2.3.39) et (2.3.40) entraînent respectivement que

$$\beta_{1,0}^{i,j} = 0, \quad \beta_{0,0}^{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad \beta_{0,1}^{i,j} = 0, \quad (2.3.43)$$

pour $(i, j) \in \{(i_0, j_0), (i_0 + 1, j_0)\}$. Les coefficients $\beta_{1,0}^{i,j}$, $\beta_{0,0}^{i,j}$ et $\beta_{0,1}^{i,j}$ sont donc nuls quels que soient i, j entiers. On en déduit que l'opérateur \mathcal{P} est d'ordre deux. \square

Proposition 2.3.5. Soit \mathcal{R} un opérateur de restriction dont les coefficients d'interpolation $b_{p,q}^{i,j}$ vérifient (2.3.4) ou bien (2.3.5), alors on a :

$$\alpha_{1,1}^{i,j} = 0, \quad \forall i, j. \quad (2.3.44)$$

Soit \mathcal{P} un opérateur de prolongement dont les coefficients d'interpolation $c_{p,q}^{i,j}$ vérifient (2.3.6), alors on a :

$$\beta_{1,1}^{i,j} = 0, \quad \forall i, j. \quad (2.3.45)$$

2.3.3 Consistance avec la contrainte d'incompressibilité

Définition 2.3.4. Soit $\mathbf{u}^n = (u^n, v^n)$ un champ de vitesse défini sur la grille \mathcal{G}_n . On définit la divergence discrète de \mathbf{u}^n intégrée sur la maille $K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, pour $1 \leq i \leq n_x$ et $1 \leq j \leq n_y$, par

$$D_n(\mathbf{u}^n)_{ij} = h(u_{ij}^n - u_{i-1,j}^n) + \ell(v_{ij}^n - v_{i,j-1}^n). \quad (2.3.46)$$

Proposition 2.3.6. Soit $\mathbf{u} = (u, v)$ une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^2 , trois fois continûment dérivable. La représentation de \mathbf{u} sur la grille \mathcal{G}_n , notée \mathbf{u}^n vérifie

$$\frac{1}{\ell h} D_n(\mathbf{u}^n)_{ij} = \nabla \cdot \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_n^2), \quad (2.3.47)$$

où δ_n est le pas d'espace maximal de la grille \mathcal{G}_n .

Démonstration. Le preuve est menée en utilisant un développement de Taylor à l'ordre trois au point $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}})$ de chaque terme intervenant dans (2.3.46). \square

Définition 2.3.5. On dira qu'un opérateur de restriction \mathcal{R} est consistant d'ordre k avec la contrainte d'incompressibilité si pour tout champ de vitesse régulier \mathbf{u} défini sur Ω on a

$$\frac{1}{4 \ell h} D_{n/2}(\mathcal{R}\mathbf{u}^n)_{ij} = \nabla \cdot \mathbf{u}(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + \mathcal{O}(\delta_n^k), \quad (2.3.48)$$

où \mathbf{u}^n est la représentation de \mathbf{u} sur la grille \mathcal{G}_n . De même, on dira qu'un opérateur de prolongement \mathcal{P} est consistant d'ordre k avec la contrainte d'incompressibilité si pour tout champ de vitesse régulier \mathbf{u} défini sur Ω on a

$$\frac{1}{\ell h} D_n(\mathcal{P}\mathbf{u}^{n/2})_{ij} = \nabla \cdot \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_n^k), \quad (2.3.49)$$

où $\mathbf{u}^{n/2}$ est la représentation de \mathbf{u} sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$.

Proposition 2.3.7. Tout opérateur d'ordre deux est consistant d'ordre un avec la contrainte d'incompressibilité.

Démonstration. Nous allons prouver ce résultat pour un opérateur de prolongement, la démonstration est identique pour un opérateur de restriction. Soit \mathbf{u} un champ de vitesse suffisamment régulier défini sur Ω . Soit $\mathbf{u}^{n/2}$ (resp. \mathbf{u}^n) la représentation décalée de \mathbf{u} sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$ (resp. \mathcal{G}_n). Soit \mathcal{P} un opérateur de prolongement. En supposant que \mathcal{P} est d'ordre deux, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}u_{ij}^{n/2} &= u_{ij}^n + \mathcal{O}(\delta_n^2), \\ \mathcal{P}u_{i-1j}^{n/2} &= u_{i-1j}^n + \mathcal{O}(\delta_n^2), \\ \mathcal{P}v_{ij}^{n/2} &= v_{ij}^n + \mathcal{O}(\delta_n^2), \\ \mathcal{P}v_{ij-1}^{n/2} &= v_{ij-1}^n + \mathcal{O}(\delta_n^2). \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

Alors

$$\frac{1}{\ell h} D_n(\mathcal{P}\mathbf{u}^{n/2})_{ij} = \frac{1}{\ell h} D_n(\mathbf{u}^n)_{ij} + \mathcal{O}(\delta_n). \quad (2.3.51)$$

D'autre part, d'après la Proposition 2.3.6, on a :

$$\frac{1}{\ell h} D_n(\mathbf{u}^n)_{ij} = \nabla \cdot \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_n^2). \quad (2.3.52)$$

D'où

$$\frac{1}{\ell h} D_{\mathbf{n}}(\mathcal{P}\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2})_{ij} = \nabla \cdot \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_{\mathbf{n}}). \quad (2.3.53)$$

□

Proposition 2.3.8. *Soit \mathcal{P} un opérateur de prolongement d'ordre deux vérifiant les hypothèses (2.3.8), (2.3.10), (2.3.11) et (2.3.12), alors :*

\mathcal{P} est un opérateur consistant d'ordre deux avec la contrainte d'incompressibilité

si et seulement si

les coefficients $\beta_{0,2}^{i,j}$ sont identiques quelque soient i et j et les coefficients $\beta_{2,0}^{i,j}$ sont identiques quelque soient i et j .

Démonstration. – Condition nécessaire : on suppose que \mathcal{P} est consistant d'ordre deux avec la contrainte d'incompressibilité. On suppose ici que les pas d'espace sont égaux dans chaque direction ($\ell = h = \delta$). Pour simplifier, on considère un champ de vitesse suffisamment régulier \mathbf{u} dont la composante verticale est nulle

$$\mathbf{u} = (u, 0).$$

Comme l'opérateur est d'ordre deux, l'estimation de l'erreur d'interpolation locale devient

$$(\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{i,j} - u_{i,j}^{\mathbf{n}} = \beta_{2,0}^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) \delta^2 + \beta_{0,2}^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3). \quad (2.3.54)$$

On calcule la divergence discrète

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}}(\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{i,j} &= \delta((\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{i,j} - (\mathcal{P}u^{\mathbf{n}/2})_{i-1,j}) \\ &= \delta(u_{i,j} - u_{i-1,j}) \\ &\quad + \delta^3 \left(\beta_{2,0}^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) - \beta_{2,0}^{i-1,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\ &\quad + \delta^3 \left(\beta_{0,2}^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) - \beta_{0,2}^{i-1,j} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) \right) + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

Or \mathcal{P} est consistant d'ordre deux avec la contrainte d'incompressibilité. En utilisant, la Propriété (2.3.47) il vient

$$\begin{aligned} &\left(\beta_{2,0}^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) - \beta_{2,0}^{i-1,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\ &\quad + \left(\beta_{0,2}^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) - \beta_{0,2}^{i-1,j} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) \right) = \mathcal{O}(\delta). \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

Si on suppose de plus que u vérifie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

alors on obtient

$$\beta_{2,0}^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) - \beta_{2,0}^{i-1,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(\delta), \quad (2.3.57)$$

que l'on peut factoriser en

$$\begin{aligned} & \beta_{2,0}^{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\ & + (\beta_{2,0}^{i,j} - \beta_{2,0}^{i-1,j}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(\delta). \end{aligned} \quad (2.3.58)$$

La régularité de u implique que le premier terme est égal à

$$\beta_{2,0}^{i,j} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}) \delta + \mathcal{O}(\delta^2) = \mathcal{O}(\delta). \quad (2.3.59)$$

Ainsi

$$(\beta_{2,0}^{i,j} - \beta_{2,0}^{i-1,j}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i-1}, y_{j-\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(\delta). \quad (2.3.60)$$

Or, ceci est vrai seulement si $\beta_{2,0}^{i,j} = \beta_{2,0}^{i-1,j}$. En supposant cette fois que u vérifie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

on peut montrer que $\beta_{0,2}^{i,j} = \beta_{0,2}^{i-1,j}$. On conclut enfin grâce au Lemme 2.3.1.

– Condition suffisante : clair grâce à (2.3.47). □

2.3.4 Conservation de la contrainte d'incompressibilité

Définition 2.3.6. *On dira qu'un opérateur de restriction \mathcal{R} conserve la contrainte d'incompressibilité discrète si pour tout champ de vitesse \mathbf{u}^n défini sur la grille \mathcal{G}_n , la divergence discrète du champ de vitesse restreint $\mathcal{R}\mathbf{u}^n$ définie sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la divergence discrète de \mathbf{u}^n sur la grille \mathcal{G}_n . C'est-à-dire qu'il existe pour tout $1 \leq i \leq n_\ell/2$ et $1 \leq j \leq n_h/2$ des coefficients réels $d_{k\ell}$ tels que*

$$D_{n/2}(\mathcal{R}\mathbf{u}^n)_{ij} = \sum_{pq} d_{pq} D_n(\mathbf{u}^n)_{pq}. \quad (2.3.61)$$

De même, on dira qu'un opérateur de prolongement \mathcal{P} conserve la contrainte d'incompressibilité discrète si pour tout champ de vitesse $\mathbf{u}^{n/2}$ défini sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$, la divergence discrète du champ de vitesse prolongé $\mathcal{P}\mathbf{u}^{n/2}$ définie sur la grille \mathcal{G}_n peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la divergence discrète de $\mathbf{u}^{n/2}$ sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$. C'est-à-dire qu'il

existe pour tout $1 \leq i \leq n_\ell$ et $1 \leq j \leq n_h$ des coefficients réels $e_{k\ell}$ tels que

$$D_{\mathbf{n}}(\mathcal{P}\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2})_{ij} = \sum_{pq} e_{pq} D_{\mathbf{n}/2}(\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2})_{pq}. \quad (2.3.62)$$

Remarque 2.3.6. Soit \mathcal{R} un opérateur de restriction qui conserve la contrainte d'incompressibilité discrète. Alors on a l'implication suivante :

$$\begin{aligned} \text{La divergence de } \mathbf{u}^{\mathbf{n}} \text{ est nulle} &\Rightarrow \text{La divergence de } \mathcal{R}\mathbf{u}^{\mathbf{n}} \text{ est nulle} \\ \text{i.e. } D_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{ij} = 0 \quad \forall i, j &\quad \text{i.e. } D_{\mathbf{n}/2}(\mathcal{R}\mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{ij} = 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

Soit \mathcal{P} un opérateur de prolongement qui conserve la contrainte d'incompressibilité discrète. Alors on a l'implication suivante :

$$\begin{aligned} \text{La divergence de } \mathbf{u}^{\mathbf{n}/2} \text{ est nulle} &\Rightarrow \text{La divergence de } \mathcal{P}\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2} \text{ est nulle} \\ \text{i.e. } D_{\mathbf{n}/2}(\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2})_{ij} = 0 \quad \forall i, j &\quad \text{i.e. } D_{\mathbf{n}}(\mathcal{P}\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2})_{ij} = 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

2.4 Construction des opérateurs

On considère $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = (u^{\mathbf{n}}, v^{\mathbf{n}})$ un champ de vitesse à inconnues décalées défini sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$. Nous présentons dans cette section deux opérateurs de restriction qui réalisent le transfert de la vitesse $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ vers la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2}$, deux fois moins fine que $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ et deux opérateurs de prolongement qui réalisent le transfert de la vitesse $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ vers la grille $\mathcal{G}_{2\mathbf{n}}$, deux fois plus fine que $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$.

Les opérateurs introduits par Zeng et Wesseling dans [82] sont notés \mathcal{R}^{ZW} pour l'opérateur de restriction et \mathcal{P}^{ZW} pour l'opérateur de prolongement. Dans cet article, les opérateurs d'interpolation sont utilisés dans le cadre d'un algorithme multi-grilles, appelé « Galerkin coarse grid approximation » (GCA, en abrégé). Cette technique consiste à faire des manipulations algébriques sur le système linéaire

$$Au = b,$$

obtenu en discrétisant le problème (par exemple, les équations de Navier-Stokes) à l'aide d'une grille fine. L'opérateur de prolongement \mathcal{P} est défini, de façon originale, comme l'**opérateur adjoint** de l'opérateur de restriction

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}^*,$$

où l'adjoint \mathcal{R}^* est caractérisé par la propriété

$$(v, \mathcal{R}^*w) = (\mathcal{R}v, w),$$

quels que soit v défini sur la grille fine et w sur la grille grossière, avec $(-, -)$ qui désigne le produit scalaire standard. L'algorithme GCA consiste à approcher, de manière itérative, la solution u définie sur la grille grossière du système

$$(\mathcal{R}\mathcal{A}\mathcal{P})u = \mathcal{R}b.$$

Les opérateurs introduits par Toth et Roe dans [72] sont notés \mathcal{R}^{TR} pour l'opérateur

de restriction et \mathcal{P}^{TR} pour l'opérateur de prolongement. Ici, les opérateurs de restriction et de prolongement ont des propriétés de conservation. Ils préservent, en un certain sens, la divergence et la vorticité du champ de vitesse. Les opérateurs sont utilisés dans le cadre d'un algorithme à maillage adaptatif, pour un problème de magnétohydrodynamique.

Nous définissons également de nouveaux opérateurs, notés \mathcal{R}^{BDJ} et \mathcal{P}^{BDJ} différents des opérateurs déjà cités plus haut. Les propriétés de chaque opérateur dans l'espace physique (conservation de la divergence discrète, ordre d'approximation) et dans l'espace spectral seront exposées (séparation des échelles).

2.4.1 Opérateur de restriction

Soit $\mathbf{u}^n = (u^n, v^n)$ la représentation d'un champ de vitesse quelconque régulier $\mathbf{u} = (u, v)$, à inconnues décalées, défini sur la grille \mathcal{G}_n .

2.4.1.1 L'opérateur de restriction \mathcal{R}^{ZW} .

Définition 2.4.1.

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}^{ZW} u^n)_{ij} = & (u_{2i-1, 2j+1}^n + 3 u_{2i-1, 2j}^n + 3 u_{2i-1, 2j-1}^n + u_{2i-1, 2j-2}^n + \\ & 2 u_{2i, 2j+1}^n + 6 u_{2i, 2j}^n + 6 u_{2i, 2j-1}^n + 2 u_{2i, 2j-2}^n + \\ & u_{2i+1, 2j+1}^n + 3 u_{2i+1, 2j}^n + 3 u_{2i+1, 2j-1}^n + u_{2i+1, 2j-2}^n) / 32 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

On écrit un développement limité de u à l'ordre trois. L'erreur d'interpolation vérifie

$$(\mathcal{R}^{ZW} u^n)_{ij} - u_{ij}^{n/2} = \frac{1}{4}(\ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{2i}, y_{2j-1}) + \frac{3}{8}(h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i}, y_{2j-1}) + \mathcal{O}(\delta_n^3), \quad (2.4.2)$$

où ℓ et h sont les pas d'espace de la grille \mathcal{G}_n . Ainsi, l'opérateur de restriction \mathcal{R}^{ZW} est d'ordre deux. Le schéma d'interpolation de l'opérateur \mathcal{R}^{ZW} est illustré par la Figure 2.3.

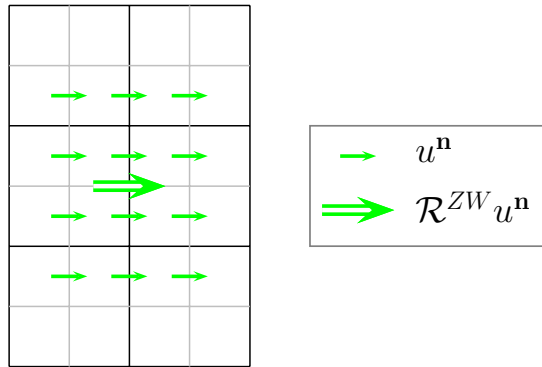


FIGURE 2.3 – Douze valeurs interviennent dans le calcul de la restriction \mathcal{R}^{ZW}

2.4.1.2 L'opérateur de restriction \mathcal{R}^{TR} .

Définition 2.4.2.

$$(\mathcal{R}^{TR} u^n)_{ij} = (u_{2i, 2j}^n + u_{2i, 2j-1}^n) / 2 \quad (2.4.3)$$

On écrit un développement limité de u à l'ordre trois. L'erreur d'interpolation vérifie

$$(\mathcal{R}^{TR} u^n)_{ij} - u_{ij}^{n/2} = \frac{1}{8}(h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i}, y_{2j-1}) + \mathcal{O}(\delta_n^3), \quad (2.4.4)$$

où h est le pas d'espace dans la direction verticale de la grille \mathcal{G}_n . On en déduit que l'opérateur de restriction \mathcal{R}^{TR} est d'ordre deux. Le schéma d'interpolation de l'opérateur \mathcal{R}^{TR} est illustré par la Figure 2.4.

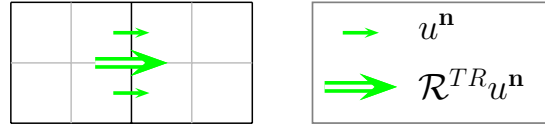


FIGURE 2.4 – Deux valeurs interviennent dans le calcul de la restriction \mathcal{R}^{TR}

2.4.1.3 L'opérateur de restriction \mathcal{R}^{BDJ} .

On définit une famille d'opérateurs de restriction \mathcal{R}_α^{BDJ} , avec α paramètre réel.

Définition 2.4.3. Soit α un réel différent de -3 . La restriction de u^n sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$, notée $\mathcal{R}_\alpha^{BDJ} u^n$, est définie pour $1 \leq i \leq n_\ell/2$ et $1 \leq j \leq n_h/2$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_\alpha^{BDJ} u^n)_{ij} = & \left(u_{2i-1, 2j}^n + u_{2i-1, 2j-1}^n + u_{2i, 2j+1}^n + \alpha u_{2i, 2j}^n \right. \\ & \left. + \alpha u_{2i, 2j-1}^n + u_{2i, 2j-2}^n + u_{2i+1, 2j}^n + u_{2i+1, 2j-1}^n \right) / (6 + 2\alpha) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

On remarque que l'opérateur \mathcal{R}^{TR} correspond à l'opérateur \mathcal{R}_α^{BDJ} lorsqu'on fait tendre le paramètre α vers l'infini. Plus précisément, pour i et j fixés, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\mathcal{R}_\alpha^{BDJ} u^n)_{ij} = (\mathcal{R}^{TR} u^n)_{ij} \quad (2.4.6)$$

On écrit un développement limité de u à l'ordre trois. L'erreur d'interpolation vérifie

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_\alpha^{BDJ} u^n)_{ij} - u_{ij}^{n/2} = & \frac{1}{3 + \alpha} (\ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{2i}, y_{2j-1}) + \\ & \frac{11 + \alpha}{8(3 + \alpha)} (h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i}, y_{2j-1}) + \mathcal{O}(\delta_n^3), \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

où ℓ et h sont les pas d'espace de la grille \mathcal{G}_n . Ainsi, l'opérateur de restriction \mathcal{R}_α^{BDJ} est d'ordre deux. Le schéma d'interpolation de l'opérateur \mathcal{R}_α^{BDJ} est illustré par la Figure 2.5.

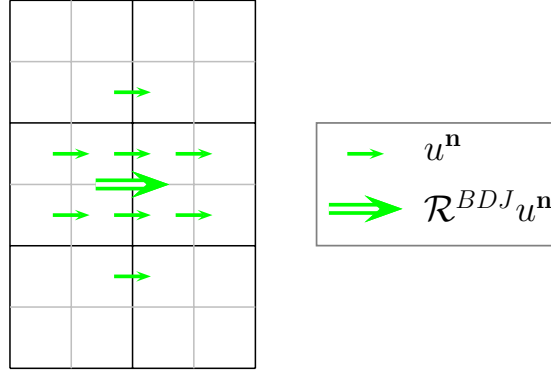


FIGURE 2.5 – Huit valeurs interviennent dans le calcul de la restriction \mathcal{R}_α^{BDJ}

2.4.2 Opérateur de prolongement

Soit $\mathbf{u}^{n/2} = (u^{n/2}, v^{n/2})$ la représentation d'un champ de vitesse quelconque régulier \mathbf{u} , à inconnues décalées, défini sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$.

Remarque 2.4.1. Les opérateurs de prolongement présentés dans [12] et [82] utilisent les valeurs d'une composante de la vitesse. Dans [72], l'opérateur de prolongement nécessite les deux composantes de la vitesse. Ce fait est justifié lorsque la divergence du champ de vitesse est nulle. La relation $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ entraîne que la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ peut être approchée par $-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$.

2.4.2.1 L'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{ZW} .

Définition 2.4.4.

$$(\mathcal{P}^{ZW} u^{n/2})_{2i2j} = (3u_{ij}^{n/2} + u_{i,j+1}^{n/2})/4 \quad (2.4.8)$$

et

$$(\mathcal{P}^{ZW} u^{n/2})_{2i-12j} = (3u_{ij}^{n/2} + u_{i,j+1}^{n/2} + 3u_{i-1,j}^{n/2} + u_{i-1,j+1}^{n/2})/8 \quad (2.4.9)$$

On écrit un développement limité de u à l'ordre trois. L'erreur d'interpolation vérifie

Proposition 2.4.1.

$$(\mathcal{P}^{ZW} u^{n/2})_{2i2j} - u_{2i2j}^n = \frac{3}{8}(h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_n^3) \quad (2.4.10)$$

et

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}^{ZW} u^{\mathbf{n}/2})_{2i-1, 2j} - u_{2i-1, 2j}^{\mathbf{n}} &= \frac{1}{2}(\ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{2i-1}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \\
 &\quad \frac{3}{8}(h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i-1}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_{\mathbf{n}}^3),
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

où ℓ et h sont les pas d'espace de la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$.

Ainsi, l'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{ZW} est d'ordre deux. Le schéma d'interpolation de l'opérateur \mathcal{P}^{ZW} est illustré par la Figure 2.6.

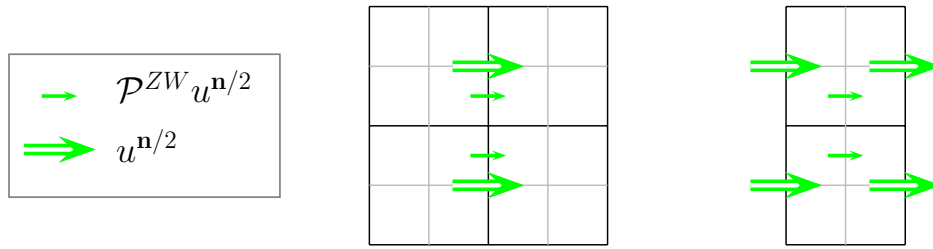


FIGURE 2.6 – Jusqu'à quatre valeurs interviennent dans le calcul du prolongement \mathcal{P}^{ZW}

2.4.2.2 L'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{TR} .

Définition 2.4.5. Soient $u^{\mathbf{n}/2}$ et $v^{\mathbf{n}/2}$ les deux composantes d'un champ de vitesse à inconnues décalées défini sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2}$.

$$(\mathcal{P}^{TR} u^{\mathbf{n}/2})_{2i, 2j} = u_{i, j}^{\mathbf{n}/2} + (u_{i, j+1}^{\mathbf{n}/2} - u_{i, j-1}^{\mathbf{n}/2})/8 \tag{2.4.12}$$

et

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}^{TR} u^{\mathbf{n}/2})_{2i-1, 2j} &= (u_{i, j}^{\mathbf{n}/2} + u_{i-1, j}^{\mathbf{n}/2})/2 + \\
 &\quad (u_{i-1, j+1}^{\mathbf{n}/2} + u_{i, j+1}^{\mathbf{n}/2} - u_{i, j-1}^{\mathbf{n}/2} - u_{i-1, j-1}^{\mathbf{n}/2})/16 + \\
 &\quad (v_{i+1, j}^{\mathbf{n}/2} - v_{i-1, j}^{\mathbf{n}/2} - v_{i+1, j-1}^{\mathbf{n}/2} + v_{i-1, j-1}^{\mathbf{n}/2})/16
 \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

On écrit un développement limité de u et de v à l'ordre trois. L'erreur d'interpolation vérifie

Proposition 2.4.2.

$$(\mathcal{P}^{TR} u^{\mathbf{n}/2})_{2i, 2j} - u_{2i, 2j}^{\mathbf{n}} = -\frac{1}{8}(h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_{\mathbf{n}}^3) \tag{2.4.14}$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}^{TR} u^{\mathbf{n}/2})_{2i-1, 2j} - u_{2i-1, 2j}^{\mathbf{n}} &= \frac{1}{2}(\ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{2i-1}, y_{2j-\frac{1}{2}}) - \\
&\frac{1}{8}(h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i-1}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \\
&\frac{1}{2}(\ell h) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} v(x_{2i-1}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_{\mathbf{n}}^3),
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

où ℓ et h sont les pas d'espace de la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$.

Ainsi, l'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{TR} est d'ordre deux. Le schéma d'interpolation de l'opérateur \mathcal{P}^{TR} est illustré par la Figure 2.7.

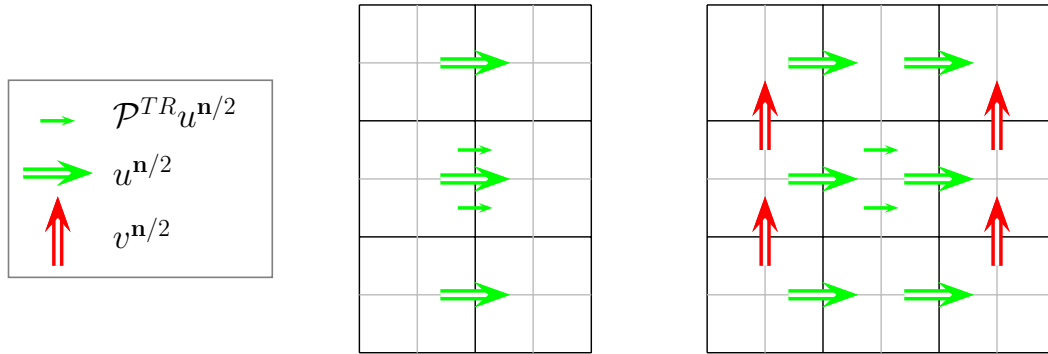


FIGURE 2.7 – Jusqu'à dix valeurs interviennent dans le calcul du prolongement \mathcal{P}^{TR}

2.4.2.3 L'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{BDJ} .

On définit une famille d'opérateurs de prolongement $\mathcal{P}_{\lambda}^{BDJ}$, avec λ paramètre réel.

Définition 2.4.6. Soit λ un réel différent de $-1/2$. Le prolongement de $u^{\mathbf{n}/2}$ sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$, noté $\mathcal{P}_{\lambda}^{BDJ} u^{\mathbf{n}/2}$, est défini pour $1 \leq i \leq n_{\ell}/2$ et $1 \leq j \leq n_h/2$ par

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_{\lambda}^{BDJ} u^{\mathbf{n}/2})_{2i, 2j} &= \left[(1 + 8\lambda)u_{i-1, j}^{\mathbf{n}/2} + 2(1 + 5\lambda)u_{i, j+1}^{\mathbf{n}/2} \right. \\
&\quad \left. + 4(1 - 4\lambda)u_{i, j}^{\mathbf{n}/2} + 6\lambda u_{i, j-1}^{\mathbf{n}/2} + (1 + 8\lambda)u_{i+1, j}^{\mathbf{n}/2} \right] / 8(2\lambda + 1)
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_{\lambda}^{BDJ} u^{\mathbf{n}/2})_{2i-1, 2j} &= \left[3\lambda u_{i-2, j}^{\mathbf{n}/2} + (1 + 5\lambda)u_{i-1, j+1}^{\mathbf{n}/2} \right. \\
&\quad \left. + 3(1 - \lambda)u_{i-1, j}^{\mathbf{n}/2} + 3\lambda u_{i-1, j-1}^{\mathbf{n}/2} + (1 + 5\lambda)u_{i, j+1}^{\mathbf{n}/2} \right. \\
&\quad \left. + 3(1 - \lambda)u_{i, j}^{\mathbf{n}/2} + 3\lambda u_{i, j-1}^{\mathbf{n}/2} + 3\lambda u_{i+1, j}^{\mathbf{n}/2} \right] / 8(2\lambda + 1)
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

On écrit un développement limité de u à l'ordre trois au point. L'erreur d'interpolation vérifie

Proposition 2.4.3.

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\lambda^{BDJ} u^{n/2})_{2i2j} - u_{2i2j}^n &= \frac{1+8\lambda}{2(2\lambda+1)} (\ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{2i}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \\ &\quad \frac{3(1+10\lambda)}{8(2\lambda+1)} (h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_{\mathbf{n}}^3) \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\lambda^{BDJ} u^{n/2})_{2i-12j} - u_{2i-12j}^n &= \frac{1+8\lambda}{2(2\lambda+1)} (\ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{2i-1}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \\ &\quad \frac{3(1+10\lambda)}{8(2\lambda+1)} (h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{2i-1}, y_{2j-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\delta_{\mathbf{n}}^3), \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

où ℓ et h sont les pas d'espace de la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$.

Ainsi, l'opérateur de prolongement $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$ est d'ordre deux. De plus, on constate que la précision de l'opérateur est la même en chaque point d'interpolation de la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$. La proposition 2.3.8 montre que cette propriété est liée à une notion de consistance de l'opérateur avec la contrainte d'incompressibilité. Le schéma d'interpolation de l'opérateur $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$ est illustré par la Figure 2.8.

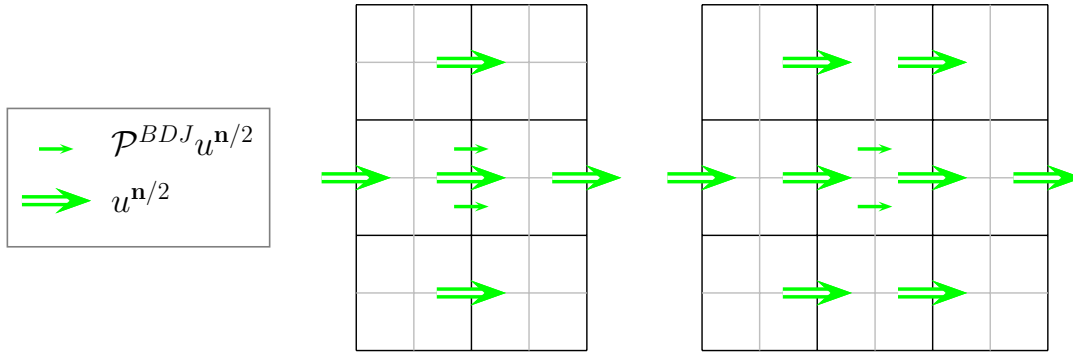


FIGURE 2.8 – Jusqu'à huit valeurs interviennent dans le calcul du prolongement $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$

Remarque 2.4.2. On a $(\mathcal{P}^{ZW} u^{n/2})_{2i-12j} = (\mathcal{P}_0^{BDJ} u^{n/2})_{2i-12j}$

Remarque 2.4.3. Lorsque le paramètre λ est égal à zéro, le prolongement \mathcal{P}^{BDJ} s'écrit

$$(\mathcal{P}_0^{BDJ} u^{n/2})_{2i2j} = (u_{i-1j}^{n/2} + 2u_{ij+1}^{n/2} + 4u_{ij}^{n/2} + u_{i+1j}^{n/2})/8 \quad (2.4.20)$$

$$(\mathcal{P}_0^{BDJ} u^{n/2})_{2i-12j} = (u_{i-1j+1}^{n/2} + 3u_{i-1j}^{n/2} + u_{ij+1}^{n/2} + 3u_{ij}^{n/2})/8$$

Dans ce cas, le schéma d'interpolation est plus compact. Il nécessite deux fois moins d'opérations que lorsque λ est différent de zéro.

Dans la section suivante, nous comparons les propriétés de séparation des échelles des opérateurs \mathcal{R}_α^{BDJ} et \mathcal{P}_α^{BDJ} avec les opérateurs proposés par Zeng et Wesseling dans [82] et ceux de Toth et Roe dans [72].

2.5 Séparation des échelles

2.5.1 Propriétés de conservation

Proposition 2.5.1. CONSERVATION DE LA CONTRAINTE D'INCOMPRESSIBILITÉ DISCRÈTE. L'opérateur de restriction \mathcal{R}_α^{BDJ} conserve la contrainte d'incompressibilité discrète. Plus précisément, on a

$$D_{\mathbf{n}/2}(\mathcal{R}_\alpha^{BDJ} \mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{ij} = \sum_{pq} d_{pq} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{pq}, \quad (2.5.1)$$

avec

$$d_{pq} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+3} & \text{si } (p, q) \in \left\{ \begin{array}{l} (2i-2, 2j), (2i-2, 2j-1), \\ (2i-1, 2j+1), (2i-1, 2j-2), \\ (2i, 2j+1), (2i, 2j-2), \\ (2i+1, 2j), (2i+1, 2j-1) \end{array} \right\}, \\ \frac{\alpha+1}{\alpha+3} & \text{si } (p, q) \in \left\{ \begin{array}{l} (2i-1, 2j), (2i-1, 2j-1), \\ (2i, 2j), (2i, 2j-1) \end{array} \right\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5.2)$$

En faisant tendre le paramètre α vers ∞ , on en déduit que \mathcal{R}^{TR} conserve aussi la contrainte d'incompressibilité discrète. L'opérateur de prolongement $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$ conserve aussi la contrainte d'incompressibilité discrète. Plus précisément, on a

$$D_{\mathbf{n}}(\mathcal{P}_\lambda^{BDJ} \mathbf{u}^{\mathbf{n}/2})_{ij} = \sum_{pq} e_{pq}^{i,j} D_{\mathbf{n}/2}(\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2})_{pq}, \quad (2.5.3)$$

avec

$$e_{pq}^{2i,2j} = \begin{cases} \frac{3\lambda}{16(2\lambda+1)} & \text{si } (p, q) = (i-1, j) \text{ ou } (i, j-1), \\ \frac{1+5\lambda}{16(2\lambda+1)} & \text{si } (p, q) = (i, j+1) \text{ ou } (i+1, j), \\ \frac{2-8\lambda}{16(2\lambda+1)} & \text{si } (p, q) = (i, j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5.4)$$

et les coefficients $e_{pq}^{2i-1, 2j-1}$, $e_{pq}^{2i-1, 2j}$ et $e_{pq}^{2i, 2j-1}$ sont définis par des formules analogues. L'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{TR} conserve également la contrainte d'incompressibilité discrète avec

$$e_{pq}^{2i, 2j} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } (p, q) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Les opérateurs \mathcal{R}^{ZW} et \mathcal{P}^{ZW} ne conservent pas la contrainte d'incompressibilité discrète.

Proposition 2.5.2. CONSISTANCE AVEC LA CONTRAINTE D'INCOMPRESSIBILITÉ.

- Opérateurs de restriction : \mathcal{R}_α^{BDJ} et \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{R}^{ZW} sont consistants d'ordre deux.
- Opérateurs de prolongement : $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$ est consistant d'ordre deux, \mathcal{P}^{TR} et \mathcal{P}^{ZW} sont consistants d'ordre un.

2.5.2 Propriétés dans l'espace physique

Dans cette partie, nous énonçons quelques propriétés des opérateurs \mathcal{R}_α^{BDJ} et $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$ dans l'espace physique (conservation de la divergence, ordre d'interpolation). Ces résultats sont des conséquences directes des propriétés 2.5.1 et 2.4.3.

Proposition 2.5.3. OPÉRATEURS ET CONDITION D'INCOMPRESSIBILITÉ.

Soit \mathbf{u}^n un champ de vitesse défini sur la grille \mathcal{G}_n tel que

$$D_n(\mathbf{u}^n)_{i,j} = 0,$$

pour tout i et j entre 1 et n , alors

$$D_{n/2}(\mathcal{R}_\alpha^{BDJ} \mathbf{u}^n)_{i,j} = 0,$$

pour tout i et j entre 1 et $n/2$. Soit $\mathbf{u}^{n/2}$ un champ de vitesse défini sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$ tel que

$$D_{n/2}(\mathbf{u}^{n/2})_{i,j} = 0,$$

pour tout i et j entre 1 et $n/2$, alors

$$D_n(\mathcal{P}_\lambda^{BDJ} \mathbf{u}^{n/2})_{i,j} = 0,$$

pour tout i et j entre 1 et n .

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 2.5.1. SÉPARATION DES ÉCHELLES ET CONDITION D'INCOMPRESSIBILITÉ.

Soit \mathbf{u}^n un champ défini sur la grille \mathcal{G}_n tel que

$$D_n(\mathbf{u}^n)_{i,j} = 0, \quad \forall i, j, \quad (2.5.6)$$

alors la composante des grandes échelles de \mathbf{u} , soit

$$\mathbf{y} = \mathcal{P}_\lambda^{BDJ} \mathcal{R}_\alpha^{BDJ} \mathbf{u}, \quad (2.5.7)$$

et la composante des petites échelles de \mathbf{u} , soit

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathcal{P}_\lambda^{BDJ} \mathcal{R}_\alpha^{BDJ} \mathbf{u}, \quad (2.5.8)$$

vérifient

$$D_{\mathbf{n}}(\mathbf{y})_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})_{i,j} = 0 \quad \forall i, j \quad (2.5.9)$$

Ce résultat assure que la décomposition des échelles conserve la contrainte d'incompressibilité discrète. On considère maintenant un champ de vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, régulier et Ω -périodique. Soient $\mathbf{u}^{\mathbf{n}} = (u^{\mathbf{n}}, v^{\mathbf{n}})$ la représentation discrète de \mathbf{u} sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ et $\mathbf{u}^{\mathbf{n}/2} = (u^{\mathbf{n}/2}, v^{\mathbf{n}/2})$ la représentation discrète de \mathbf{u} sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2}$.

Proposition 2.5.4. OPÉRATEURS ET INTERPOLATION À L'ORDRE DEUX.

On a :

$$\|\mathcal{R}_\alpha^{BDJ} \mathbf{u}^{\mathbf{n}} - \mathbf{u}^{\mathbf{n}/2}\| \leq C \delta_{\mathbf{n}}^2 \quad (2.5.10)$$

et

$$\|\mathcal{P}_\lambda^{BDJ} \mathbf{u}^{\mathbf{n}/2} - \mathbf{u}^{\mathbf{n}}\| \leq C \delta_{\mathbf{n}}^2. \quad (2.5.11)$$

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 2.5.2. SÉPARATION DES ÉCHELLES ET INTERPOLATION À L'ORDRE DEUX.

La composante petites échelles, soit

$$\mathbf{z} = \mathbf{u}^{\mathbf{n}} - \mathcal{P}_\lambda^{BDJ} \mathcal{R}_\alpha^{BDJ} \mathbf{u}^{\mathbf{n}}, \quad (2.5.12)$$

vérifie

$$\max_{i,j} |\mathbf{z}_{i,j}| \leq C \delta_{\mathbf{n}}^2, \quad (2.5.13)$$

où C est une constante qui dépend uniquement de la fonction \mathbf{u} .

Ce résultat assure que la composante des petites échelles contient une faible partie de l'énergie cinétique.

2.5.3 Propriétés dans l'espace spectral.

Pour simplifier l'écriture des formules, on suppose que le nombre de points de discrétisation est identique dans chaque direction

$$n_\ell = n_h = n. \quad (2.5.14)$$

Les résultats qui suivent s'étendent facilement au cas $n_\ell \neq n_h$. On commence par étudier les propriétés de l'opérateur de restriction \mathcal{R}_α^{BDJ} dans l'espace spectral, nous verrons ensuite celles de l'opérateur de prolongement $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$.

2.5.3.1 Restriction

Soit $u^n = \{u_{ij}^n; 1 \leq i, j \leq n\}$ la première composante d'un champ de vitesse défini sur la grille \mathcal{G}_n . Pour k_1 et k_2 compris entre $-n/2$ et $n/2 - 1$, on définit les **coefficients de Fourier** de u^n par :

$$\widehat{u}_{k_1, k_2}^n = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_{ij}^n e^{-i(k_1 x_i + k_2 y_{j-1/2})}. \quad (2.5.15)$$

L'effet de l'opérateur de restriction $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}}$ sur les coefficients de Fourier du champ de vitesse est détaillé dans la proposition suivante.

Proposition 2.5.5. EFFET DE LA RESTRICTION.

Soient k_1 et k_2 deux entiers compris entre $-n/4$ et $n/4 - 1$. Les coefficients de Fourier du champ de vitesse restreint $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n$ s'expriment en fonction de ceux de u^n par la relation suivante

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n}_{k_1, k_2} &= C_{k_1 k_2}^{r, \alpha} \widehat{u}_{k_1, k_2}^n + C_{t(k_1) k_2}^{r, \alpha} \widehat{u}_{t(k_1), k_2}^n \\ &\quad - C_{k_1 t(k_2)}^{r, \alpha} \widehat{u}_{k_1, t(k_2)}^n - C_{t(k_1) t(k_2)}^{r, \alpha} \widehat{u}_{t(k_1), t(k_2)}^n, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

où les coefficients $C_{k_1 k_2}^{r, \alpha}$ sont définis pour k_1 et k_2 entre $-n/2$ et $n/2 - 1$ par

$$C_{k_1 k_2}^{r, \alpha} = \frac{1}{3 + \alpha} \cos(k_2 h/2) \left(2 \cos(k_1 h) + 4 \cos^2(k_2 h/2) - 3 + \alpha \right) \quad (2.5.17)$$

et la fonction t est définie, pour $k \in \mathbb{N}$, par

$$t(k) = \begin{cases} k + n/2 & \text{si } k \leq -1 \\ k - n/2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5.18)$$

Remarque 2.5.1. Dans le cas $\alpha = 1$,

$$C_{k_1 k_2}^{r, 1} = \frac{\cos(k_2 h/2)}{2} \left(\cos(k_1 h) + 2(\cos(k_2 h/2))^2 - 1 \right) \quad (2.5.19)$$

décroit avec $|k_1|$ et $|k_2|$. La Figure 2.9 représente le coefficient $C_{k_1 k_2}^{r, 1}$ pour k_1 et k_2 compris entre 0 et $n/2 - 1$. On constate que la restriction conserve les basses fréquences et atténue les hautes fréquences.

Démonstration. Par définition des coefficients de Fourier

$$\widehat{\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n}_{k_1, k_2} = \frac{4}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n/2} (\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n)_{i, j} e^{-i(k_1 x_{2i} + k_2 y_{2j-1})} \quad (2.5.20)$$

Or, l'opérateur de restriction $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}}$ est défini par

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n)_{i, j} &= \left(u_{2i-1, 2j}^n + u_{2i-1, 2j-1}^n + u_{2i, 2j+1}^n + \alpha u_{2i, 2j}^n \right. \\ &\quad \left. + \alpha u_{2i, 2j-1}^n + u_{2i, 2j-2}^n + u_{2i+1, 2j}^n + u_{2i+1, 2j-1}^n \right) / (6 + 2\alpha) \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

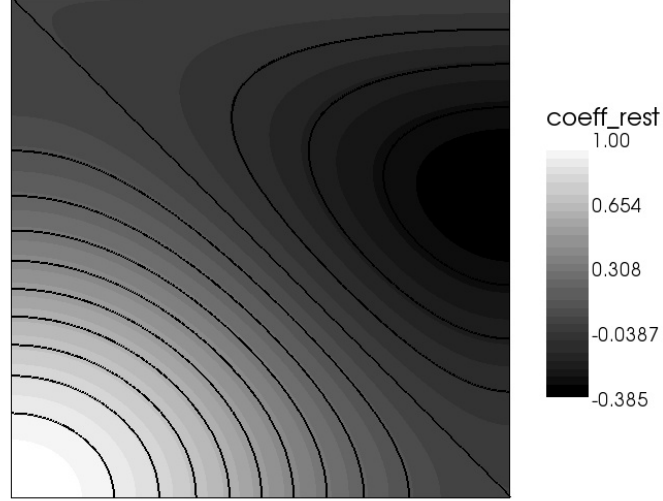


FIGURE 2.9 – Effet de la restriction sur les coefficients de Fourier

et $u^{\mathbf{n}}$ est la première composante de la représentation discrète d'un champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$ sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$

$$u_{i,j}^{\mathbf{n}} = u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) = \sum_{-n/2 \leq k'_1, k'_2 \leq n/2-1} \widehat{u}_{k'_1, k'_2}^{\mathbf{n}} e^{i(k'_1 x_i + k'_2 y_{j-\frac{1}{2}})} \quad (2.5.22)$$

donc

$$\widehat{\mathcal{R}_{\alpha}^{\text{BDJ}} u^{\mathbf{n}}}_{k_1, k_2} = \frac{4}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n/2} \left(\sum_{-n/2 \leq k'_1, k'_2 \leq n/2-1} \widehat{u}_{k'_1, k'_2}^{\mathbf{n}} e^{i((k'_1 - k_1)x_{2i} + (k'_2 - k_2)y_{2j-1})} C_{k'_1, k'_2}^{r, \alpha} \right) \quad (2.5.23)$$

où

$$C_{k'_1, k'_2}^{r, \alpha} = \frac{1}{2(3 + \alpha)} \left(e^{i(-k'_1 \ell + k'_2 h/2)} + e^{i(-k'_1 \ell - k'_2 h/2)} + e^{3ik'_2 h/2} + \alpha e^{ik'_2 h/2} \right. \\ \left. + \alpha e^{-ik'_2 h/2} + e^{-3ik'_2 h/2} + e^{i(k'_1 \ell + k'_2 h/2)} + e^{i(k'_1 \ell - k'_2 h/2)} \right). \quad (2.5.24)$$

Cette expression se réécrit

$$C_{k'_1, k'_2}^{r, \alpha} = \frac{1}{(3 + \alpha)} \left(\cos(k'_1 \ell - k'_2 h/2) + \cos(k'_1 \ell + k'_2 h/2) \right. \\ \left. + \cos(3k'_2 h/2) + \alpha \cos(k'_2 h/2) \right), \quad (2.5.25)$$

puis :

$$C_{k'_1, k'_2}^{r, \alpha} = \frac{1}{(3 + \alpha)} \cos(k'_2 h/2) \left(2 \cos(k'_1 \ell) + 4(\cos(k'_2 h/2))^2 - 3 + \alpha \right). \quad (2.5.26)$$

Dans l'expression (2.5.23), on échange l'ordre de la somme portant sur i et j avec celle portant sur k'_1 et k'_2 , cette expression prend la forme suivante

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha}^{\text{BDJ}} u_{k_1, k_2}^{\mathbf{n}} = \frac{4}{n^2} \sum_{-n/2 \leq k'_1, k'_2 \leq n/2 - 1} \widehat{u}_{k'_1, k'_2}^{\mathbf{n}} C_{k'_1, k'_2}^{r, \alpha} \sigma_{k'_1, k_1, k'_2, k_2} \quad (2.5.27)$$

où

$$\sigma_{k'_1, k_1, k'_2, k_2} = \sum_{1 \leq i, j \leq n/2} e^{i((k'_1 - k_1)x_{2i} + (k'_2 - k_2)y_{2j-1})}. \quad (2.5.28)$$

On peut écrire σ sous la forme

$$\sigma_{k'_1, k_1, k'_2, k_2} = \sigma_{k'_1, k_1}^x \sigma_{k'_2, k_2}^y \quad (2.5.29)$$

avec

$$\sigma_{k', k}^x = \sum_{1 \leq i \leq n/2} e^{i(k' - k)x_{2i}} \quad (2.5.30)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{k', k}^y &= \sum_{1 \leq j \leq n/2} e^{i(k' - k)y_{2j-1}} \\ &= s(k', k) \sum_{1 \leq j \leq n/2} e^{i(k' - k)y_{2j}}, \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

où

$$s(k', k) = e^{-i(k' - k)h} \quad (2.5.32)$$

Comme $-n/2 \leq k' \leq n/2 - 1$ et $-n/4 \leq k \leq n/4 - 1$, on montre facilement les égalités suivantes

$$\sigma_{k', k}^x = \begin{cases} n/2 & \text{si } k' = k \text{ ou } t(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.33)$$

et

$$\sigma_{k', k}^y = \begin{cases} s(k', k)n/2 & \text{si } k' = k \text{ ou } t(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.34)$$

ainsi que

$$s(k, k) = 1 \text{ et } s(t(k), k) = -1. \quad (2.5.35)$$

On a donc

$$\sigma_{k'_1, k_1, k'_2, k_2} = \begin{cases} n^2/4 & \text{si } (k'_1 = k_1 \text{ ou } t(k_1)) \text{ et } k'_2 = k_2 \\ -n^2/4 & \text{si } (k'_1 = k_1 \text{ ou } t(k_1)) \text{ et } k'_2 = t(k_2) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5.36)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_{\alpha}^{\text{BDJ}} u_{k_1, k_2}^{\mathbf{n}} &= C_{k_1 k_2}^{r, \alpha} \widehat{u}_{k_1, k_2}^{\mathbf{n}} + C_{t(k_1) k_2}^{r, \alpha} \widehat{u}_{t(k_1), k_2}^{\mathbf{n}} \\ &\quad - C_{k_1 t(k_2)}^{r, \alpha} \widehat{u}_{k_1, t(k_2)}^{\mathbf{n}} - C_{t(k_1) t(k_2)}^{r, \alpha} \widehat{u}_{t(k_1), t(k_2)}^{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (2.5.37)$$

□

Proposition 2.5.6. *La restriction $\mathcal{R}_{\alpha}^{\text{BDJ}}$ conserve la moyenne si et seulement si $\alpha = 1$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a :

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha}^{\text{BDJ}} u_{0,0}^{\mathbf{n}} = C_{00}^{r, \alpha} \widehat{u}_{0,0}^{\mathbf{n}} + C_{-n/2,0}^{r, \alpha} \widehat{u}_{-n/2,0}^{\mathbf{n}} + C_{0,-n/2}^{r, \alpha} \widehat{u}_{0,-n/2}^{\mathbf{n}} + C_{-n/2,-n/2}^{r, \alpha} \widehat{u}_{-n/2,-n/2}^{\mathbf{n}} \quad (2.5.38)$$

Le calcul de chaque coefficient implique

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\alpha}^{\text{BDJ}} u_{0,0}^{\mathbf{n}} = \widehat{u}_{0,0}^{\mathbf{n}} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 3} \widehat{u}_{-n/2,0}^{\mathbf{n}}. \quad (2.5.39)$$

Donc l'opérateur de restriction $\mathcal{R}_{\alpha}^{\text{BDJ}}$ conserve la moyenne si et seulement si $\alpha = 1$. □

2.5.3.2 Prolongement

Soit $u^{\mathbf{n}/2} = \{u_{i,j}^{\mathbf{n}/2}; 1 \leq i, j \leq n/2\}$ la première composante d'un champ de vitesse défini sur la grille $\mathcal{G}_{n/2}$. Pour k_1 et k_2 compris entre $-n/4$ et $n/4 - 1$, on définit les coefficients de Fourier de $u^{\mathbf{n}/2}$ par :

$$\widehat{u}_{k_1, k_2}^{\mathbf{n}/2} = \frac{4}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n/2} u_{i,j}^{\mathbf{n}/2} e^{-i(k_1 x_{2i} + k_2 y_{2j-1})}. \quad (2.5.40)$$

L'effet de l'opérateur de restriction $\mathcal{P}_{\lambda}^{\text{BDJ}}$ sur les coefficients de Fourier du champ de vitesse est détaillé dans la proposition suivante.

Proposition 2.5.7. EFFET DU PROLONGEMENT.

Soient k_1 et k_2 deux entiers compris entre $-n/2$ et $n/2 - 1$. Les coefficients de Fourier du champ de vitesse prolongé $\mathcal{P}_{\lambda}^{\text{BDJ}} u^{\mathbf{n}/2}$ s'exprime en fonction de ceux de $u^{\mathbf{n}/2}$ par la relation suivante

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\lambda}^{\text{BDJ}} u_{k_1, k_2}^{\mathbf{n}/2} = C_{k_1 k_2}^{p, \lambda} \widehat{u}_{t(k_1), t(k_2)}^{\mathbf{n}/2}, \quad (2.5.41)$$

avec

$$\begin{aligned}
 C_{k_1 k_2}^{p, \lambda} = & \frac{1}{8(1+2\lambda)} \left(\left((1+5\lambda) \cos(t(k_1)h) \cos((t(k_2) + k_2/2)h) \right. \right. \\
 & + 3 \left(\lambda \cos(3t(k_1)h) + (1-\lambda) \cos(t(k_1)h) \right) \cos((t(k_2) - k_2/2)h) \\
 & + 3\lambda \cos(t(k_1)h) \cos((3t(k_2) - k_2/2)h) \left. \right) s(k_1) \\
 & + (1+5\lambda) \cos((t(k_2) + k_2/2)h) \\
 & + \left((1+8\lambda) \cos(2t(k_1)h) + 2(1-4\lambda) \right) \cos((t(k_2) - k_2/2)h) \\
 & \left. + 3\lambda \cos((3t(k_2) - k_2/2)h) \right), \tag{2.5.42}
 \end{aligned}$$

où la fonction $t(k)$ est définie par

$$t(k) = \begin{cases} k + n/2 & \text{si } k \leq -n/4 - 1 \\ k - n/2 & \text{si } k \geq n/4 \\ k & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.5.43}$$

et la fonction $s(k)$ est définie par

$$s(k) = \begin{cases} +1 & \text{si } -n/4 \leq k \leq n/4 - 1 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{2.5.44}$$

Démonstration. Pour commencer, on rappelle la définition de la transformée de Fourier discrète pour un champ de vitesse défini sur la grille \mathcal{G}_n . Soient k_1 et k_2 deux entiers compris entre $-n/2$ et $n/2 - 1$ et i et j deux entiers compris entre 1 et n . Les coefficients de Fourier de u^n sont définis par

$$\widehat{u}_{k_1, k_2}^n = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_{i, j}^n e^{-i(k_1 x_i + k_2 y_{j-1/2})} \tag{2.5.45}$$

La formule inverse est donnée par

$$u_{i, j}^n = \sum_{-n/2 \leq k_1, k_2 \leq n/2 - 1} \widehat{u}_{k_1, k_2}^n e^{i(k_1 x_i + k_2 y_{j-1/2})} \tag{2.5.46}$$

Par définition de l'opérateur $\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}}$ on a :

$$\begin{aligned}
 \left(\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2} \right)_{2i, 2j} = & \left[(1+8\lambda) u_{i-1, j}^{n/2} + 2(1+5\lambda) u_{i, j+1}^{n/2} + 4(1-4\lambda) u_{i, j}^{n/2} \right. \\
 & \left. + 6\lambda u_{i, j-1}^{n/2} + (1+8\lambda) u_{i+1, j}^{n/2} \right] / 8(2\lambda + 1) \tag{2.5.47}
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.5.46) avec $n/2$ à la place de n , il vient

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i, 2j} &= \sum_{-\frac{n}{4} \leq k_1, k_2 \leq \frac{n}{4}-1} \widehat{u^{n/2}}_{k_1, k_2} \left[(1 + 8\lambda) e^{i(k_1(-2h) + k_2(-\frac{h}{2}))} \right. \\ &\quad + 2(1 + 5\lambda) e^{ik_2(\frac{3h}{2})} + 4(1 - 4\lambda) e^{ik_2(-\frac{h}{2})} + 6\lambda e^{ik_2(-\frac{5h}{2})} \\ &\quad \left. + (1 + 8\lambda) e^{i(k_1(2h) + k_2(-\frac{h}{2}))} \right] e^{i(k_1 x_{2i} + k_2 y_{2j-1/2})} / 8(2\lambda + 1) \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

Que l'on peut simplifier en

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i, 2j} &= \sum_{-n/4 \leq k_1, k_2 \leq n/4-1} \widehat{u^{n/2}}_{k_1, k_2} \left[(1 + 5\lambda) e^{ik_2(3h/2)} \right. \\ &\quad + \{(1 + 8\lambda) \cos(k_1(2h)) + 2(1 - 4\lambda)\} e^{ik_2(-h/2)} \\ &\quad \left. + 3\lambda e^{ik_2(-5h/2)} \right] e^{i(k_1 x_{2i} + k_2 y_{2j-1/2})} / 4(2\lambda + 1) \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

En utilisant la même méthode on trouve les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i-1, 2j} &= \sum_{-N/4 \leq k_1, k_2 \leq N/4-1} \widehat{u^{n/2}}_{k_1, k_2} \left[(1 + 5\lambda) \cos(k_1 h) e^{ik_2(3h/2)} \right. \\ &\quad + \{3\lambda \cos(k_1(3h)) + 3(1 - \lambda) \cos(k_1 h)\} e^{ik_2(-h/2)} \\ &\quad \left. + 3\lambda \cos(k_1 h) e^{ik_2(-5h/2)} \right] e^{i(k_1 x_{2i-1} + k_2 y_{2j-1/2})} / 4(2\lambda + 1) \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i, 2j-1} &= \sum_{-N/4 \leq k_1, k_2 \leq N/4-1} \widehat{u^{n/2}}_{k_1, k_2} \left[(1 + 5\lambda) e^{ik_2(-3h/2)} \right. \\ &\quad + \{(1 + 8\lambda) \cos(k_1(2h)) + 2(1 - 4\lambda)\} e^{ik_2(h/2)} \\ &\quad \left. + 3\lambda e^{ik_2(5h/2)} \right] e^{i(k_1 x_{2i} + k_2 y_{2j-3/2})} / 4(2\lambda + 1) \end{aligned} \quad (2.5.51)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i-1, 2j-1} &= \sum_{-N/4 \leq k_1, k_2 \leq N/4-1} \widehat{u^{n/2}}_{k_1, k_2} \left[(1 + 5\lambda) \cos(k_1 h) e^{ik_2(-3h/2)} \right. \\ &\quad + \{3\lambda \cos(k_1(3h)) + 3(1 - \lambda) \cos(k_1 h)\} e^{ik_2(h/2)} \\ &\quad \left. + 3\lambda \cos(k_1 h) e^{ik_2(5h/2)} \right] e^{i(k_1 x_{2i-1} + k_2 y_{2j-3/2})} / 4(2\lambda + 1) \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

On décompose la somme intervenant dans (2.5.45) en fonction de la parité de i et j . Il vient

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2}}_{k_1, k_2} &= \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i, j \leq N/2} \left((\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i, 2j} e^{-i(k_1 x_{2i} + k_2 y_{2j-1/2})} \right. \\ &\quad + (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i-1, 2j} e^{-i(k_1 x_{2i-1} + k_2 y_{2j-1/2})} \\ &\quad + (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i, 2j-1} e^{-i(k_1 x_{2i} + k_2 y_{2j-3/2})} \\ &\quad \left. + (\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}} u^{n/2})_{2i-1, 2j-1} e^{-i(k_1 x_{2i-1} + k_2 y_{2j-3/2})} \right) \end{aligned} \quad (2.5.53)$$

Il suffit maintenant de combiner (2.5.53) avec (2.5.49), (2.5.50), (2.5.51) et (2.5.52), pour obtenir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_\lambda^{\widehat{\text{BDJ}}} u^{\mathbf{n}/2}_{k_1, k_2} &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq \frac{n}{2} - \frac{n}{4} \leq k'_1, k'_2 \leq \frac{n}{4} - 1} \widehat{u^{\mathbf{n}/2}}_{k'_1, k'_2} \left[(1 + 5\lambda) e^{ik'_2(3h/2)} \right. \\
 &\quad + \{(1 + 8\lambda) \cos(k'_1(2h)) + 2(1 - 4\lambda)\} e^{ik'_2(-h/2)} \\
 &\quad \left. + 3\lambda e^{ik'_2(-5h/2)} \right] e^{i((k'_1 - k_1)x_{2i} + (k'_2 - k_2)y_{2j-1/2})} / 4(2\lambda + 1) \\
 &+ \widehat{u^{\mathbf{n}/2}}_{k'_1, k'_2} \left[(1 + 5\lambda) \cos(k'_1 h) e^{ik'_2(3h/2)} \right. \\
 &\quad + \{3\lambda \cos(k'_1(3h)) + 3(1 - \lambda) \cos(k'_1 h)\} e^{ik'_2(-h/2)} \\
 &\quad \left. + 3\lambda \cos(k'_1 h) e^{ik'_2(-5h/2)} \right] e^{i((k'_1 - k_1)x_{2i-1} + (k'_2 - k_2)y_{2j-1/2})} / 4(2\lambda + 1) \quad (2.5.54) \\
 &+ \widehat{u^{\mathbf{n}/2}}_{k'_1, k'_2} \left[(1 + 5\lambda) e^{ik'_2(-3h/2)} \right. \\
 &\quad + \{(1 + 8\lambda) \cos(k'_1(2h)) + 2(1 - 4\lambda)\} e^{ik'_2(h/2)} \\
 &\quad \left. + 3\lambda e^{ik'_2(5h/2)} \right] e^{i((k'_1 - k_1)x_{2i} + (k'_2 - k_2)y_{2j-3/2})} / 4(2\lambda + 1) \\
 &+ \widehat{u^{\mathbf{n}/2}}_{k'_1, k'_2} \left[(1 + 5\lambda) \cos(k'_1 h) e^{ik'_2(-3h/2)} \right. \\
 &\quad + \{3\lambda \cos(k'_1(3h)) + 3(1 - \lambda) \cos(k'_1 h)\} e^{ik'_2(h/2)} \\
 &\quad \left. + 3\lambda \cos(k'_1 h) e^{ik'_2(5h/2)} \right] e^{i((k'_1 - k_1)x_{2i-1} + (k'_2 - k_2)y_{2j-3/2})} / 4(2\lambda + 1)
 \end{aligned}$$

On remarque que les termes correspondant aux indices (k'_1, k'_2) tels que $k'_1 \neq t(k_1)$ ou $k'_2 \neq t(k_2)$ sont nuls. Après avoir appliqué ces simplifications, la somme portant sur les indices k'_1 et k'_2 disparaît, on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_\lambda^{\widehat{\text{BDJ}}} u^{\mathbf{n}/2}_{k_1, k_2} &= \widehat{u^{\mathbf{n}/2}}_{t(k_1), t(k_2)} \left(\sigma_1^x \sigma_1^y \overline{\beta(k_1, k_2)} + \sigma_2^x \sigma_1^y \overline{\alpha(k_1, k_2)} \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_1^x \sigma_2^y \beta(k_1, k_2) + \sigma_2^x \sigma_2^y \alpha(k_1, k_2) \right) / 4(2\lambda + 1)n^2 \quad (2.5.55)
 \end{aligned}$$

où on a posé

$$\sigma_1^x = \sum_{1 \leq i \leq n/2} e^{i(t(k_1) - k_1)x_{2i}}, \quad (2.5.56)$$

$$\sigma_2^x = \sum_{1 \leq i \leq n/2} e^{i(t(k_1) - k_1)x_{2i-1}}, \quad (2.5.57)$$

$$\sigma_1^y = \sum_{1 \leq j \leq n/2} e^{i(t(k_2) - k_2)y_{2j-1/2}}, \quad (2.5.58)$$

$$\sigma_2^y = \sum_{1 \leq j \leq n/2} e^{i(t(k_2) - k_2)y_{2j-3/2}}, \quad (2.5.59)$$

$$\begin{aligned}\alpha(k_1, k_2) &= (1 + 5\lambda) \cos(t(k_1)h) e^{it(k_2)(-3h/2)} \\ &\quad + \{3\lambda \cos(t(k_1)(3h)) + 3(1 - \lambda) \cos(t(k_1)h)\} e^{it(k_2)(h/2)} \\ &\quad + 3\lambda \cos(t(k_1)h) e^{it(k_2)(5h/2)}\end{aligned}\quad (2.5.60)$$

et

$$\begin{aligned}\beta(k_1, k_2) &= (1 + 5\lambda) e^{it(k_2)(-3h/2)} \\ &\quad + \{(1 + 8\lambda) \cos(t(k_1)(2h)) + 2(1 - 4\lambda)\} e^{it(k_2)(h/2)} + 3\lambda e^{it(k_2)(5h/2)}.\end{aligned}\quad (2.5.61)$$

Ensuite, on montre simplement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_1^x &= \frac{n}{2}, \\ \sigma_2^x &= \frac{n}{2} e^{i(t(k_1)-k_1)(-h)}, \\ \sigma_1^y &= \frac{n}{2} e^{i(t(k_2)-k_2)(-h/2)}, \\ \sigma_2^y &= \frac{n}{2} e^{i(t(k_2)-k_2)(-3h/2)} = \frac{n}{2} e^{i(t(k_2)-k_2)(h/2)},\end{aligned}\quad (2.5.62)$$

car $(t(k) - k)$ est toujours multiple de $n/2$. D'où :

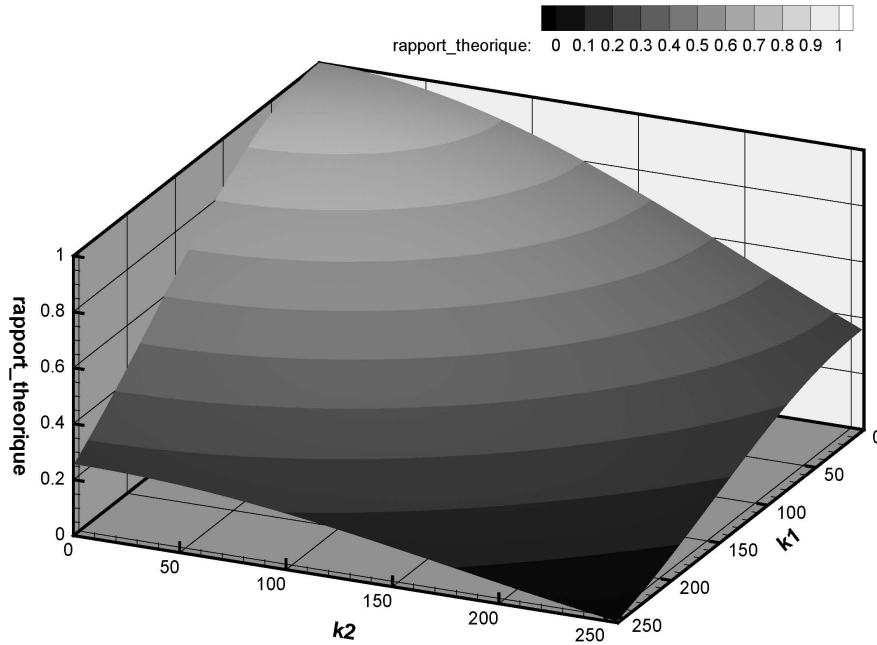
$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\lambda^{\widehat{\text{BDJ}} u^{n/2}}_{k_1, k_2} &= \frac{1}{16(2\lambda + 1)} \widehat{u^{n/2}}_{t(k_1), t(k_2)} \left(\begin{aligned} &e^{i(t(k_2)-k_2)(-h/2)} \overline{\beta(k_1, k_2)} \\ &e^{i((t(k_1)-k_1)(-h) + (t(k_2)-k_2)(-h/2))} \overline{\alpha(k_1, k_2)} \\ &e^{i(t(k_2)-k_2)(h/2)} \beta(k_1, k_2) \\ &e^{i((t(k_1)-k_1)(-h) + (t(k_2)-k_2)(h/2))} \alpha(k_1, k_2) \end{aligned} \right)\end{aligned}\quad (2.5.63)$$

On note $\Re(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z , il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\lambda^{\widehat{\text{BDJ}} u^{n/2}}_{k_1, k_2} &= \frac{1}{16(2\lambda + 1)} \widehat{u^{n/2}}_{t(k_1), t(k_2)} \left(\begin{aligned} &2\Re\left(\beta(k_1, k_2) e^{i(t(k_2)-k_2)(h/2)}\right) \\ &+ 2\Re\left(\alpha(k_1, k_2) e^{i(t(k_2)-k_2)(h/2)}\right) e^{i(t(k_1)-k_1)(-h)} \end{aligned} \right)\end{aligned}\quad (2.5.64)$$

On obtient la formule recherchée en posant $s(k) = e^{i(t(k)-k)(-h)}$. \square

La Figure 2.10 représente le coefficient $C_{k_1 k_2}^{p, 0}$ pour k_1 et k_2 compris entre 0 et $n/4 - 1$. On constate que le prolongement conserve les basses fréquences. De plus, pour $\lambda = 0$, la formule du prolongement est plus compacte.


 FIGURE 2.10 – Effet du prolongement sur les coefficients de Fourier ($N=1024$).

2.5.3.3 Illustration de la séparation des échelles sur un champ analytique.

Nous proposons d'appliquer la séparation des échelles (dans l'espace physique) à un champ de vitesse \mathbf{u} représentant un tourbillon. Les lignes de niveau de la vorticité des grandes échelles \mathbf{y} sont représentées sur la Figure 2.11 lorsque les opérateurs d'interpolation utilisés dans la décomposition sont \mathcal{R}^{ZW} et \mathcal{P}^{ZW} , sur la Figure 2.12 pour \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{P}^{TR} et sur la Figure 2.13 pour \mathcal{R}^{BDJ} et \mathcal{P}^{BDJ} . Les lignes de niveau de la vorticité du champ de vitesse \mathbf{u} de référence sont des cercles concentriques tracés en noir, celles des grandes échelles sont tracées en gris. Pour la décomposition qui utilise les opérateurs \mathcal{R}^{ZW} et \mathcal{P}^{ZW} et celle qui utilise les opérateurs \mathcal{R}^{BDJ} et \mathcal{P}^{BDJ} , les lignes de niveaux sont très proches des lignes de niveau de référence. Pour les opérateurs \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{P}^{TR} , le résultat est surprenant, les lignes de niveau ne ressemblent pas à des cercles. On compare le spectre d'énergie de la vitesse de référence \mathbf{u} et celui des grandes échelles. On remarque sur la Figure 2.14 que le spectre des grandes échelles pour les opérateurs \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{P}^{TR} est proche de celui de la vitesse de référence, la séparation des échelles n'est pas nette.

2.5.3.4 Illustration de la séparation des échelles sur un écoulement issu d'une simulation.

Nous avons choisi d'appliquer la séparation des échelles à un champ de vitesse obtenu en résolvant les équations de Navier-Stokes avec conditions aux limites périodiques. On s'intéresse à deux simulations : la première $n_\ell = n_h = n = 1024$ est trop grossière pour représenter toutes les échelles de l'écoulement, la deuxième $n_\ell = n_h = n = 2048$ est plus fine, elle permet une bien meilleure résolution de la turbulence. La vorticité du champ de vitesse et celle de

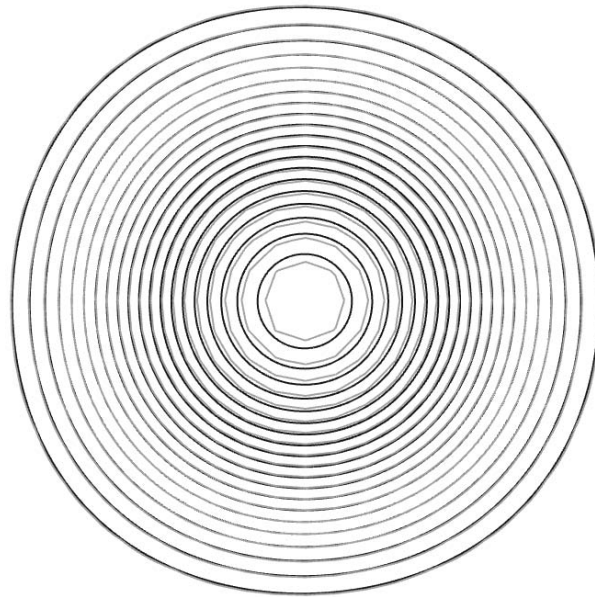


FIGURE 2.11 – Lignes de niveau de la vorticité : filtrage des grandes échelles avec les opérateurs \mathcal{R}^{ZW} et \mathcal{P}^{ZW} .

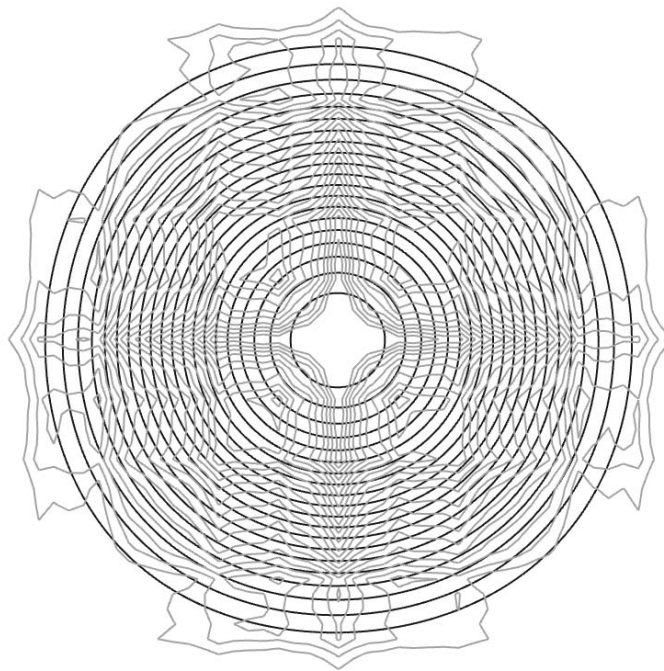


FIGURE 2.12 – Lignes de niveau de la vorticité : filtrage des grandes échelles avec les opérateurs \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{P}^{TR} .

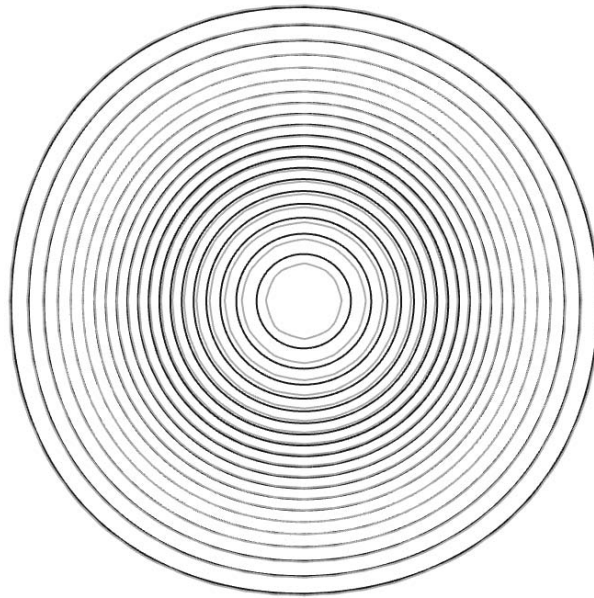


FIGURE 2.13 – Lignes de niveau de la vorticité : filtrage des grandes échelles avec les opérateurs \mathcal{R}^{BDJ} et \mathcal{P}^{BDJ}

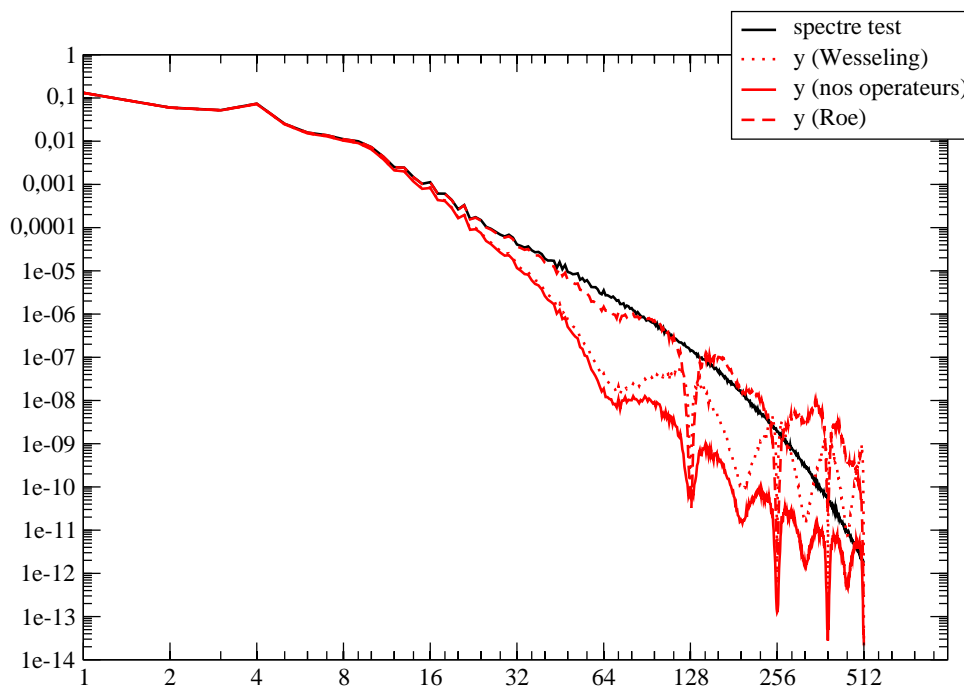


FIGURE 2.14 – Comparaison des spectres d'énergie. En trait plein noir, celui du champ de vitesse de référence, en pointillés rouges celui des grandes échelles pour les opérateurs \mathcal{R}^{ZW} et \mathcal{P}^{ZW} , en tirets rouges celui des grandes échelles pour les opérateurs \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{P}^{TR} et en trait plein rouge celui des grandes échelles pour les opérateurs \mathcal{R}^{BDJ} et \mathcal{P}^{BDJ} .

ces grandes (resp. petites) échelles est représentée sur la Figure 2.15. On trouve également une comparaison des fonctions spectre d'énergie sur la Figure 2.16. Les opérateurs séparent efficacement les échelles de l'écoulement.

2.6 Méthodes multiniveaux

2.6.1 Décomposition de la vitesse

Soient n_ℓ et n_h les entiers correspondant aux nombres de points du maillage respectivement dans la direction horizontale et verticale, on pose $\mathbf{n} = (n_\ell, n_h)$. On considère un champ de vitesse $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$, à inconnues décalées, défini sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$ (voir Section 2.2). On souhaite construire une décomposition de la vitesse en plusieurs niveaux d'échelles. Pour cela, on définit, à partir des opérateurs de restriction et de prolongement, des nouveaux opérateurs qui « filtrent » les échelles de la vitesse.

Définition 2.6.1. Soient \mathcal{R} et \mathcal{P} respectivement opérateur de restriction et de prolongement sur grilles décalées, on pose :

$$\mathcal{F}^i = \mathcal{P}^{(i)} \circ \mathcal{R}^{(i)}, \quad (2.6.1)$$

avec

$$\mathcal{R}^{(i)} = \mathcal{R}^{\mathbf{n}/2^{i-1}} \circ \dots \circ \mathcal{R}^{\mathbf{n}/2} \circ \mathcal{R}^{\mathbf{n}}, \quad (2.6.2)$$

et

$$\mathcal{P}^{(i)} = \mathcal{P}^{\mathbf{n}} \circ \mathcal{P}^{\mathbf{n}/2} \circ \dots \circ \mathcal{P}^{\mathbf{n}/2^{i-1}}. \quad (2.6.3)$$

Par convention, \mathcal{F}^0 désigne l'application identité, notée \mathcal{I} .

Remarque 2.6.1. L'opérateur \mathcal{F}^i agit sur les champs de vitesse, à inconnues décalées, définis sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^i &: \mathcal{G}_{\mathbf{n}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}^{\mathbf{n}} &\mapsto \mathcal{F}^i \mathbf{u}^{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Il consiste à calculer successivement la restriction du champ de vitesse sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}/2^i}$ et le prolongement du champ de vitesse restreint sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbf{n}} &\rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{n}/2^i} &\rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}^{\mathbf{n}} &\mapsto \mathcal{R}^{(i)} \mathbf{u}^{\mathbf{n}} &\mapsto \mathcal{P}^{(i)} \circ \mathcal{R}^{(i)} \mathbf{u}^{\mathbf{n}} = \mathcal{F}^i \mathbf{u}^{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

La Figure 2.17 illustre les étapes de « filtrage » du champ de vitesse. Connaissant le champ de vitesse $\mathbf{u}^{\mathbf{n}}$, on voit que le nombre d'opérations nécessaires au calcul du champ filtré $\mathcal{F}^i \mathbf{u}^{\mathbf{n}}$ augmente avec i . Nous proposons d'évaluer cette complexité. On suppose que le nombre d'opérations nécessaires au calcul d'une valeur $(\mathcal{R}\mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{i,j}$ (respectivement $(\mathcal{P}\mathbf{u}^{\mathbf{n}})_{i,j}$), est identique pour tout i et j , on note $n_{\mathcal{R}}$ (respectivement $n_{\mathcal{P}}$) ce nombre d'opérations. Le

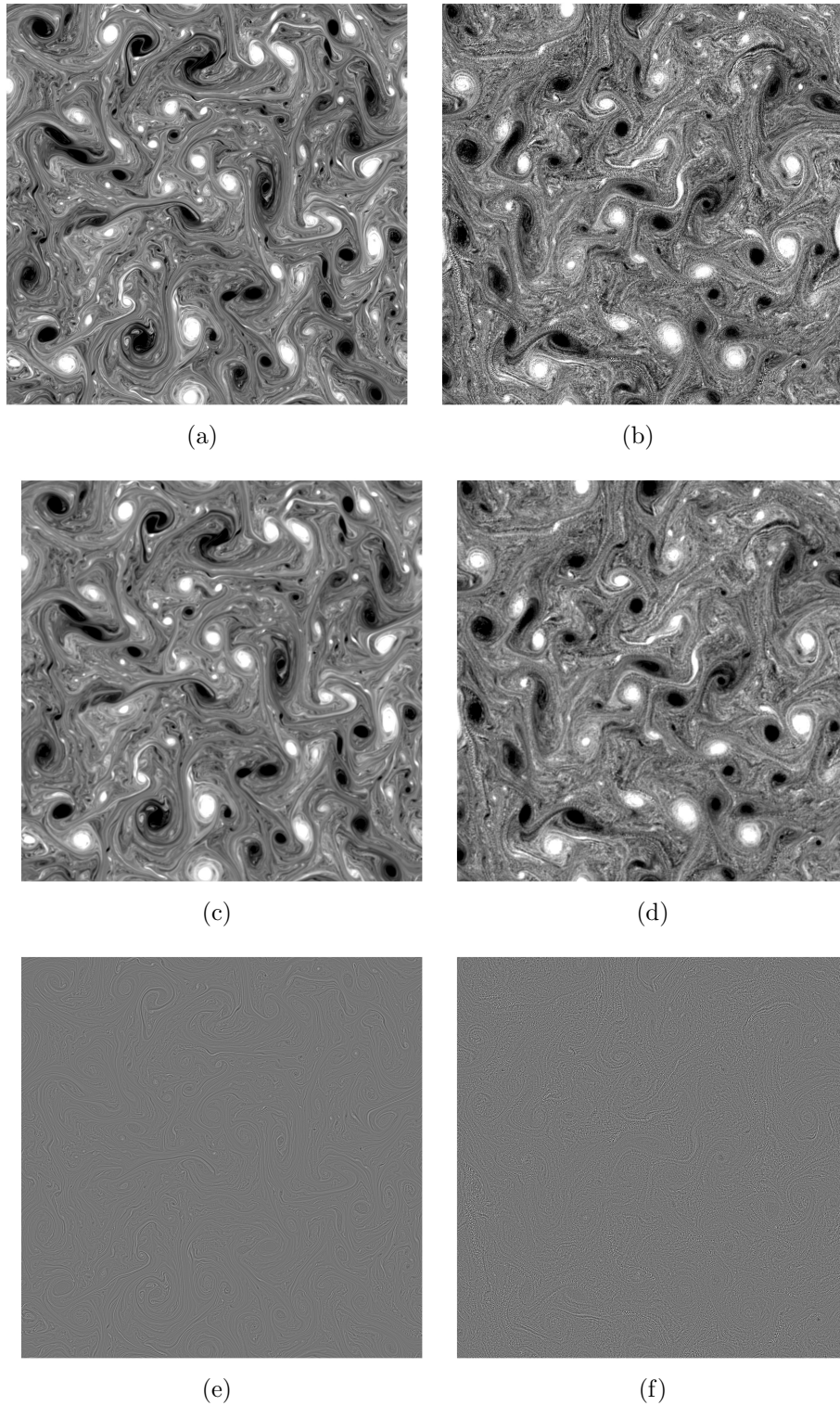
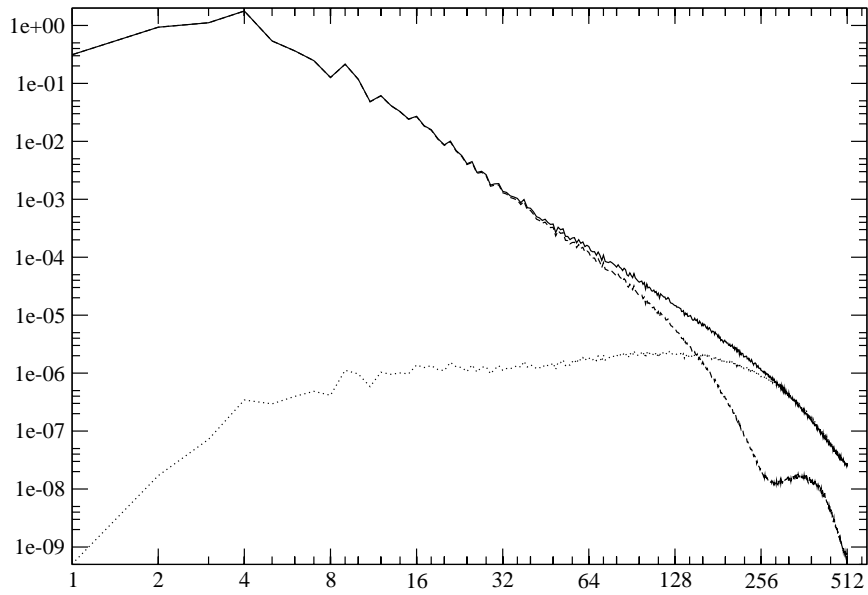
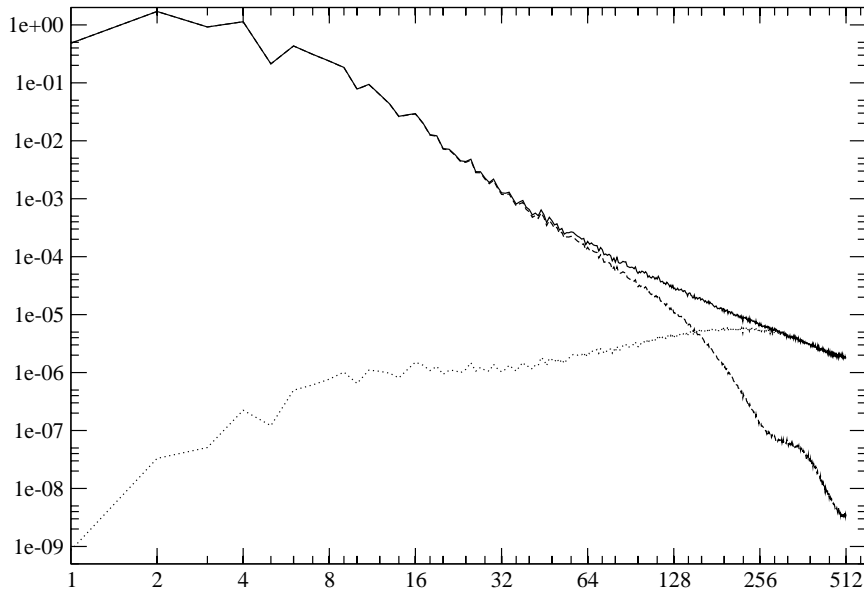


FIGURE 2.15 – La colonne de gauche (resp. droite) correspond à une simulation sur une grille à 2048^2 points (resp. 1024^2 points). En haut, (a) et (b), la vorticité du champ de vitesse, au milieu, (c) et (d), celle des grandes échelles et en bas, (e) et (f), celle des petites échelles.



(a)



(b)

FIGURE 2.16 – On a représenté le spectre d'énergie pour une simulation sur une grille à 2048^2 points (a), 1024^2 points (b). En trait plein celui de u^n , en pointillés celui de des petites échelles, en tirets celui des grandes échelles. La séparation des échelles est ici réalisée avec les opérateurs $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}}$ et $\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}}$.

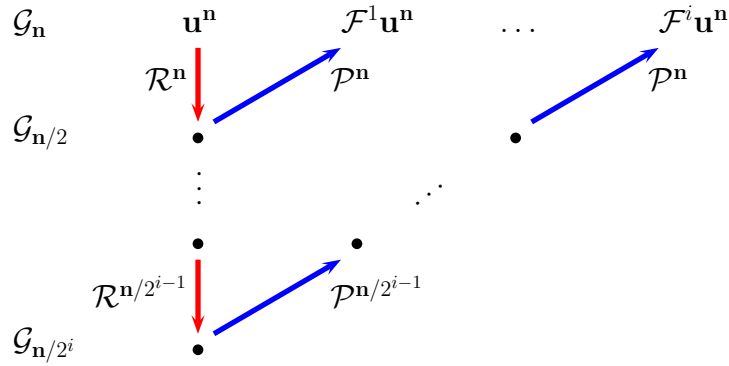


FIGURE 2.17 – « Filtrage » d'un champ de vitesse.

calcul du champ filtré $\mathcal{F}^{(i)} \mathbf{u}^n$ nécessite alors exactement

$$\frac{1}{3} n_\ell n_h (n_{\mathcal{R}} + n_{\mathcal{P}}) \left(1 - \frac{1}{4^i}\right) \quad (2.6.6)$$

opérations, ce nombre d'opérations reste donc majoré par

$$\frac{1}{3} n_\ell n_h (n_{\mathcal{R}} + n_{\mathcal{P}}). \quad (2.6.7)$$

On rappelle que la complexité de la résolution du schéma MAC (avec utilisation des transformées de Fourier) est de l'ordre de $n^2 \ln(n)$. Le résultat (2.6.7) montre donc que le champ de vitesse peut être filtré à chaque itération sans causer une augmentation significative du temps de calcul de la simulation.

Le champ de vitesse filtré $\mathcal{F}^i \mathbf{u}^n$ est défini sur la même grille que le champ de vitesse \mathbf{u}^n . On s'attend à ce que le champ de vitesse filtré contienne essentiellement les modes supportés par la grille $\mathcal{G}_{n/2^i}$ du champ de vitesse de départ, c'est-à-dire les modes $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ tels que

$$n_\ell / 2^{i+1} \leq k_1 \leq n_\ell / 2^{i+1} - 1$$

et

$$n_h / 2^{i+1} \leq k_2 \leq n_h / 2^{i+1} - 1.$$

La Figure 2.18 représente le spectre d'énergie du champ de vitesse \mathbf{u}^n et des champs filtrés $\mathcal{F}^i \mathbf{u}^n$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Ce procédé est original puisque toutes les opérations se déroulent dans l'espace physique.

On vient de voir dans la Remarque 2.6.1 comment les filtres \mathcal{F}^i servent à extraire les grandes échelles d'un champ de vitesse. On explique maintenant comment on peut définir plusieurs niveaux d'échelle.

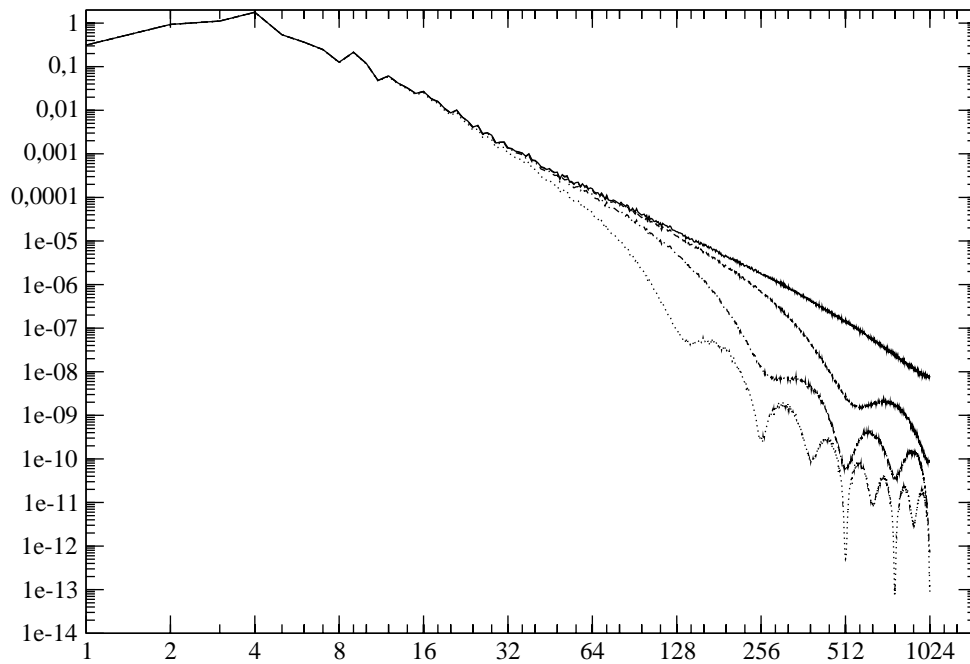


FIGURE 2.18 – « Filtrage » d'un champ de vitesse. Le spectre d'énergie d'un champ de vitesse défini sur une grille à 2048^2 points est représenté en trait plein, les spectres associés aux champs filtrés $\mathcal{F}^i u^n$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont tracés respectivement en tirets, en traits mixtes et en pointillés.

Définition 2.6.2. On définit le $i^{\text{ème}}$ niveau d'échelle du champ de vitesse \mathbf{u}^n par

$$\delta_{\mathcal{F}}^i \mathbf{u}^n = (\mathcal{F}^{i-1} - \mathcal{F}^i) \mathbf{u}^n \quad (2.6.8)$$

Soit n_{niv} le nombre de niveaux de grille que l'on souhaite considérer, on suppose que n_ℓ et n_h sont divisibles par $2^{n_{niv}}$. Grâce à la Définition 2.6.2, on peut décomposer le champ de vitesse \mathbf{u}^n sous la forme

$$\mathbf{u}^n = \left(\sum_{i=1}^{n_{niv}} \delta_{\mathcal{F}}^i \mathbf{u}^n \right) + \mathcal{F}^{n_{niv}} \mathbf{u}^n. \quad (2.6.9)$$

Dans (2.6.9), on a fait apparaître $(n_{niv} + 1)$ niveaux d'échelle de \mathbf{u}^n . Dans cette décomposition, le niveau

$$\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}^n = (\mathcal{I} - \mathcal{P} \circ \mathcal{R}) \mathbf{u}^n$$

représente les petites échelles de \mathbf{u}^n et le niveau

$$\mathcal{F}^{n_{niv}} \mathbf{u}^n = \mathcal{P}^{(n_{niv})} \circ \mathcal{R}^{(n_{niv})} \mathbf{u}^n$$

représente les grandes échelles de \mathbf{u}^n .

La Figure 2.19 représente le spectre d'énergie et l'énergie cinétique d'un champ de vitesse \mathbf{u}^n et des niveaux d'échelles intervenant dans la décomposition (2.6.9) pour $n_{niv} = 3$. On a illustré le cas où la turbulence est résolue ((a), (c)) et le cas contraire ((b), (d)).

Sur les Figures 2.19(a) et 2.19(b), on a représenté en trait plein le spectre d'énergie de \mathbf{u}^n , en tirets celui des grandes échelles $\mathcal{F}^3 \mathbf{u}^n$, en traits mixtes celui des échelles intermédiaires $\delta_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{u}^n$ et $\delta_{\mathcal{F}}^3 \mathbf{u}^n$ et en pointillés celui des petites échelles $\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}^n$. Sur les Figures 2.19(c) et 2.19(d), on a représenté l'énergie cinétique de chaque niveau d'échelle. À gauche, l'énergie des grandes échelles, au milieu celle des échelles intermédiaires et à droite celle des petites échelles.

Ces données sont issues de simulations à $Re = 500000$, au temps $t = 10$. On a utilisé un champ de vitesse obtenu sur une grille à 1024^2 points (sous-résolu) et un champ de vitesse obtenu sur une grille à 2048^2 points (quasiment résolu), que l'on a restreint sur la grille 1024^2 .

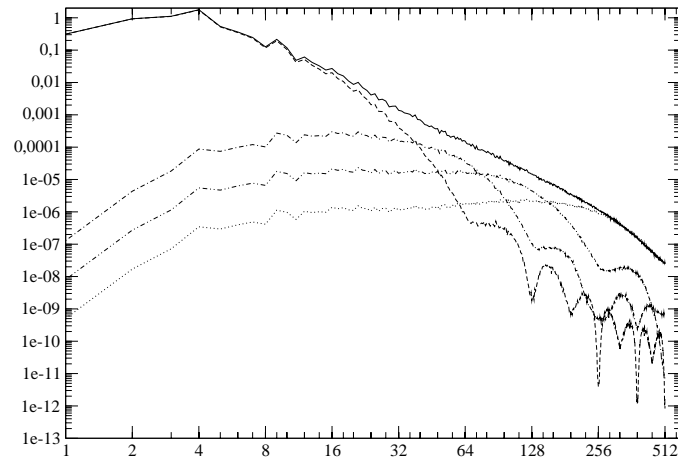
Il existe vraisemblablement une hiérarchie entre les niveaux d'échelles qui interviennent dans la décomposition (2.6.9). En effet, ils se distinguent par leur répartition dans l'espace spectral et par la quantité d'énergie cinétique qu'ils possèdent.

– **Si la turbulence est résolue.**

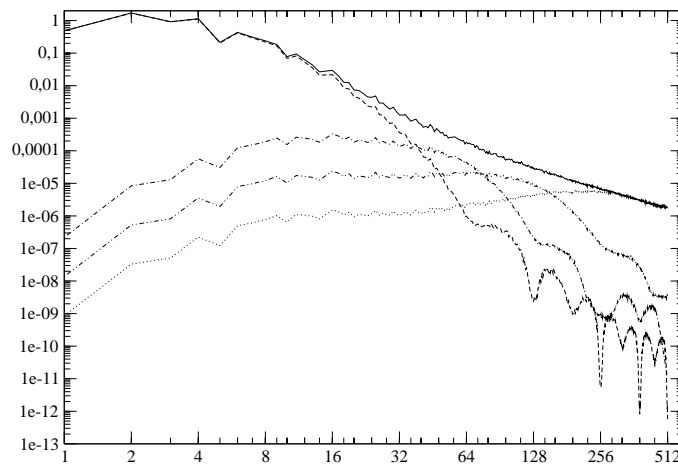
Le maillage est suffisamment fin pour représenter toutes les échelles de la turbulence. On remarque d'ailleurs (voir Figure 2.19(a)) que le spectre de la vitesse se termine par une zone dissipative ($k > k_d \approx 256$).

La composante des grandes échelles $\mathcal{F}^{n_{niv}} \mathbf{u}^n$ est principalement constituée de faibles nombres d'onde ($k < 64$). Pour ces nombres d'onde, le spectre d'énergie est proche de celui de \mathbf{u}^n . En conséquence (voir Figure 2.19(c)), cette composante renferme une grande partie de l'énergie cinétique présente à l'origine dans \mathbf{u}^n .

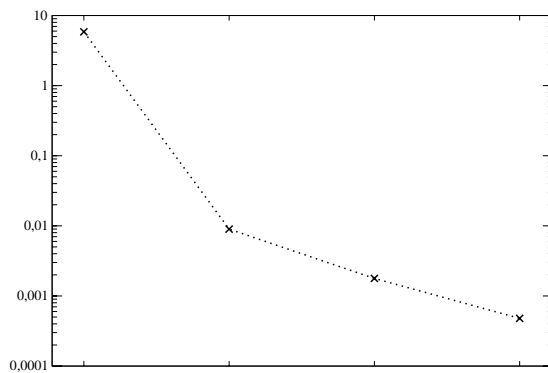
Au contraire, la composante des petites échelles $\delta^1 \mathbf{u}^n$ est principalement constituée de nombres d'onde élevés ($k > 64$). Pour ces nombres d'onde, le spectre d'énergie est proche de celui de \mathbf{u}^n . En conséquence (voir Figure 2.19(c)), cette composante renferme une faible partie de l'énergie cinétique présente à l'origine dans \mathbf{u}^n .



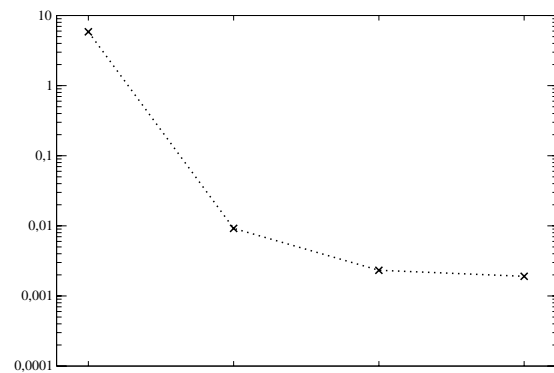
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 2.19 – Décomposition des échelles de deux champs de vitesse : (a)-(c) la turbulence est résolue, (b)-(d) la turbulence n'est pas résolue. On a représenté pour chaque niveau d'échelle ($n_{niv} = 3$), (a)-(b) le spectre d'énergie et (c)-(d) l'énergie cinétique.

De plus (voir Figure 2.19(c)), on observe que l'énergie cinétique des différents niveaux d'échelle est ordonné. Plus précisément, les niveaux d'énergie vérifient une relation du type

$$\frac{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}^n)}{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{u}^n)} \approx \frac{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{u}^n)}{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^3 \mathbf{u}^n)}. \quad (2.6.10)$$

- **Si la turbulence n'est pas résolue.** Le maillage n'est pas assez fin pour représenter toutes les échelles de la turbulence. On remarque (voir Figure 2.19(b)) que le spectre d'énergie ne présente pas de zone dissipative. Il y a au contraire une accumulation de l'énergie sur les modes élevés ($k > 256$). Cette accumulation entraîne (voir Figure 2.19(d)) une répartition anormale de l'énergie cinétique entre les niveaux d'échelles : on n'a pas la hiérarchie observée dans le cas où la turbulence est résolue.

2.6.2 Coefficients de correction locaux.

Nous présentons dans cette section la construction des coefficients de correction locaux que nous utilisons pour corrigé la composante des petites échelles de la vitesse. Nous nous sommes inspirés des travaux [11], effectués dans le cadre spectral.

Estimation de l'énergie des petites échelles : on a observé que lorsque le maillage est trop grossier pour permettre la résolution de toutes les échelles de la turbulence, la composante des petites échelles possède une énergie trop importante. A partir de ce constat, notre idée est de corriger la composante des petites échelles de \mathbf{u}^n , soit $\delta^1 \mathbf{u}^n$, par un coefficient de correction local multiplicatif, afin de réguler l'énergie de cette composante. Ce traitement des petites échelles est appliqué de façon dynamique en temps. On espère ainsi conserver une décroissance du spectre d'énergie correcte pendant toute la simulation et donc obtenir sur maillage grossier une simulation numérique proche d'une simulation obtenue sur grille fine.

La loi de Kraichnan prédit que, dans la zone inertielle, le spectre d'énergie décroît en k^{-3} . On suppose que $n_\ell = n_h = n$ et que les niveaux d'échelle $\delta^i \mathbf{u}^n$ se situent dans la zone inertielle du spectre d'énergie de \mathbf{u}^n , pour $i \in \{1, 2, 3\}$. On peut alors écrire formellement que l'énergie cinétique du $i^{\text{ème}}$ niveau d'échelle vérifie

$$E_c(\delta_{\mathcal{F}}^i \mathbf{u}^n) = \int_{n/2^{i+1}}^{n/2^i} C k^{-3} dk. \quad (2.6.11)$$

D'où

$$E_c(\delta_{\mathcal{F}}^i \mathbf{u}^n) = \left(\frac{3}{2} \frac{C}{n^2} \right) 4^i. \quad (2.6.12)$$

On en déduit que l'énergie des petites échelles respecte

$$\frac{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}^n)}{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{u}^n)} = \frac{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{u}^n)}{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^3 \mathbf{u}^n)}. \quad (2.6.13)$$

Ce résultat reste vrai, plus généralement, lorsque le spectre d'énergie est de la forme

$$E(k) = Ck^\alpha,$$

avec α un paramètre réel quelconque. La relation entre les niveaux d'énergie (2.6.13) est en accord avec les observations de la Section 2.6.1.

Lorsque le maillage est trop grossier pour représenter toutes les échelles de la turbulence, on a vu que la composante des petites échelles ne satisfait pas la relation (2.6.13). Pour ramener la composante des petites échelles à un niveau d'énergie satisfaisant, on a d'abord pensé à lui appliquer le coefficient multiplicateur suivant

$$c_{cor} = \frac{1}{\sqrt{r(u^n)}}. \quad (2.6.14)$$

où

$$r(u^n) = \frac{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^3 u^n) E_c(\delta_{\mathcal{F}}^1 u^n)}{E_c(\delta_{\mathcal{F}}^2 u^n)^2}. \quad (2.6.15)$$

Cependant, on sait que l'accumulation de l'énergie sur les petites échelles est très variable selon le point de l'espace. Elle est quasi inexistente là où l'écoulement est laminaire, et très présente lorsque deux tourbillons se rencontrent, ou bien dans la zone de décollement de la couche limite

On a donc choisi d'appliquer une correction de la vitesse qui dépend de sa localisation. Pour cela, on introduit la notion d'énergie cinétique locale pour un champ de vitesse défini sur grilles décalées.

Définition 2.6.3. ÉNERGIE CINÉTIQUE LOCALE.

Soit d un entier qui divise n_ℓ et n_h . Pour p et q entre 1 et d , on définit l'énergie locale d'un champ \mathbf{u}^n de \mathcal{G}_n par :

$$E_{pq}(\mathbf{u}^n) = \frac{\ell h}{2} \left(\sum_{j=n_h(q-1)/d+1}^{n_h q/d} \sum_{i=n_\ell(p-1)/d}^{n_\ell p/d} a_i^{n_\ell/d} (u_{ij}^n)^2 + \sum_{i=n_\ell(p-1)/d+1}^{n_\ell p/d} \sum_{j=n_h(q-1)/d}^{n_h q/d} a_j^{n_h/d} (v_{ij}^n)^2 \right), \quad (2.6.16)$$

où

$$a_m^k = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k \text{ divise } m, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6.17)$$

Remarque 2.6.2. On remarque que lorsque d est égal à 1, la quantité E_{11} est l'énergie cinétique totale de l'écoulement. Dans le cadre de l'algorithme multi-niveaux, le paramètre d est égal au nombre de points de la grille la plus grossière, c'est-à-dire $d = n/2^{n_{niv}}$.

La Définition 2.6.3 permet de comparer localement l'énergie cinétique des différentes échelles de l'écoulement.

Définition 2.6.4. COEFFICIENTS DE CORRECTION LOCAUX.

Soit c_{min} un paramètre réel appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Soient p et q entre 1 et d , on définit les coefficients locaux suivants :

$$\bar{c}_{pq} = \frac{E_{pq}(\delta_{\mathcal{F}}^2 \mathbf{u}^n)}{\sqrt{E_{pq}^d(\delta_{\mathcal{F}}^3 \mathbf{u}^n) E_{pq}^d(\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}^n)}}. \quad (2.6.18)$$

Remarque 2.6.3. Afin de contrôler les coefficients de correction, on va appliquer la transformation suivante

$$c_{pq} = (\bar{c}_{pq} - m) \left(\frac{1 - c_{min}}{M - m} \right) + c_{min}, \quad (2.6.19)$$

où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de $\{ \bar{c}_{pq}; 1 \leq p, q \leq d \}$. Ainsi, les coefficients c_{pq} sont compris entre c_{min} et 1.

Enfin, pour que la correction soit la plus localisée possible, on interpole les d^2 coefficients $(c_{pq})_{1 \leq p, q \leq d}$ pour obtenir n^2 coefficients $(c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On utilise pour cela un opérateur d'interpolation linéaire d'ordre deux.

2.6.3 Description de l'algorithme

L'algorithme multi-niveaux est inséré entre le calcul de la vitesse intermédiaire et la phase de projection sur l'espace à divergence nulle.

On commence par séparer les échelles de la vitesse à l'aide des opérateurs d'interpolation

$$u^n = \left(\sum_{i=1}^{n_{niv}} \delta_{\mathcal{F}}^i u^n \right) + \mathcal{F}^{n_{niv}} u^n. \quad (2.6.20)$$

On calcule ensuite le rapport $r(u^n)$, rapport entre les énergie cinétiques totales des niveaux d'échelles (voir (2.6.15)).

Si ce rapport est inférieur à un paramètre r_{max} donné, alors on ne fait rien. Dans le cas contraire, on applique un traitement spécifique des petites échelles. L'algorithme de correction des petites échelles se décompose en six étapes :

1. on calcule l'énergie cinétique locale de chaque niveau d'échelle $E_{pq}(\delta_{\mathcal{F}}^i u^n)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, par la formule (2.6.16)
2. on en déduit les coefficients de correction locaux \bar{c}_{pq} par la relation (2.6.18)
3. on calcule à partir des coefficients \bar{c}_{pq} , les coefficients c_{pq} qui vérifient $c_{min} \leq c_{pq} \leq 1$
4. les d^2 coefficients c_{pq} sont interpolés pour en obtenir n^2 , ceci dans le but d'appliquer une correction plus localisée.
5. on modifie la vitesse intermédiaire en appliquant la correction suivante

$$\begin{cases} u_{ij} \leftarrow u_{ij} + (c_{ij} - 1) (\delta_{\mathcal{F}}^1 u)_{ij} \\ v_{ij} \leftarrow v_{ij} + (c_{ij} - 1) (\delta_{\mathcal{F}}^1 v)_{ij} \end{cases} \quad (2.6.21)$$

6. enfin, on rétablit la moyenne de la vitesse à zéro. Soient m_u et m_v les moyennes respectives de u et v , on substitue $u_{i,j} - m_u$ à $u_{i,j}$ et $v_{i,j} - m_v$ à $v_{i,j}$.

2.7 Résultats numériques

Dans cette partie, nous décrivons et analysons des résultats de simulations numériques d'écoulements bi-dimensionnels incompressibles et périodiques. Dans un premier temps, des simulations numériques directes ont été réalisées à différentes résolutions et pour différentes valeurs de la viscosité. Pour des paramètres physiques donnés, force extérieure et viscosité cinématique, la résolution minimum nécessaire afin de capturer la dynamique de l'essentiel des échelles de l'écoulement, c'est-à-dire celles qui ont un sens physique (grandes échelles et zone inertielle), est estimée. L'analyse des résultats est basée sur l'examen de la décroissance des fonctions spectres d'énergie. Ensuite des simulations multiniveaux sont réalisées sur des grilles grossières, trop grossières pour que les grandes échelles de l'écoulement puissent être correctement prédites. Les simulations numériques directes résolues sont considérées comme solutions de référence. Elles sont utilisées pour générer les conditions initiales des simulations multiniveaux et comme éléments de comparaison afin de valider les résultats de ces dernières.

2.7.1 Simulations numériques directes

2.7.1.1 La condition initiale

La condition initiale \mathbf{u}_0 est un champ périodique qui satisfait la contrainte d'incompressibilité. Il est calculé dans l'espace spectral à partir d'une fonction spectre d'énergie donnée par

$$E_0(k) = C_1 \left(\frac{k}{k_0} \right)^\sigma \exp \left(-\frac{\sigma}{2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \right)$$

où σ et C_1 sont des paramètres réels positifs et k_0 est un entier. Nous avons utilisé ici les valeurs $\sigma = 2$ et $k_0 = 10$. La constante C_1 est déterminée de telle sorte qu'à l'instant initial, le taux d'injection d'énergie dû à la force extérieure et le taux de dissipation d'énergie s'équilibrent.

En supposant une répartition uniforme de l'énergie cinétique sur les couronnes spectrales S_k définies par (1.1.55), on détermine les modules des coefficients de Fourier de \mathbf{u}_0 . Leurs phases sont choisies aléatoirement dans $[0, 2\pi]$. La fonction spectre d'énergie $E_0(k)$ (voir la Figure 2.20) décroît exponentiellement dès que le nombre d'onde k a dépassé k_0 . De ce fait la condition initiale possède peu de petites échelles. Sous l'effet du terme non linéaire, une partie de l'énergie cinétique contenue dans les échelles correspondant à $k \leq k_0$ est rapidement transférée vers les plus grands nombres d'onde. On constate sur la Figure 2.20 qu'après à peine un temps de retournement des grandes échelles, la décroissance exponentielle est remplacée par une décroissance en puissance qui est ici de l'ordre de k^{-5} . Une multitude de petites échelles sont ainsi rapidement générées dans l'écoulement. L'utilisation d'une condition initiale analytique permet d'initialiser des simulations sur différentes grilles avec le même champ de vitesse périodique. La Figure 2.21 montre les lignes de niveaux de ω_0 . L'écoulement est assez homogène au sens où toutes les structures sont de taille similaire. L'utilisation de phases aléatoires permet d'obtenir une succession de structures ayant des sens de rotation alternés.

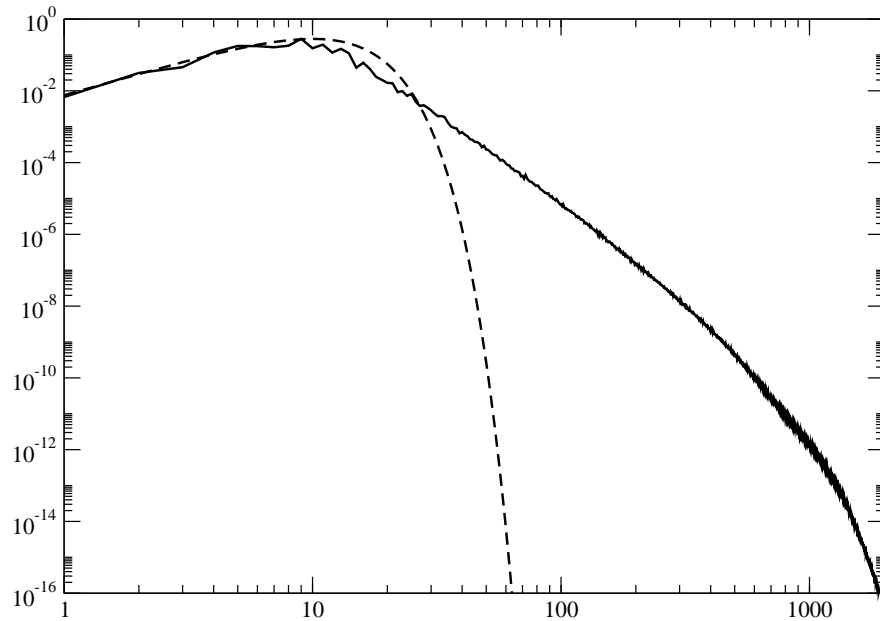


FIGURE 2.20 – Spectres d'énergie de la condition initiale et de la solution obtenue à $t = 1,0$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ sur une grille à 4096^2 points.

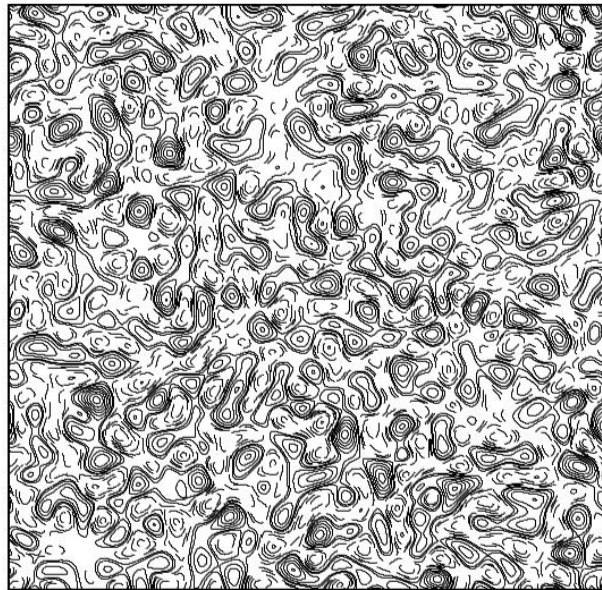


FIGURE 2.21 – Isovaleurs de la vorticité de la condition initiale. Les valeurs utilisées sont $\{-12, -10, -8, -6, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Les lignes de niveaux représentées avec des tirets correspondent aux valeurs négatives de ω_0 .

2.7.1.2 Les paramètres et les grandeurs caractéristiques

Les simulations numériques directes réalisées correspondent à des viscosités cinématiques variant de $3,33 \times 10^{-6}$ à $1,33 \times 10^{-6}$. D'après les travaux de Kraichnan [50], Leith [52] et Batchelor [4] qui ont étendu la théorie phénoménologique de la turbulence de Kolmogorov au cas de la turbulence homogène bi-dimensionnelle, un tel écoulement peut être caractérisé par une vitesse $U = \sqrt{K}$ où K est l'énergie cinétique et par une échelle intégrale (voir Lilly [53]) L définie par

$$L = \frac{K^{1/2}}{\gamma^{1/3}},$$

où

$$\gamma = \frac{\nu}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dx$$

est le taux de dissipation de l'enstrophie. Associé à cette vitesse et cette échelle caractéristiques, on peut définir le nombre de Reynolds intégral par

$$\text{Re}_L = \frac{UL}{\nu}.$$

Le temps de retournement des grandes échelles, de l'ordre de l'échelle intégrale, est défini par $t_L = L/U$. Par analogie avec la théorie de Kolmogorov, la taille des échelles dissipatives, c'est-à-dire les échelles dont la dynamique est dominée par les termes visqueux, est estimée par le nombre d'onde $k_d = 1/\eta$ où η est l'échelle de Kolmogorov et est définie, à l'aide d'un argument dimensionnel, par

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\gamma} \right)^{1/6}.$$

Nous avons reporté dans le Tableau 2.1 ces grandeurs caractéristiques calculées à l'instant initial $t = 0$.

ν^{-1}	Re_L	U	η	t_L
300 000	$8,929 \cdot 10^5$	1,484	$0,212 \times 10^{-2}$	1,352
500 000	$3,487 \cdot 10^6$	2,473	$0,151 \times 10^{-2}$	1,114
750 000	$1,012 \cdot 10^7$	3,775	$0,116 \times 10^{-2}$	1,005

TABLE 2.1 – Paramètres et grandeurs caractéristiques des conditions initiales des simulations numériques directes.

2.7.1.3 La force extérieure

La force extérieure \mathbf{f} est indépendante de la variable temporelle t et agit seulement sur les basses fréquences de la vitesse. Sous l'effet des termes non linéaires, l'énergie apportée par \mathbf{f} dans les grandes échelles est transférée vers les petites échelles. Cette force est donnée dans

l'espace spectral par ses coefficients de Fourier $\widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}} = (\widehat{f}_{1\mathbf{k}}, \widehat{f}_{2\mathbf{k}})$ qui sont définis comme suit :

$$\widehat{f}_{1\mathbf{k}} = \widehat{f}_{2\mathbf{k}} = \begin{cases} C_2 e^{i\theta_{\mathbf{k}}} & \text{si } |k_1| + |k_2| = 10, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.7.1)$$

où la constante C_2 est choisie telle que $\|\mathbf{f}\| = 0,05$. Les phases $\theta_{\mathbf{k}}$ forment une suite de valeurs aléatoires dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. La Figure 2.22 montre quelques lignes de niveaux de la vorticité de la force extérieure. Les structures sont de taille plus grande que celles de la condition initiale. De ce fait, l'injection d'énergie est réalisée sur les plus grandes échelles qui devraient ainsi se développer au cours du temps dans l'écoulement.

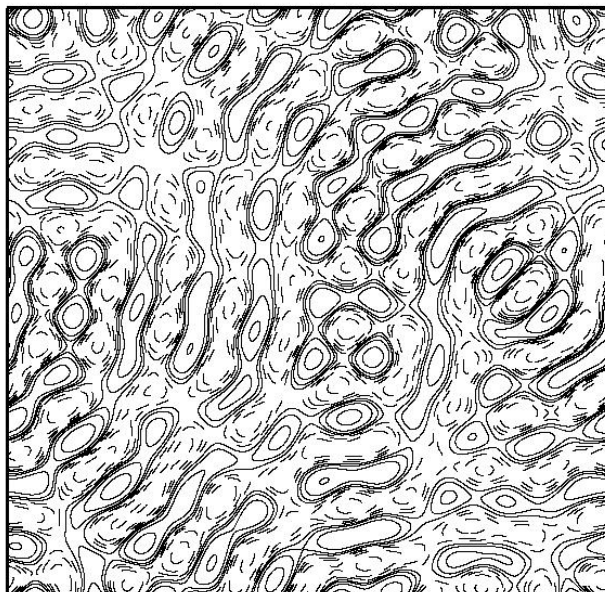


FIGURE 2.22 – Isovaleurs de la vorticité de la force extérieure. Les valeurs utilisées ici sont $\{-0.2, -0.1, -0.05, -0.025, -0.01, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.2\}$. Les lignes de niveaux représentées avec des tirets correspondent aux valeurs négatives.

2.7.1.4 Convergence en fonction de la taille du maillage

Pour les viscosités $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ et $2,0 \times 10^{-6}$, des simulations numériques directes ont été réalisées sur des maillages de 1024^2 , 2048^2 et 4096^2 points. A ces résolutions, le pas de temps, choisi de manière à satisfaire la condition de stabilité de type CFL, vaut respectivement $2,5 \times 10^{-4}$, 10^{-4} et 5×10^{-4} . Les coûts en terme de temps CPU sont respectivement de 1,3, 8 et 32 secondes par itération temporelle. Ces simulations directes ont été menées sur l'intervalle de temps adimensionnel $[0, 20]$. Sur un maillage à 4096^2 points, une simulation complète

nécessite donc 355 heures. Une version parallèle à communications implicites (OPENMP) a été utilisée.

L'observation des spectres d'énergie permet de vérifier si la résolution est suffisante. En effet, si le maillage est trop grossier, de telle sorte que les plus petites échelles ayant un sens physique ne sont pas représentables, une accumulation d'énergie dans les nombres d'ondes les plus élevés apparaît. En conséquence, les grandes échelles ne sont plus correctement approchées. Par effet de transfert inverse, de l'énergie est enlevée dans les échelles de taille moyenne. La décroissance du spectre d'énergie en loi puissance prédite par la théorie phénoménologique de la turbulence n'est plus respectée. Dans le pire des cas, c'est-à-dire à résolution très grossière, le spectre d'énergie croît sur les plus grands nombres d'onde et en amont un creux apparaît dans la zone inertielle.

La Figure 2.23 représente les spectres d'énergie à $t = 20$ des solutions obtenues sur les différents maillages pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$. Dès l'utilisation de 2048^2 points, la distribution d'énergie est correctement approchée, même sur les plus petites échelles pour lesquelles une décroissance exponentielle est observée. Pour 1024^2 inconnues, une légère accumulation d'énergie est visible sur les plus grands nombres d'onde. Elle est de faible importance et ne semble pas nuire à l'approximation des petites échelles. A $t = 20$, le nombre d'onde k_d est de l'ordre de 650 indiquant qu'une grille à 1300^2 points est nécessaire pour capter les échelles dissipatives, dites de Komogorov. Cette valeur est en accord avec l'analyse des spectres d'énergie.

Pour $\nu = 2 \times 10^{-6}$, ce phénomène s'amplifie à cette résolution (voir la Figure 2.24). Les échelles correspondant à $k \in [100, 512]$, ce qui représente 80% des nombres d'onde, sont contaminées par le manque de résolution. Cette résolution est dans ce cas insuffisante. Par contre, avec 2048^2 inconnues, l'écoulement est correctement résolu. Cette observation est en accord avec la valeur de k_d obtenue en fin de simulation, c'est-à-dire 900, sur le maillage le plus fin.

Au temps final $t = 20$ les spectres d'énergie, pour $k \in [30, 200]$, exhibent une décroissance en loi puissance de la forme $k^{-3.5}$ (voir la Figure 2.25). Cette décroissance est plus rapide que la valeur k^{-3} prévue par la théorie phénoménologique de la turbulence bi-dimensionnelle. Par contre, au temps intermédiaire $t = 10$ (voir la Figure 2.26) la décroissance en k^{-3} du spectre est bien retrouvée. Pour $t \leq 10$, l'essentiel de l'énergie est contenu dans les échelles de nombre d'onde $k \in [5, 10]$ en raison de la condition initiale dont le pic d'énergie est au voisinage de $k = 10$. Le transfert inverse d'énergie, caractéristique de la turbulence bi-dimensionnelle, injecte de l'énergie dans les modes $k \simeq 1$ qui deviennent dominant au cours du temps. C'est lorsque ce régime est atteint que la décroissance en $k^{-3.5}$ est observée. Pour visualiser l'impact de ce changement de pente sur l'écoulement nous avons représenté sur les Figures 2.27 et 2.28 la vorticité pour les solutions obtenues avec $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ aux temps respectifs $t = 10$ et $t = 20$. On observe effectivement à $t = 10$ une présence plus importante de petites échelles : l'écoulement est plus complexe qu'à $t = 20$. La même observation est faite pour $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ en examinant les Figures 2.29 et 2.30.

Pour $\nu = 1,33 \times 10^{-6}$, un maillage de 8192^2 points a été utilisé afin d'assurer une résolution correcte de la plupart des échelles physiques de l'écoulement (voir la Figure 2.31). Une décroissance en k^{-3} du spectre d'énergie est retrouvée pour $k \in [10, 500]$ suivi d'une décroissance

exponentielle pour les plus grands nombres d'onde. La représentation de la vorticité (voir la Figure 2.32) confirme que l'analyse basée sur le spectre d'énergie : le gradient de la vitesse est correctement approché sur cette grille. L'écoulement est plus complexe, c'est-à-dire avec plus d'échelles et des échelles de plus petites tailles que pour les autres valeurs, plus grandes, de la viscosité. Pour ce nombre d'inconnues, la simulation a été réalisée sur la machine scalaire IBM Regatta Power 6 de l'IDRIS (CNRS, Orsay) en utilisant jusqu'à 10 *threads* simultanés. Le coût calcul en équivalent monoprocesseur pour cette simulation menée sur l'intervalle de temps $[0, 5]$ est de l'ordre de 9 500 heures CPU. Bien que bi-dimensionnelle, une telle simulation dans ces coûts CPU et mémoire est similaire à une simulation tri-dimensionnelle.

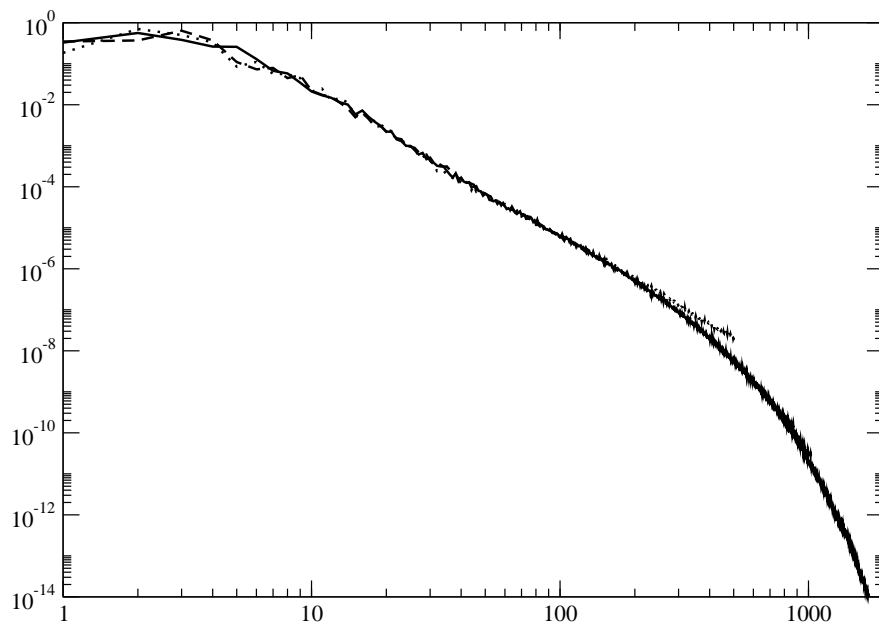


FIGURE 2.23 – Spectre d'énergie de la vitesse \mathbf{u} à $t = 20$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ et $n = 1024, 2048$ et 4096 .

ν^{-1}	Re_L	U	η	t_L
300 000	$2,873 \cdot 10^5$	1,484	$0,120 \times 10^{-2}$	1,436
500 000	$1,068 \cdot 10^6$	2,467	$0,837 \times 10^{-3}$	0,350
750 000	$1,855 \cdot 10^6$	3,663	$0,496 \times 10^{-4}$	0,184

TABLE 2.2 – Paramètres et grandeurs caractéristiques des conditions initiales des simulations multi-niveaux.

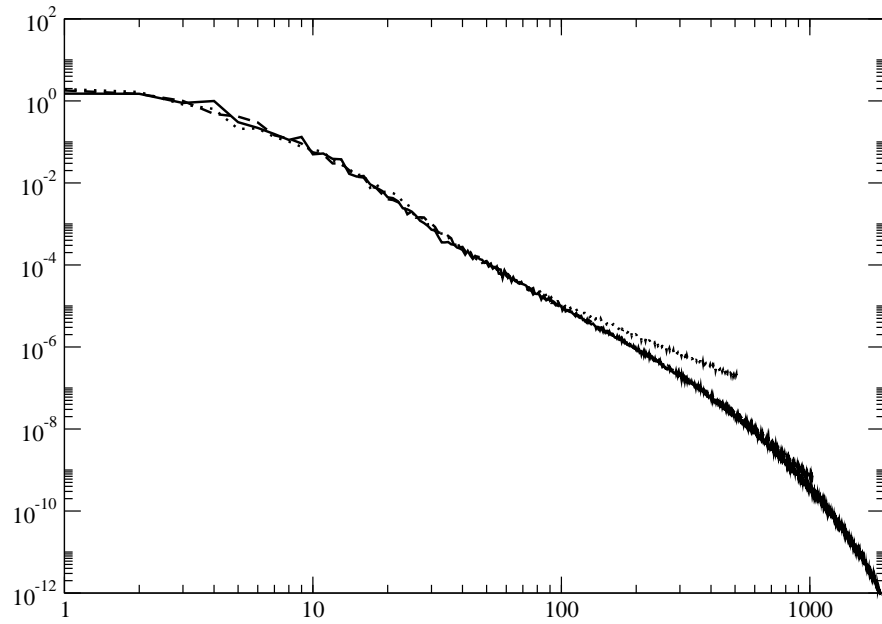


FIGURE 2.24 – Spectre d'énergie de la vitesse \mathbf{u} à $t = 20$ pour $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ et $n = 1024, 2048$ et 4096 .

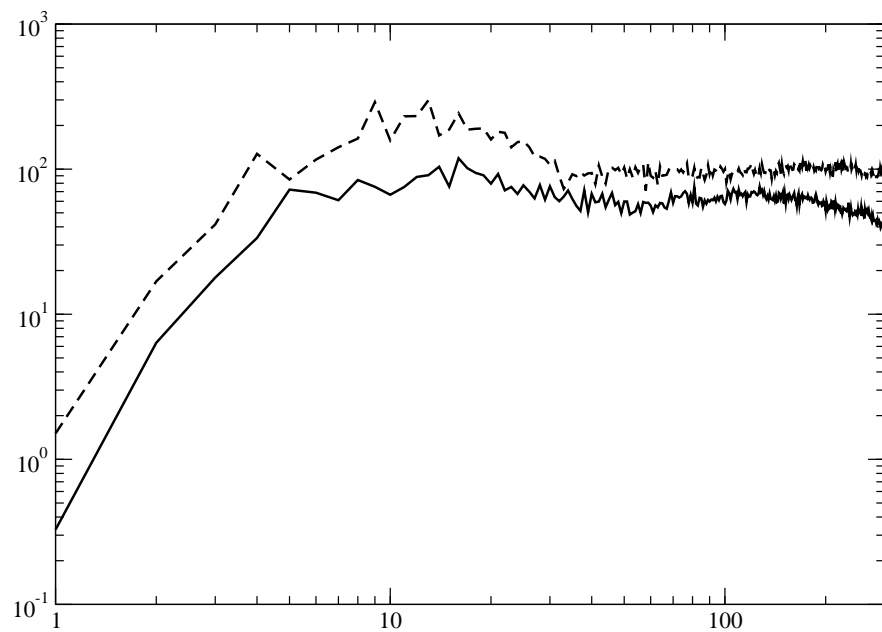


FIGURE 2.25 – Représentation de $k^{3.5}E(k)$ à $t = 20$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ (ligne pleine) et $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ (tiret). La résolution est de 4096^2 points.

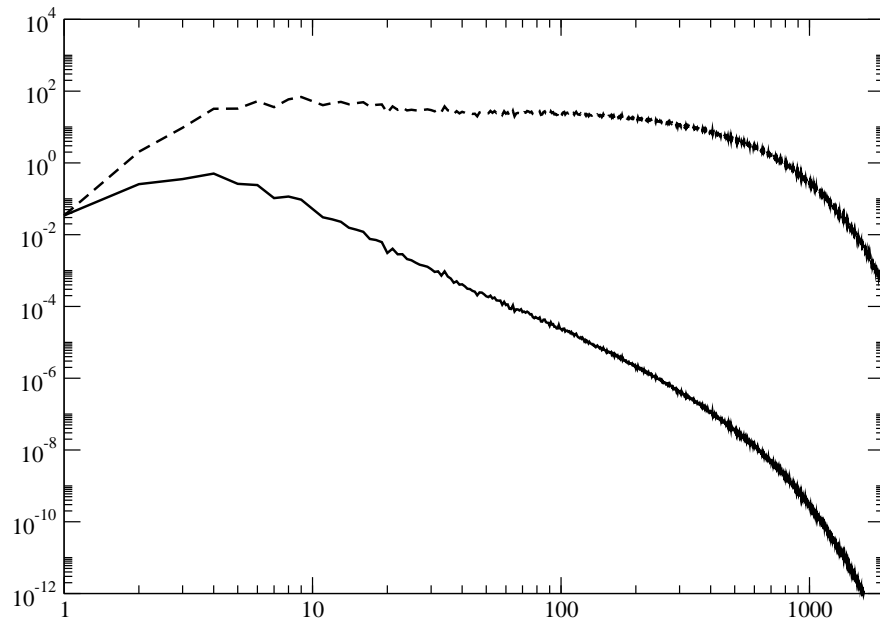


FIGURE 2.26 – Spectre d'énergie (trait plein) et $k^3 E(k)$ (tiret) à $t = 10$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$. La résolution est de 4096^2 points.

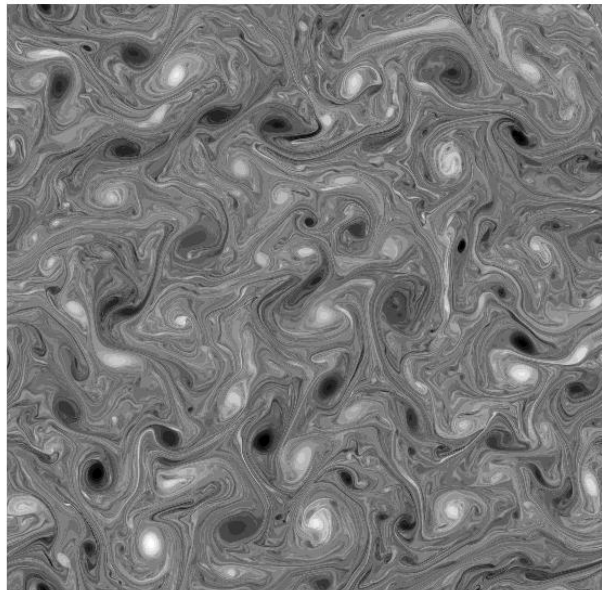


FIGURE 2.27 – Vorticité à $t = 10$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.

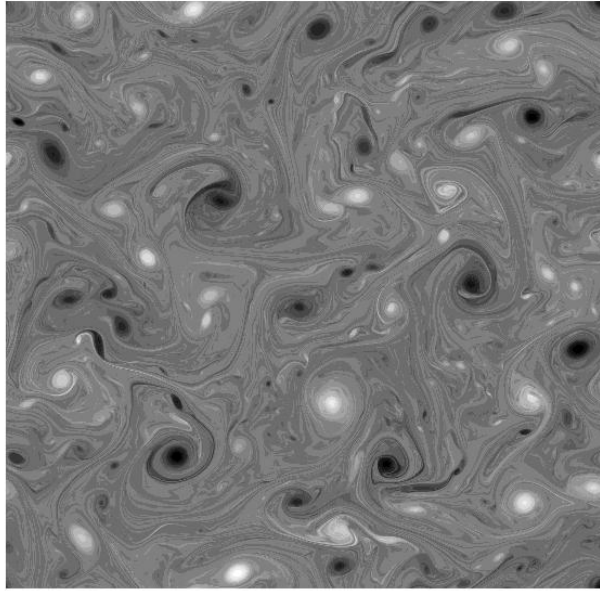


FIGURE 2.28 – Vorticité à $t = 20$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.

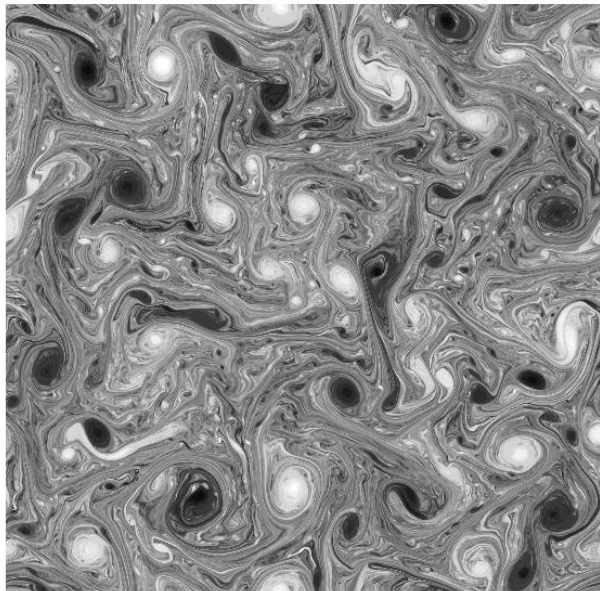


FIGURE 2.29 – Vorticité à $t = 10$ pour $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.

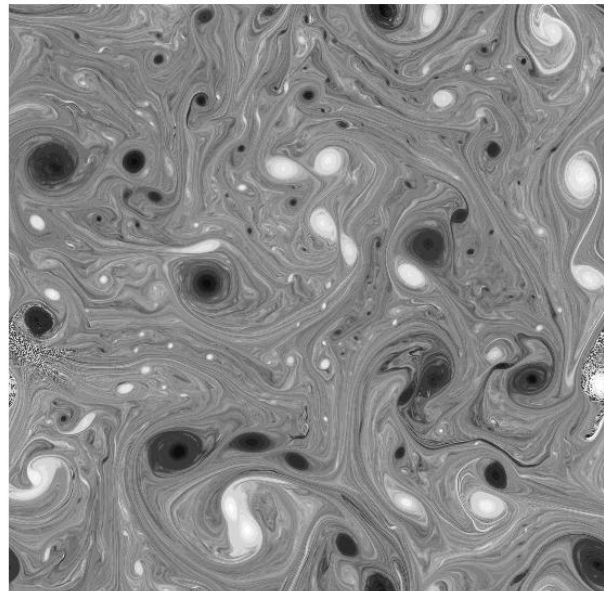


FIGURE 2.30 – Vorticité à $t = 20$ pour $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.

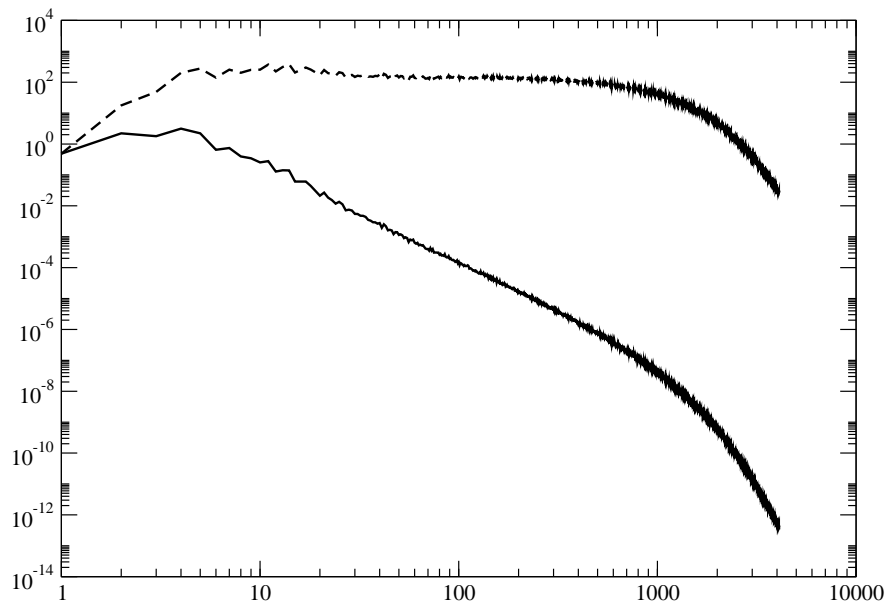


FIGURE 2.31 – Spectre d'énergie (trait plein) et $k^3 E(k)$ (tiret) à $t = 5$ pour $\nu = 1,33 \times 10^{-6}$ et $n = 8192$.

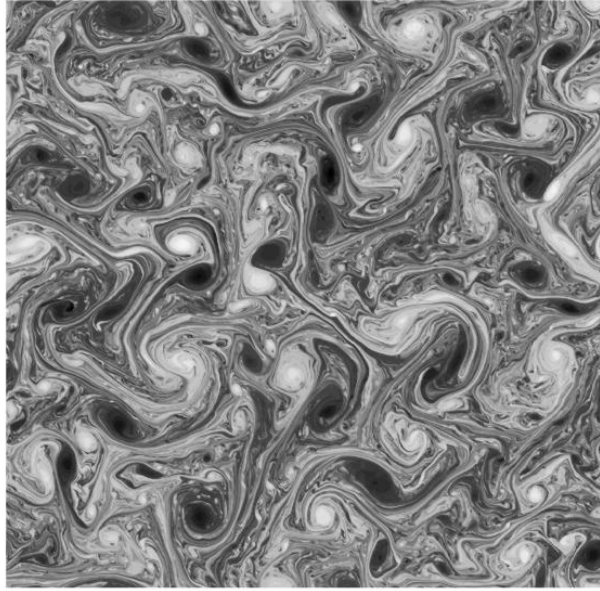


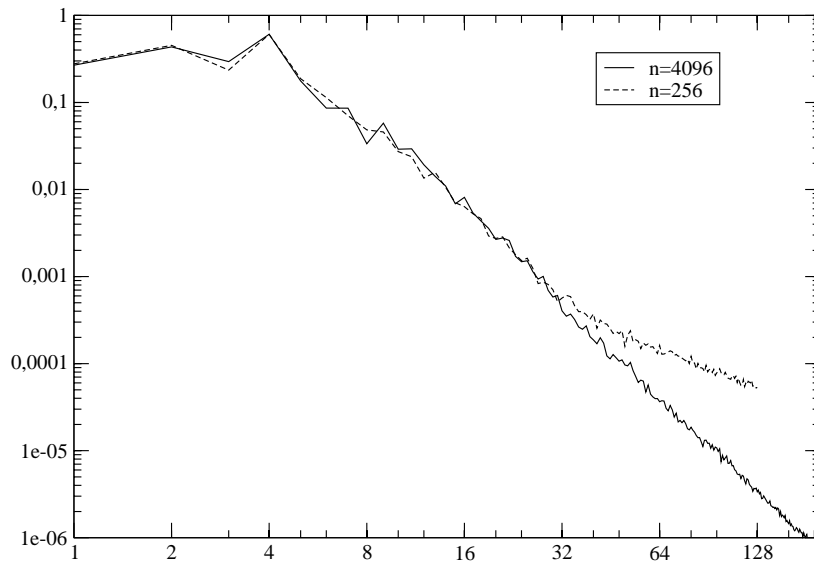
FIGURE 2.32 – Vorticité à $t = 5$ pour $\nu = 1,33 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 8192^2 points.

2.7.2 Les solutions multi-niveaux.

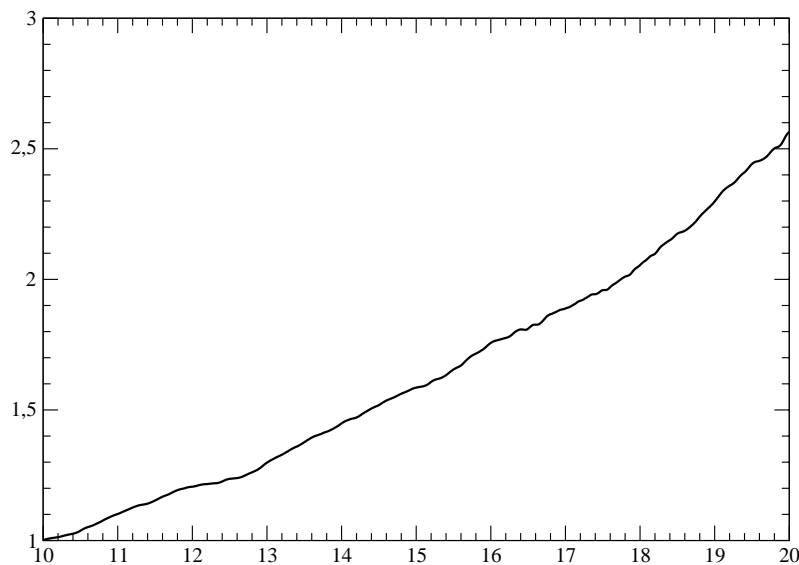
Nous avons choisi d'appliquer la méthode multi-niveaux pour la simulation d'un écoulement périodique à nombre de Reynolds $Re = 300\,000$. Dans la Section 2.7.1, la convergence en grille de cet écoulement a été étudiée. Nous avons constaté que la simulation directe sur la grille à 4096^2 points est suffisamment fine pour reproduire toutes les échelles de la turbulence : elle sera notre simulation de référence. En revanche, la simulation directe sur la grille à 256^2 points est trop grossière, on remarque une accumulation d'énergie importante sur les petites échelles (voir Figure 2.33(a)). L'évolution du rapport $r(\mathbf{u})$, défini par (2.6.15), pour la simulation directe sur la grille à 256^2 points est représenté sur la Figure 2.33(b). On remarque une augmentation importante de cette quantité, ceci traduit une répartition anormale de l'énergie entre les différentes échelles. Nous appliquons la méthode multi-niveaux sur la grille à 256^2 points, afin de corriger cette accumulation d'énergie. Les résultats obtenus seront comparés à la simulation sur grille fine. La solution de référence est calculée jusqu'à $t = 20$. Les solutions multi-niveaux et la solution directe sont calculées à partir de $t = 10$ et jusqu'à $t = 20$. Elles sont initialisées avec la restriction sur la grille à 256^2 points du champ de vitesse obtenu avec la simulation de référence au temps $t = 10$. On utilise pour cela l'opérateur $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}}$, qui conserve la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement et qui est d'ordre deux.

Une première solution multi-niveaux : les paramètres de l'algorithme multi-niveaux sont ici

$$r_{max} = 1 \text{ et } c_{min} = 0,$$



(a)



(b)

FIGURE 2.33 – (a) Spectre d'énergie associé à la simulation directe sur une grille à 4096^2 points (trait plein), à 256^2 points (en tirets), au temps $t = 20$. (b) Evolution du rapport $r(\mathbf{u})$ pour la simulation directe sur une grille à 256^2 points.

ce sont les choix les plus naturels. En effet, $r_{max} = 1$ signifie que l'on impose $r(\mathbf{u}) \leq 1$ pendant toute la simulation multi-niveaux. La constante 1 provient des observations faites à propos de la répartition de l'énergie entre les échelles, dans le contexte de la décomposition spectrale. Le choix du paramètre $c_{min} = 0$ entraîne que les coefficients de correction locale sont compris entre 0 et 1. Lorsqu'un coefficient $c_{i,j}$ vaut 0 la correction consiste à supprimer entièrement la composante des petites échelles

$$u_{i,j} \leftarrow u_{ij} - (\delta_{\mathcal{F}}^1 u)_{ij},$$

lorsqu'il vaut 1 il n'y a pas de modification de la vitesse

$$u_{i,j} \leftarrow u_{ij}.$$

On a représenté sur la Figure 2.34 l'évolution de l'énergie contenue dans les petites échelles $\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}$. On constate que la correction des petites échelles a été appliquée seulement quatre fois durant toute la simulation. La diminution de l'énergie des petites échelles est radicale, on enlève environ 40% de leur énergie à chaque correction. Nous souhaitons que la correction soit appliquée dynamiquement en temps, donc de manière plus fréquente. Nous proposons pour cela une autre simulation multi-niveaux où la correction des petites échelles est moins radicale.

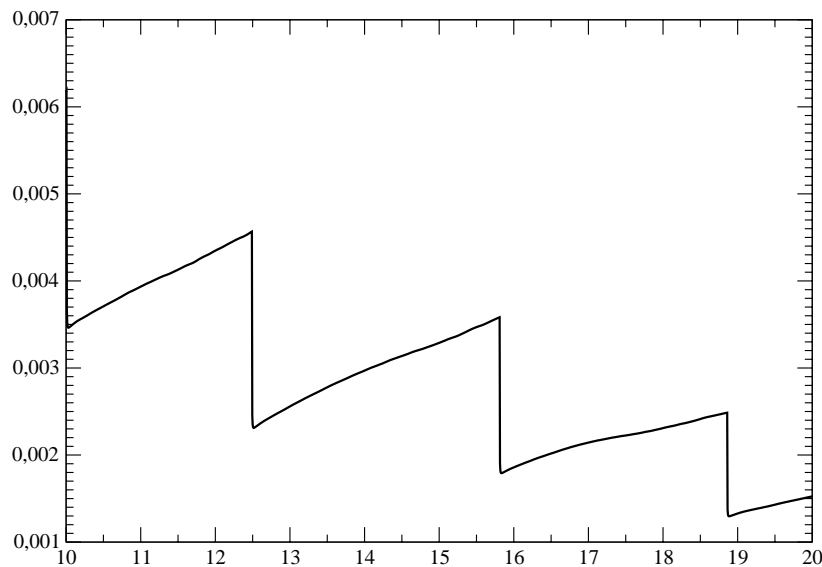


FIGURE 2.34 – Evolution de l'énergie contenue dans les petites échelles $\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}$, les paramètres de l'algorithme multi-niveaux sont $r_{max} = 1$ et $c_{min} = 0$.

Une seconde solution multi-niveaux : les paramètres de l'algorithme multi-niveaux sont ici

$$r_{max} = 1 \text{ et } c_{min} = 0.99.$$

L'évolution du rapport $r(\mathbf{u})$ pour la simulation multi-niveaux est représentée sur la Figure 2.35(b). On voit que la correction de petites échelles est appliquée dès que ce rapport devient supérieur au seuil 1. La correction est assez fréquente, environ toutes les 10 itérations. Elle est aussi beaucoup moins radicale que dans le cas $c_{min} = 0$, on enlève ici environ 0.5% de l'énergie des petites échelles. Le choix $c_{min} = 0.99$ répond donc à nos attentes : une correction moins brutale et plus fréquente. L'accumulation d'énergie sur les petites échelles lors de la simulation directe sur la grille à 256^2 points (voir Figure 2.33(a)) est contrôlée. La pente du spectre d'énergie de la simulation multi-niveaux (voir Figure 2.35(a)) est proche de celle de la simulation de référence. On remarque cependant que ce spectre est situé largement en dessous du spectre de référence. Nous pensons que le choix $r_{max} = 1$ conduit à une contrainte trop forte sur la quantité d'énergie contenue dans les petites échelles, celle-ci se traduit par une dissipation de l'énergie abusive. Le rapport $r_{max} = 1$ correspond à un spectre d'énergie correct et aussi à une séparation des échelles idéale : la séparation dans l'espace spectrale. Or la séparation des échelles dans l'espace physique que nous proposons ne sépare pas les échelles de façon idéale. Une simulation multi-niveaux avec un paramètre r_{max} plus grand va permettre de relaxer la contrainte sur la quantité d'énergie contenue dans les petites échelles.

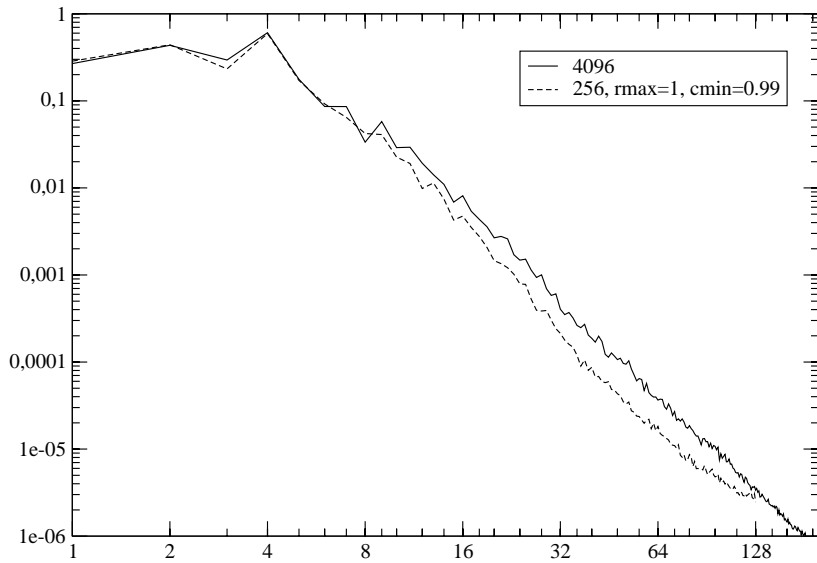
Une troisième solution multi-niveaux : les paramètres de l'algorithme multi-niveaux sont ici

$$r_{max} = 1.2 \text{ et } c_{min} = 0.99.$$

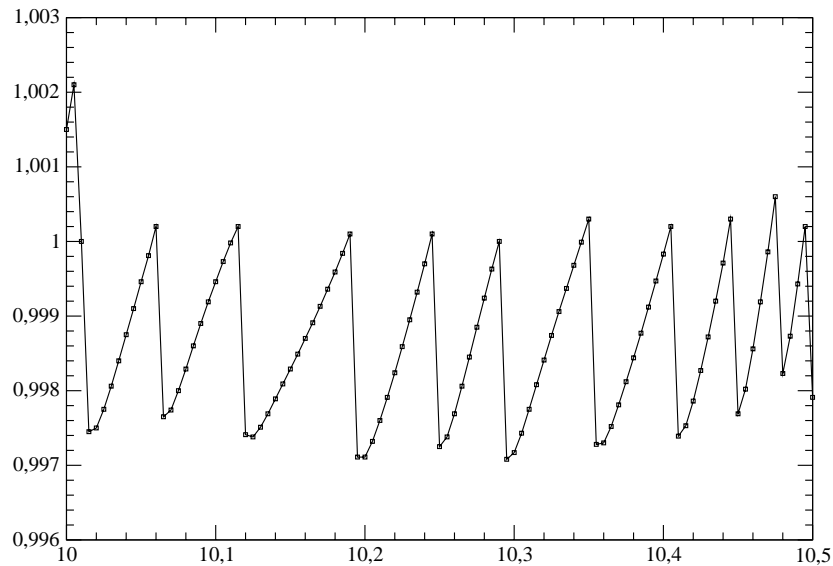
L'accumulation d'énergie sur les petites échelles lors de la simulation directe sur la grille à 256^2 points (voir Figure 2.33(a)) est maîtrisée. La pente du spectre d'énergie de la simulation multi-niveaux (voir Figure 2.36) est proche de celle de la simulation de référence. La grande partie du spectre est situé en dessous du spectre de référence, mais il est plus proche que le spectre de la simulation multi-niveau avec le paramètre $r_{max} = 1$. On a relaxé la contrainte sur la quantité d'énergie des petites échelles. Les observations sur le spectre d'énergie se confirment lorsqu'on regarde l'écoulement dans l'espace physique. La vorticité associée à la vitesse du fluide est représentée sur la Figure 2.37. La ressemblance des structures tourbillonnaires de la solution multi-niveaux (voir Figure 2.37(c)) et de la solution de référence (voir Figure 2.37(a)) est forte. La solution obtenue par simulation directe sur la grille à 256^2 points (voir Figure 2.37(a)) comporte trop de petites structures. Ces structures sont présentes dans tout le domaine, elles parasitent la dynamique des grandes échelles.

2.8 Opérateurs d'interpolation et conditions aux limites de Dirichlet

On se place dans le cadre des conditions aux limites de Dirichlet, sur un domaine rectangulaire. Le schéma d'interpolation de l'opérateur de restriction $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}}$ (resp. de l'opérateur de prolongement $\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}}$) ne permet pas d'étendre (resp. de restreindre) un champ de vitesse à inconnues décalées   proximité du bord du domaine. En effet, ces opérateurs nécessitent pour cela des valeurs du champ de vitesse situées à l'extérieur du domaine.



(a)



(b)

FIGURE 2.35 – (a) Spectre d'énergie associé à la simulation directe sur une grille à 4096^2 points (trait plein), simulation multi-niveaux sur grille à 256^2 points (en tirets), au temps $t = 20$. Les paramètres de la simulations multi-niveaux sont $r_{max} = 1$ et $c_{min} = 0.99$. (b) Evolution du rapport $r(\mathbf{u})$ pour la simulation multi-niveaux, aux premiers instants de la simulation $10 \leq t \leq 10.5$.

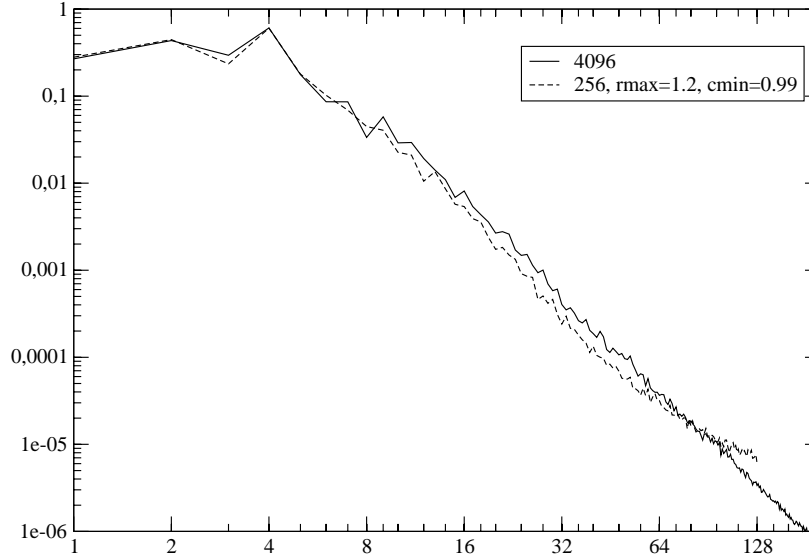


FIGURE 2.36 – Spectre d'énergie associé à la simulation directe sur une grille à 4096^2 points (trait plein), simulation multi-niveaux sur grille à 256^2 points (en tirets), au temps $t = 20$. Les paramètres de la simulations multi-niveaux sont $r_{max} = 1.2$ et $c_{min} = 0.99$.

Nous proposons dans la Section 2.8.1 une extension du champ de vitesse sur de nouvelles mailles disposées autour du domaine. Sur ces nouvelles mailles, la vitesse est définie de façon consistante avec les inconnues définies à l'intérieur du domaine et la contrainte d'incompressibilité est vérifiée.

Nous discutons ensuite dans la Section 2.8.2 de l'interpolation de la vitesse sur le bord du domaine, deux approches sont proposées. Dans la première approche, la vitesse restreinte (ou prolongée) vérifie la contrainte d'incompressibilité sur tout le domaine, en contrepartie on introduit sur le bord une erreur par rapport à la condition aux limites. Dans la seconde approche, la vitesse restreinte (ou prolongée) ne vérifie pas la contrainte d'incompressibilité sur certaines mailles proches du bord, en revanche la condition aux limites est préservée.

2.8.1 Extension du champ de vitesse sur les mailles fictives.

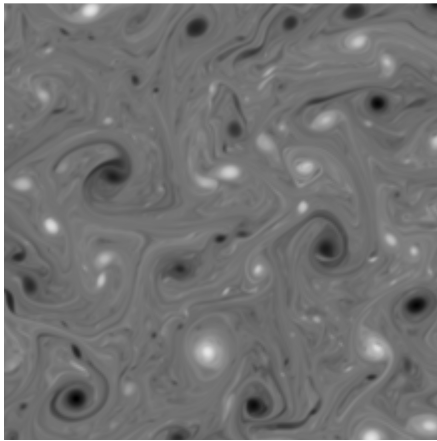
On considère un champ de vitesse discret à inconnues décalées (u, v) avec

$$u = \{u_{i,j}, 0 \leq i \leq n_\ell, 1 \leq j \leq n_h\}$$

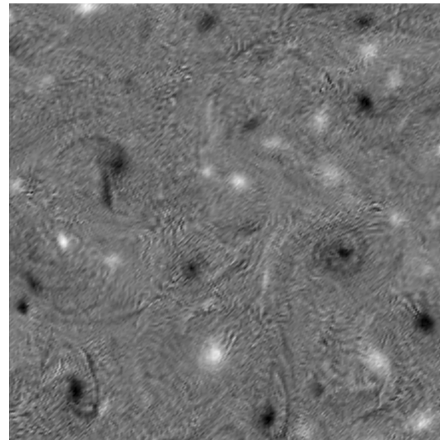
et

$$v = \{v_{i,j}, 1 \leq i \leq n_\ell, 0 \leq j \leq n_h\}.$$

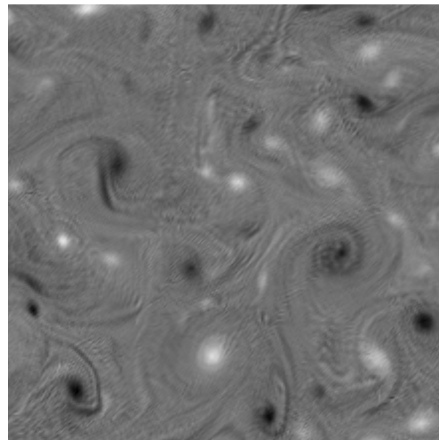
La vitesse sur le bord du domaine est connue. On souhaite étendre le champ de vitesse (u, v) sur les mailles $K_{0,j}$ et $K_{n_\ell+1,j}$, pour $1 \leq j \leq n_h$ et $K_{i,0}$ et K_{i,n_h+1} , pour $1 \leq i \leq n_\ell$, qui sont situées à l'extérieur du domaine, ces mailles sont appelées **mailles fictives**. Sur la Figure 2.38, la maille fictive $K_{0,j}$ est représentée en pointillés, on a également matérialisé le bord gauche



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.37 – Comparaison du champ de vorticité à $t = 20$: (a) simulation de référence, (b) simulation directe sur grille à 256^2 points, (c) simulation multi-niveaux sur cette même grille. Les paramètres de la simulations multi-niveaux sont : $r_{max} = 1.2$ et $c_{min} = 0.99$.

du domaine et les mailles $K_{1,j+1}$, $K_{1,j}$ et $K_{1,j-1}$, situées à l'intérieur du domaine. Nous introduisons les nouvelles valeurs de la vitesse $u_{-1,j}$ et $v_{0,j}$, situées à l'extérieur du domaine, de manière consistante avec les valeurs de la vitesse à l'intérieur du domaine. La vitesse sur le bord étant connue, on définit $v_{0,j}$ par

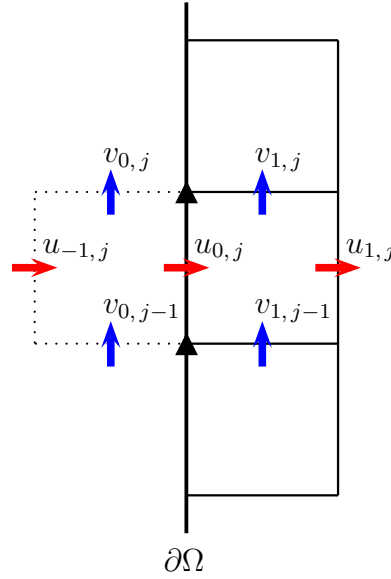


FIGURE 2.38 – Extension de la vitesse sur les mailles fictives.

$$v_{0,j} = 2v(0, y_j) - v_{1,j}, \quad (2.8.1)$$

pour j entre 0 et n_h . On calcule $v_{0,j-1}$ de façon analogue, il reste à définir $u_{-1,j}$. Nous proposons de déduire cette valeur de la contrainte d'incompressibilité

$$D_{\mathbf{n}}(u^{\mathbf{n}})_{0,j} = 0,$$

que nous souhaitons imposer. On obtient la formule suivante

$$u_{-1,j} = u_{0,j} + \frac{\ell}{h} (v_{0,j} - v_{0,j-1}).$$

Avec la relation (2.8.1), on obtient

$$u_{-1,j} = u_{0,j} + \frac{2\ell}{h} (v(0, y_j) - v(0, y_{j-1})) - \frac{\ell}{h} (v_{1,j} - v_{1,j-1}).$$

La contrainte d'incompressibilité sur la maille $K_{1,j}$ permet de simplifier cette expression, il vient

$$u_{-1,j} = u_{1,j} + \frac{2\ell}{h} (v(0, y_j) - v(0, y_{j-1})). \quad (2.8.2)$$

2.8.2 Restriction et prolongement de la vitesse sur le bord.

L'extension de la vitesse sur les mailles fictives, par (2.8.1) et (2.8.2), permet la restriction et le prolongement d'un champ de vitesse par simple application des opérateurs $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}}$ et $\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}}$. Les formules d'interpolation des opérateurs près du bord sont identiques aux formules utilisées à l'intérieur du domaine.

Pour que la divergence discrète du champ restreint (resp. prolongé) soit nulle sur les mailles situées en bord de domaine, c'est-à-dire sur les mailles $K_{1,j}$ et $K_{n_\ell,j}$, pour $1 \leq j \leq n_h$ et $K_{i,1}$ et K_{i,n_h} , pour $1 \leq i \leq n_\ell$, il est nécessaire de restreindre (resp. prolonger) la composante normale de la vitesse sur le bord du domaine. Prenons le cas de l'opérateur de restriction, les inconnues qui interviennent dans le schéma d'interpolation de $(\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n)_{0,j}$ sont représentées sur la Figure 2.39. La valeur $(\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n)_{0,j}$ est définie par

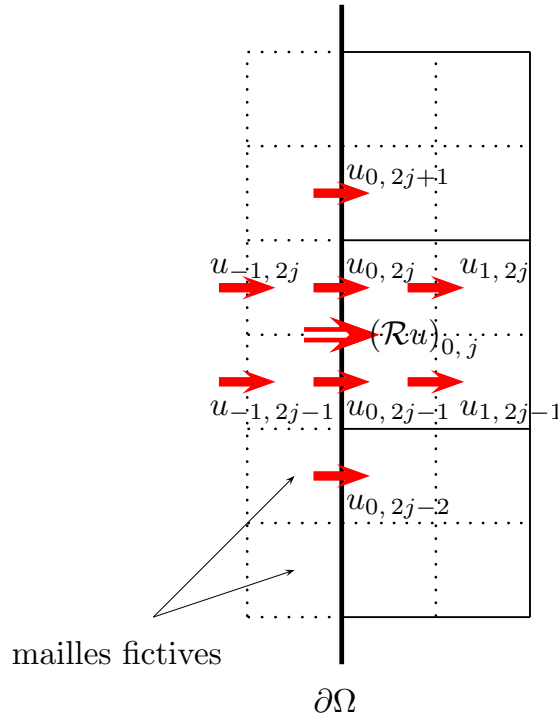


FIGURE 2.39 – Interpolation de la vitesse sur le bord.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n)_{0,j} = & \left(u_{-1,2j}^n + u_{-1,2j-1}^n + u_{0,2j+1}^n + \alpha u_{0,2j}^n \right. \\
 & \left. + \alpha u_{0,2j-1}^n + u_{0,2j-1}^n + u_{1,2j}^n + u_{1,2j-1}^n \right) / (6 + 2\alpha),
 \end{aligned}
 \tag{2.8.3}$$

c'est une combinaison linéaire qui fait intervenir des inconnues situées à l'intérieur du domaine ($u_{1,2j}^n$ et $u_{1,2j-1}^n$), la vitesse sur le bord du domaine ($u_{0,2j+1}^n$, $u_{0,2j}^n$, $u_{0,2j-1}^n$ et $u_{0,2j-1}^n$), et aussi la vitesse sur les mailles fictives ($u_{-1,2j}^n$ et $u_{-1,2j-1}^n$). En approchant la vitesse de cette manière, on introduit sur le bord une erreur du second ordre par rapport à la condition aux limites.

Au lieu d'interpoler la vitesse sur le bord du domaine en appliquant la relation (2.8.3), on peut obtenir la vitesse sur le bord en utilisant directement la condition aux limites qui est une donnée du problème. On définit alors la valeur $(\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n)_{0,j}$ par :

$$(\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}} u^n)_{0,j} = u(0, y_{2j-1}). \quad (2.8.4)$$

On gagne alors en précision sur le bord, en contrepartie, la divergence discrète du champ de vitesse restreint (ou prolongé) est non nulle sur les mailles situées en bord de domaine.

Pour résumer, on a proposé deux méthodes pour calculer la restriction et le prolongement d'un champ de vitesse dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet. Ces méthodes ont chacune un avantage et un inconvénient. L'avantage de la première méthode (voir 2.8.3) est de conserver la contrainte d'incompressibilité sur le domaine entier, son défaut est d'introduire sur le bord du domaine une erreur par rapport à la condition aux limites. L'avantage de la deuxième méthode (voir 2.8.4) est de préserver la condition aux limites, son défaut est la perte de la contrainte d'incompressibilité sur les mailles à proximité du bord du domaine.

Afin de capter correctement la couche limite, nous souhaitons privilégier la précision du schéma au voisinage du bord. Nous préférons donc la technique qui consiste à utiliser directement la condition aux limites pour définir les inconnues de la vitesse restreinte (ou prolongée) situées sur le bord, car elle a l'avantage de ne pas introduire d'erreur sur le bord. Avec cette technique, la conservation de la contrainte d'incompressibilité sur certaines mailles proches du bord n'est plus assurée. On remarque toutefois que, lors de la correction des petites échelles, la contrainte d'incompressibilité du champ de vitesse n'est pas conservée, cette correction étant locale.

2.8.3 Application à la simulation de la cavité entraînée.

La cavité entraînée est un problème modèle pour la simulation numérique des écoulements incompressibles turbulents. Le domaine d'étude est une cavité rectangulaire

$$\Omega = (0, 1)^2,$$

remplie de fluide. On impose au sommet de la cavité une vitesse d'entraînement horizontale et uniforme

$$\mathbf{u} = (1, 0), \text{ si } y = 1.$$

Sur les autres bords, on impose une condition de non-glissement

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ si } x \in \{0, 1\} \text{ ou } y = 0.$$

La viscosité du fluide vaut 10^{-5} , le nombre de Reynolds est égal à 100 000. A ce nombre de Reynolds, l'écoulement est instationnaire et on observe sur chaque paroi le développement d'une couche limite très fine (voir Figure 2.8.3). On a effectué cinq simulations numériques directes, les grilles considérées comptent respectivement 4096^2 , 2048^2 , 1024^2 , 512^2 et 256^2 points. L'algorithme multi-niveaux a été appliqué à la simulation sur la grille à 256^2 points.

La simulation de référence est obtenue sur la grille uniforme qui contient 4096 points dans chaque direction. Pour satisfaire la condition de stabilité, le pas de temps δt vaut $5.0 \cdot 10^{-5}$. La solution est calculée jusqu'à l'instant $t = 4$, elle a nécessité pour cela 80 000 itérations. Le temps d'exécution par itération du code de simulation de la cavité est du même ordre que celui d'une simulation d'écoulement périodique sur la même grille.

Les niveaux d'échelles du champ de vitesse sont calculés selon la décomposition (2.6.9). Le nombre de niveaux de grille introduits lors de cette décomposition est de $4 = n_{niv}$ pour les simulations sur grille à 256^2 points (simulation directe et simulation avec algorithme multi-niveaux), 5 lorsque la grille compte 512^2 points, 6 lorsque la grille compte 1024^2 points, 7 lorsque la grille compte 2048^2 points et 8 lorsque la grille compte 4096^2 points. Ainsi, dans tous les cas, le niveau de grille le plus grossier comprend 16^2 points. Pour chaque simulation (voir légende), on a représenté sur la Figure 2.41 l'énergie associée aux niveaux d'échelle intervenant dans la décomposition (2.6.9). Sur ce graphique, l'énergie des grandes échelles correspond au niveau 1 et celle des petites échelles correspond au niveau le plus à droite (pas forcément la plus faible quantité d'énergie).

Il semble qu'il existe une hiérarchie entre les niveaux d'échelle, plus ou moins nette selon le maillage utilisé pour la simulation. On observe que les niveaux d'énergie coïncident avec ceux de la simulation de référence, sauf en ce qui concerne l'énergie des petites échelles. Plus précisément : soit \mathbf{u}^c une solution obtenue sur une grille grossière \mathcal{G}_c et \mathbf{u}^f la solution de référence obtenue sur grille fine. On note $\mathbf{z}^c = \delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}^c$ les petites échelles de \mathbf{u}^c . On remarque que, plus le pas d'espace de la grille \mathcal{G}_c est grand, plus la différence entre l'énergie des petites échelles \mathbf{z}^c et l'énergie du niveau d'échelle $\delta_{\mathcal{F}}^i \mathbf{u}^f$ correspondant à \mathbf{z}^c est grande. Cette augmentation est principalement due à l'accumulation de l'énergie sur les modes les plus élevés supportés par le maillage (phénomène déjà observé dans le cas de conditions aux limites périodiques). L'algorithme multi-niveau est justement conçu pour contrôler la quantité d'énergie contenu dans les petites échelles. On voit que l'énergie des petites échelles pour la simulation avec algorithme multi-niveaux est nettement inférieure à celle de la simulation numérique directe équivalente. On s'intéresse essentiellement à la dynamique du fluide dans le sous-domaine $(\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2})$ de Ω . La vorticité de la vitesse ω , au temps $t = 4$, est représentée sur la Figure 2.42(a) pour la simulation sur la grille à 1024^2 points, sur la Figure 2.42(b) pour la simulation sur la grille à 256^2 points et sur la Figure 2.42(c) pour la simulation avec algorithme multi-niveaux sur la grille à 256^2 points. On voit que la couche limite qui se développe sur le côté droit du domaine se décolle de la paroi aux environs de $y = 0.45$ pour la simulation fine, vers $y = 0.43$ pour la simulation avec algorithme multi-niveaux et aux alentours de $y = 0.36$ pour la simulation directe sur la grille à 256^2 points. L'accumulation de l'énergie au niveau des petites échelles de l'écoulement empêche le décollement de la couche limite (voir 2.42(b)), la correction des petites échelles, généralisée au cas des conditions aux limites de Dirichlet, permet un développement correct de celle-ci (voir Figure 2.42(c)). Ces résultats sont assez satisfaisants, ils montrent que la correction des petites échelles améliore significativement le décollement de la couche limite, lorsque le maillage est grossier. Ainsi, l'algorithme multi-niveaux, développé dans le cadre spectral, est applicable dans le contexte des conditions aux limites de Dirichlet. En revanche, il est clair qu'on ne peut pas espérer reproduire sur un maillage grossier les phénomènes les plus fins qui se produisent à l'intérieur

de la couche limite. Seule une simulation sur grille fine permet de capter ces phénomènes.

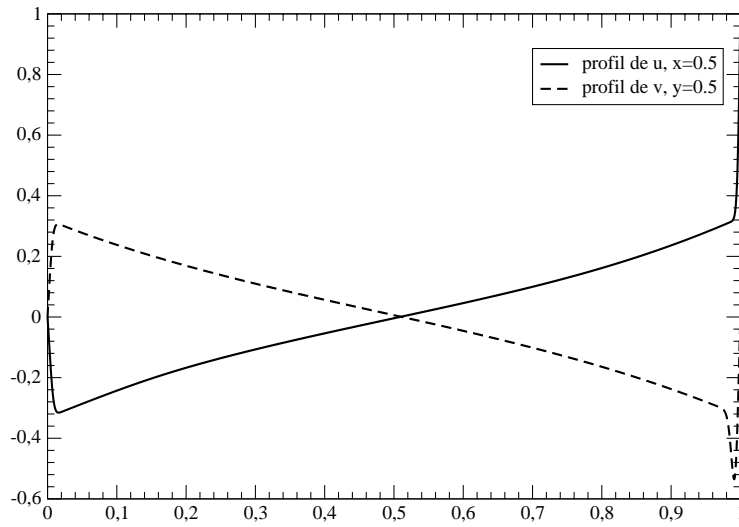


FIGURE 2.40 – Profil de la vitesse dans la cavité à l'instant $t = 4$.

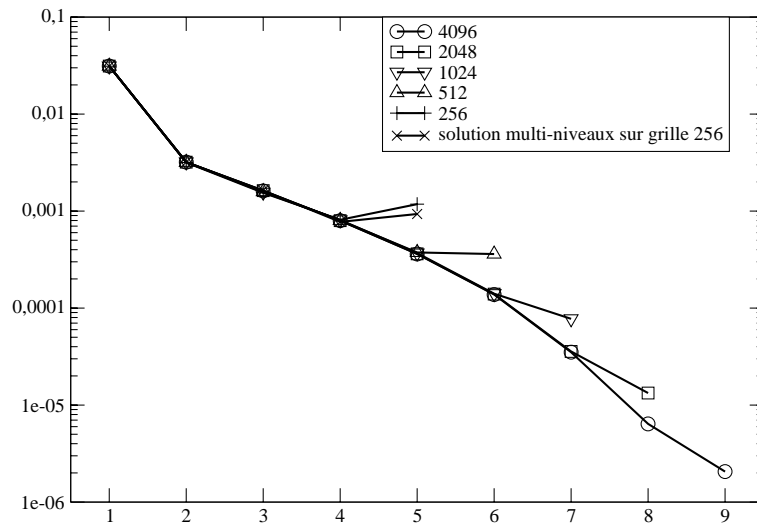


FIGURE 2.41 – Energie des niveaux d'échelle pour chaque simulation.

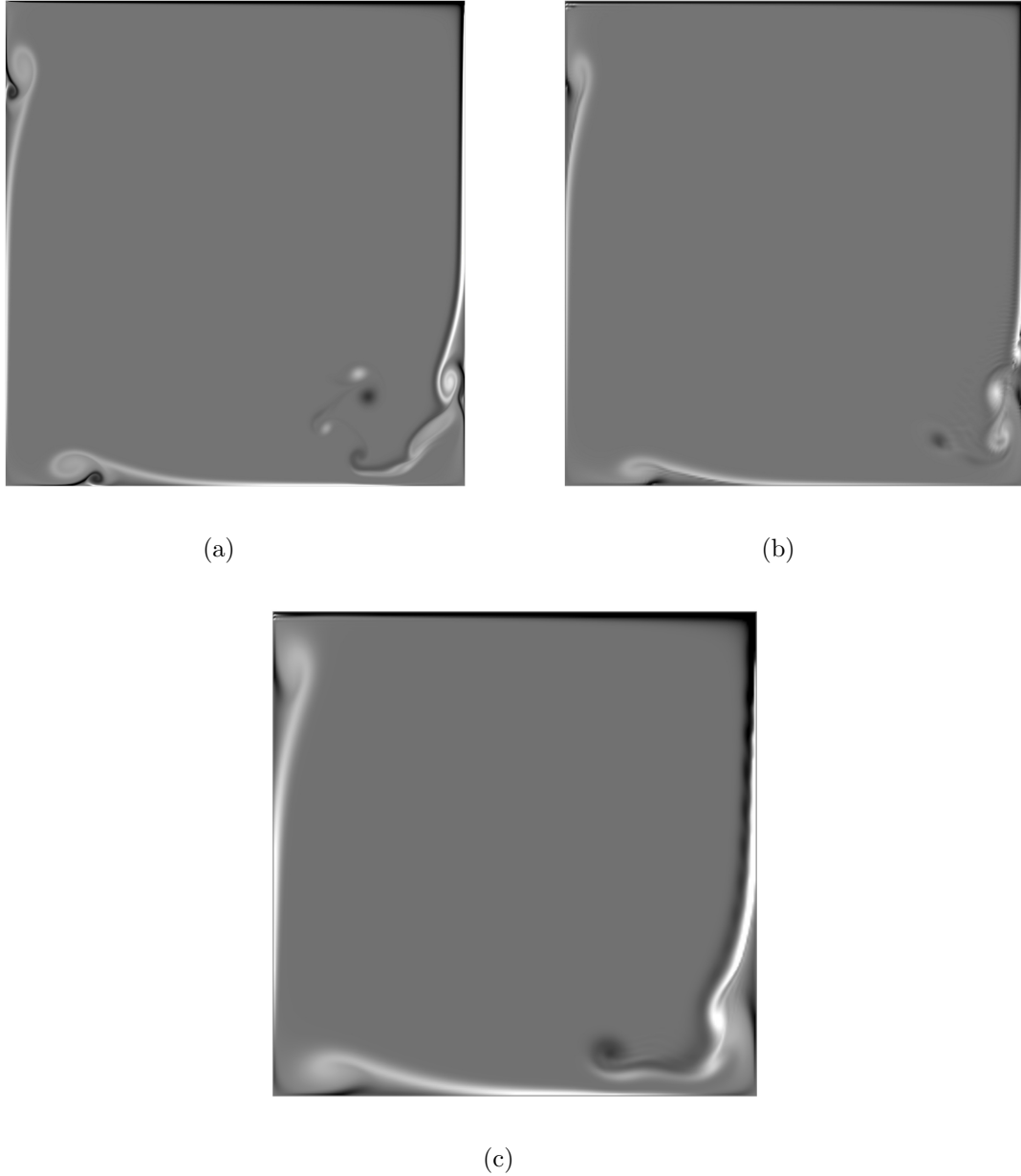


FIGURE 2.42 – La viscosité du fluide vaut 10^{-5} , on a représenté la vorticité du champ de vitesse, au temps $t = 4$, de la solution numérique directe obtenue sur une grille à 1024^2 points (a), 256^2 points (b) et de la solution multi-niveaux sur une grille à 256^2 points (c).

Chapitre 3

Nouveau schéma pour la simulation d'écoulements autour d'obstacles

Sommaire

3.1	Description du problème	128
3.1.1	Le domaine d'étude	128
3.1.2	Le nombre de Reynolds	129
3.1.3	L'obstacle	129
3.2	Le placement des inconnues	131
3.2.1	Le maillage	131
3.2.2	Ratios	131
3.2.3	Placement des inconnus	134
3.3	Discrétisation de l'étape de prédiction	134
3.3.1	Discrétisation du Laplacien	135
3.3.2	Approximation de la non-linéarité	137
3.4	Discretisation de l'étape de correction	154
3.4.1	La divergence discrète en présence d'un obstacle	155
3.4.2	Gradient de pression et opérateur d'interpolation	157
3.5	Description du solveur rapide	159
3.6	Simulations numériques directes	160
3.6.1	Écoulements stationnaires	161
3.6.2	Écoulements à nombres de Reynolds modérés : $Re=80$ et 200	170
3.6.3	Écoulements à nombre de Reynolds élevé : $Re=9500$	174
3.7	Simulations multi-niveaux : résultats préliminaires	174

3.1 Description du problème

On considère l'écoulement bi-dimensionnel, supposé incompressible, d'un fluide newtonien et homogène. À l'instant initial, le fluide se déplace uniformément selon une vitesse horizontale $(u_\infty, 0)$, quand un obstacle de forme quelconque (décrit par une courbe fermée) est placé dans l'écoulement. On s'intéresse à la dynamique du fluide au voisinage de l'obstacle.

3.1.1 Le domaine d'étude

Alors que le phénomène physique que nous souhaitons modéliser se déroule dans un domaine aux dimensions infinies, l'étude numérique que nous présentons nécessite un domaine aux dimensions finies. Le domaine de calcul doit être assez grand, afin de minimiser l'effet des conditions aux limites sur le développement de la solution. De plus, on remarque que lorsque la finesse du maillage est conservée, la taille du domaine est directement reliée au nombre d'inconnues, c'est à dire au temps de calcul. Il faut donc trouver un compromis entre l'influence du bord et le coût de calcul. Nous choisissons un domaine de calcul rectangulaire, noté Ω , défini par :

$$\Omega = [-X_u, X_d] \times [-A, A].$$

Sa longueur est égale à $L = X_u + X_d$ et sa hauteur est égale à $H = 2A$ (voir Figure 3.1). On

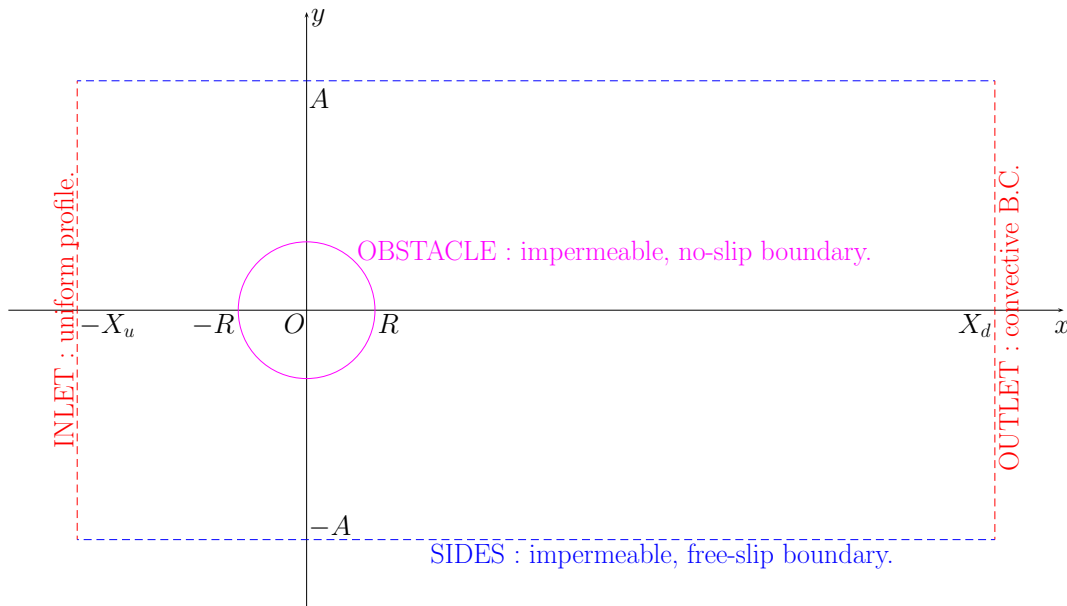


FIGURE 3.1 – Domaine de calcul.

positionne le centre de gravité de l'obstacle à l'origine $(0, 0)$. Le diamètre de l'obstacle, noté D , est normalisé à 1, son rayon est $R = D/2$. Jusqu'à présent, les auteurs d'articles au sujet de l'écoulement autour d'un obstacle ne semblent pas s'accorder sur une taille du domaine idéale. En effet, le tableau 3.2 montre à quel point les dimensions des domaines utilisés sont variables.

auteur	X_u	X_d	A
Kirkpatrick [46]	20	40	20
Ye [81], Chung [23]	15	15	15
Botella [7]	8	15	8

FIGURE 3.2 – Quelques dimensions de domaines utilisés pour un écoulement à nombre de Reynolds $Re = 40$.

3.1.2 Le nombre de Reynolds

Selon la valeur du nombre de Reynolds, on distingue plusieurs régimes de sillage. Ces propos sont illustrés par la Figure 3.1.2).

- $Re < 1$: les forces de viscosité sont dominantes, le fluide épouse parfaitement les contours de l'obstacle (Figures 3.3(a)). Dans ce cas, on peut approcher les équations de Navier-Stokes par les équations de Oseen, plus simples. Ces équations ont été beaucoup étudiée au début du vingtième siècle, à cet époque on cherchait des solutions analytiques. On trouve plus de détails dans le livre [3].
- $1 < Re < 50$: l'écoulement s'organise de façon stable autour de l'obstacle, on remarque la présence de deux zones de recirculation à l'arrière de l'obstacle (Figure 3.3(b)).
- $50 < Re < 5\,000$: alors que les forces de viscosité tendent à stabiliser les mouvements du fluide en amortissant les perturbations, les forces d'inertie ont un effet déstabilisateur. Ainsi, on observe que lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 50, la stabilité du régime stationnaire n'est plus assurée. On assiste alors à une transition de régime. Dans ce cas, le sillage fait apparaître l'émission alternée de tourbillons (Figure 3.3(c)) : c'est l'allée tourbillonnaire de Von Karman.
- $5\,000 < Re < 300\,000$: la couche limite autour du cylindre reste laminaire du côté amont et devient turbulente à partir d'un point de décollement, situé à un angle de l'ordre de 80° . Il existe alors un large sillage turbulent (Figure 3.3(d)). C'est le régime subcritique.
- Au-delà du nombre de Reynolds critique $Re_c \approx 300\,000$, le décollement s'effectue plus en aval (Figure 3.3(e)), le sillage est plus étroit et la force de traînée chute brutalement (phénomène de crise de traînée). C'est le régime supercritique.

3.1.3 L'obstacle

L'obstacle est délimité par une courbe fermée Γ comprise dans Ω . Comme le montre la Figure 3.4, on définit Ω^S comme l'ensemble délimité par la frontière Γ et l'ensemble Ω^F comme le complémentaire de $\Omega^S \cup \Gamma$ dans Ω . Le domaine Ω se décompose en

$$\Omega = \Omega^S \cup \Omega^F \cup \Gamma.$$

L'ensemble Ω^S (resp. Ω^F) est appelé partie solide (resp. partie fluide). Pour prendre en compte l'obstacle, on définit la distance algébrique à la courbe Γ . C'est une fonction définie sur Ω à

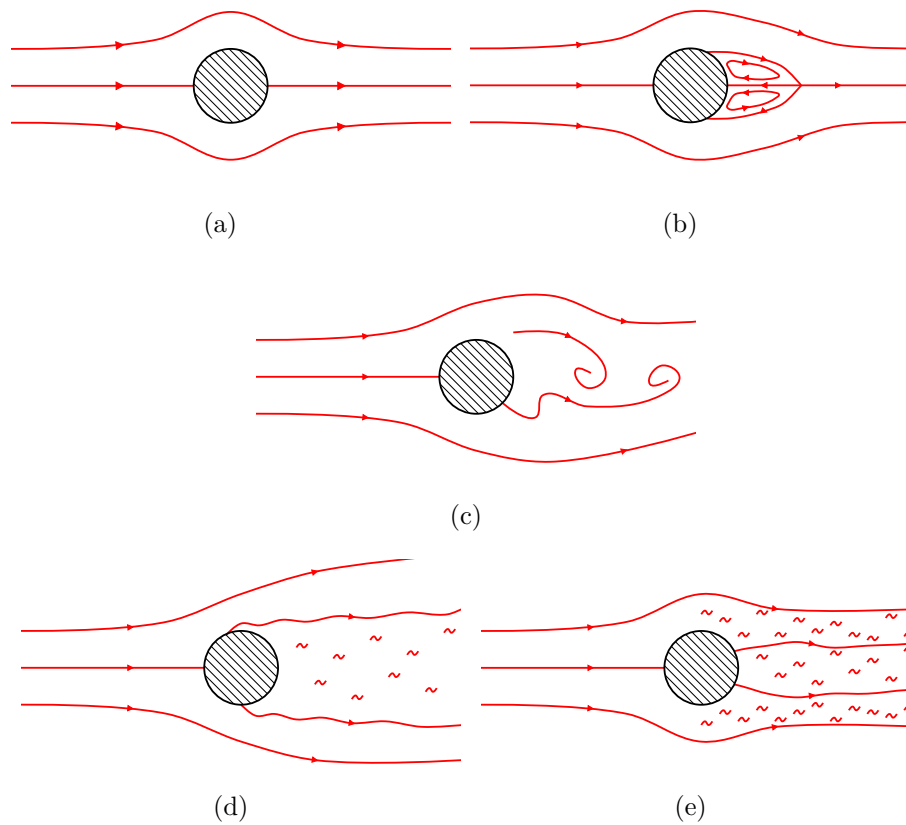


FIGURE 3.3 – Différents types de sillage : (a) écoulement dit « rampant », (b) deux zones de recirculation, (c) allée tourbillonnaire de Von Karman, (d) couche limite laminaire, sillage turbulent large, (e) couche limite turbulente, sillage turbulent étroit.

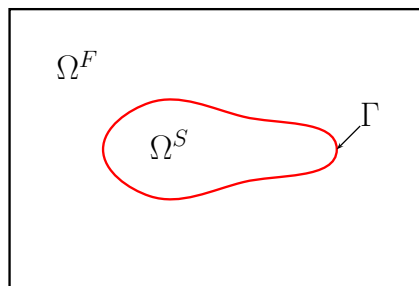


FIGURE 3.4 – Écoulement autour d'un obstacle : décomposition du domaine d'étude.

valeurs réelles qui associe à tout point $(x, y) \in \Omega$, la distance algébrique de (x, y) à Γ . Par convention, on suppose que la distance algébrique est négative à l'intérieur de Ω^F , on a donc

$$\begin{aligned} d : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{d = 0\} \\ \Omega^F &= \{d < 0\} \\ \Omega^S &= \{d > 0\} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

3.2 Le placement des inconnues

Le domaine Ω est discrétisé à l'aide d'un maillage cartésien.

3.2.1 Le maillage

Soit $\{x_i, 0 \leq i \leq n_\ell\}$ une subdivision de l'intervalle $[-X_u, X_d]$ et $\{y_j, 0 \leq j \leq n_h\}$ une subdivision de l'intervalle $[-A, A]$. Le domaine Ω est discrétisé à l'aide du maillage cartésien

$$\mathcal{G} = \{(x_i, y_j), 0 \leq i \leq n_\ell, 0 \leq j \leq n_h\}.$$

La subdivision $(y_j)_{j=1, \dots, n_h}$ est uniforme, de pas $h = 2A/n_h$, cela permet d'appliquer une transformée de Fourier discrète dans la direction verticale. Cette transformation est à la base de la méthode de résolution des systèmes linéaires que nous utilisons. Dans la direction horizontale, le maillage est uniforme dans un voisinage de l'obstacle (pour $x \in [-D, D]$ par exemple). Dans cette région le pas d'espace est identique dans les deux directions. De façon générale, la subdivision $(x_i)_{i=0, \dots, n_\ell}$ est l'image d'une subdivision uniforme $(x_i^{uni})_{i=0, \dots, n_\ell}$ par une application régulière φ

$$x_i = \varphi(x_i^{uni}). \quad (3.2.1)$$

On note $\ell_i = x_i - x_{i-1}$ le pas d'espace dans la direction horizontale. On a représenté sur la Figure 3.5 un exemple de pas d'espace ℓ_i en fonction de la position $x \in [-X_u, X_d]$. Le pas d'espace est constant pour $x \in [-1, 1]$ et il augmente en dehors de cet intervalle. La précision du maillage est donc maximale au voisinage de l'obstacle.

3.2.2 Ratios

On note $d_{i,j}$ la distance algébrique entre le point (x_i, y_j) et l'obstacle :

$$d_{i,j} = d(x_i, y_j) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n_\ell \text{ et } 0 \leq j \leq n_h \quad (3.2.2)$$

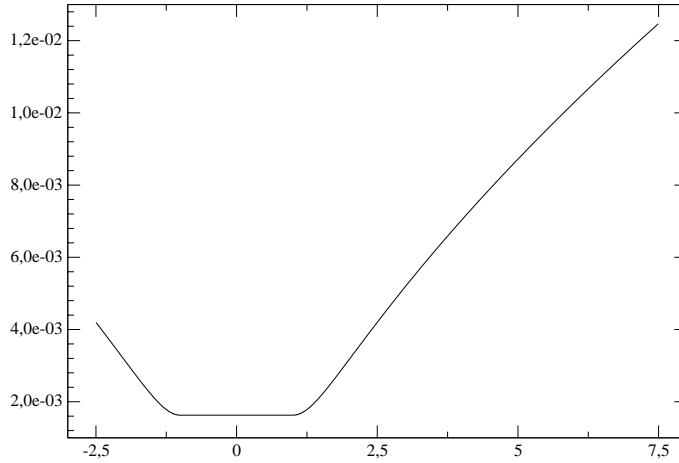


FIGURE 3.5 – Pas d'espace dans la direction horizontale.

Comme dans [7], on définit, pour chaque face de chaque cellules, une quantité qui sert à imposer la condition aux limites sur l'obstacle.

Définition 3.2.1. Soient i et j deux entiers tels que $0 \leq i \leq n_\ell$ et $1 \leq j \leq n_h$. On appelle **ratio** de la face $\sigma_{ij}^u = x_i \times [y_{j-1}, y_j]$ le réel r_{ij}^u défini par

$$r_{ij}^u = \begin{cases} 0 & \text{si } d_{ij} \geq 0 \text{ et } d_{i,j-1} \geq 0, \\ \frac{d_{i,j-1}}{d_{i,j-1} - d_{ij}} & \text{si } d_{ij} \geq 0 \text{ et } d_{i,j-1} < 0, \\ \frac{d_{ij}}{d_{ij} - d_{i,j-1}} & \text{si } d_{ij} < 0 \text{ et } d_{i,j-1} \geq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Le ratio r_{ij}^u est compris entre 0 et 1, il est calculé à partir de la donnée de la distance algébrique en chaque point du maillage (voir Figure 3.6). Le ratio représente la proportion du segment $\sigma_{ij}^u = \{x_i\} \times [y_{j-1}, y_j]$ qui est inclus dans la partie fluide du domaine, autrement dit :

$$r_{ij}^u \approx \frac{|\sigma_{ij}^u \cap \Omega^F|}{|\sigma_{ij}^u|}. \quad (3.2.4)$$

Remarque 3.2.1. Ici, on a fait l'approximation que d est linéaire sur le segment σ_{ij}^u (approximation à l'ordre 1). Pour améliorer la précision, on pourrait appliquer une méthode de Newton à la résolution de

$$d = 0 \quad \text{sur} \quad \sigma_{ij}^u.$$

Soit Γ_h la courbe fermée, linéaire par morceaux sur chaque maille, qui coupe les segments σ_{ij}^u et σ_{ij}^v en respectant exactement les ratios r_{ij}^u et r_{ij}^v (voir Figure 3.7). Le schéma numérique que nous présentons assimile la courbe Γ à Γ_h .

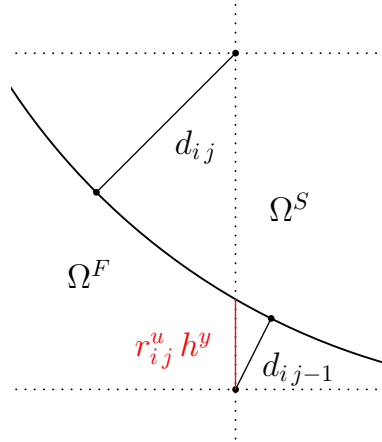


FIGURE 3.6 – Calcul du ratio r_{ij}^u à partir de la distance algébrique.

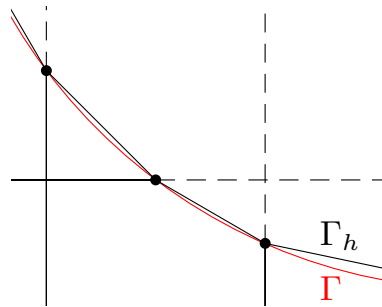


FIGURE 3.7 – Approximation de la courbe Γ .

3.2.3 Placement des inconnus

Placement de la vitesse

Dans la partie fluide du domaine, on approche u au milieu du segment $\sigma_{ij}^u \cap \Omega^F$. Les inconnues situées dans la partie solide du domaine sont placées au milieu de la face σ_{ij}^u . Ces inconnues, notées u_{ij} , sont donc des approximations de la solution exacte u au point M_{ij}^u défini par :

$$M_{ij}^u = \begin{cases} (x_i, y_{j-1} + 0.5 r_{ij}^u h) & \text{si } d_{ij} > 0 \text{ et } d_{ij-1} \leq 0, \\ (x_i, y_j - 0.5 r_{ij}^u h) & \text{si } d_{ij} < 0 \text{ et } d_{ij-1} \geq 0, \\ (x_i, (y_{j-1} + y_j) / 2) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Certaines inconnues peuvent donc être positionnées très près de l'obstacle. La composante verticale de la vitesse est placée sur la maillage de façon analogue. Cette position des inconnues de vitesse permet d'exprimer facilement la divergence discrète sur une maille coupée.

Placement de la pression

La pression p est calculée au centre de la maille K_{ij}

$$p_{ij} \approx p \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2} \right). \quad (3.2.6)$$

Lorsqu'une maille est coupée, le gradient de la pression sera approché au milieu de l'arête $\sigma_{ij} \cap \Omega^F$ par un formule d'interpolation adaptée (voir Figure 3.8).

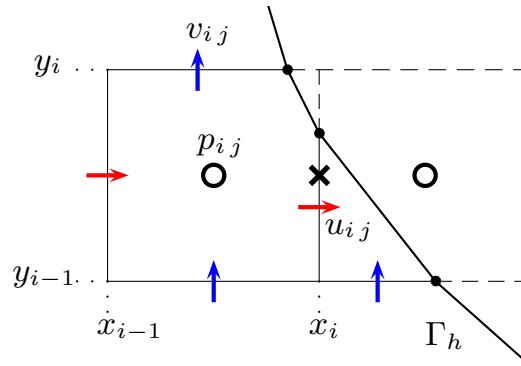


FIGURE 3.8 – Placement des inconnues sur le maillage. On a représenté la maille K_{ij} .

3.3 Discrétisation de l'étape de prédiction

Afin de prendre en compte l'obstacle, nous proposons une discrétisation du laplacien et de la non-linéarité spécifique au traitement du bord. Loin de l'obstacle, les opérateurs sont discrétisés par l'approximation volumes finis usuelle.

3.3.1 Discrétisation du Laplacien

Soient $1 \leq i \leq n_\ell - 1$ et $1 \leq j \leq n_h$. On distingue plusieurs cas :

1. si $r_{ij}^u = r_{i+1j}^u = r_{i-1j}^u = r_{ij+1}^u = r_{ij-1}^u = 1$, alors l'inconnue $u_{i,j}$ est dans la partie fluide du domaine et elle est assez loin de l'obstacle pour utiliser la formulation volumes finis suivante :

$$\begin{aligned} \int_{K_{ij}^u} \Delta u \, d\mathbf{x} &= \int_{\partial K_{ij}^u} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \\ &\approx h \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{l_{i+1}} - h \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{l_i} \\ &\quad + (l_i + l_{i+1}) \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2h} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Cette approximation est d'ordre deux sous l'hypothèse de régularité du maillage.

2. si $r_{ij}^u = 0$, alors on utilise le même schéma que ci-dessus. Pourtant, dans ce cas, $u_{i,j}$ est positionnée dans la partie solide du domaine, ce n'est pas une inconnue du problème.
3. sinon, on utilise un schéma différences fines d'ordre un pour approcher l'opérateur Laplacien au point M_{ij}^u . L'erreur de troncature sera donc localement d'ordre un (seulement à proximité de l'obstacle). Le principe de super-convergence démontré par Yamamoto [58] est valable dans ce contexte, l'ordre global du schéma n'est donc pas affecté.

On cherche une approximation du laplacien exacte pour un polynôme de la forme

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2. \quad (3.3.2)$$

Nous utilisons pour cela des valeurs parmi les voisins directs de $u_{i,j}$. Nous notons \mathcal{V} cet ensemble, il est défini par

$$\mathcal{V} = \{u_{i+p,j+q}; |p| \leq 1, |q| \leq 1\}.$$

Nous utilisons également la donnée de la vitesse sur le bord de l'obstacle

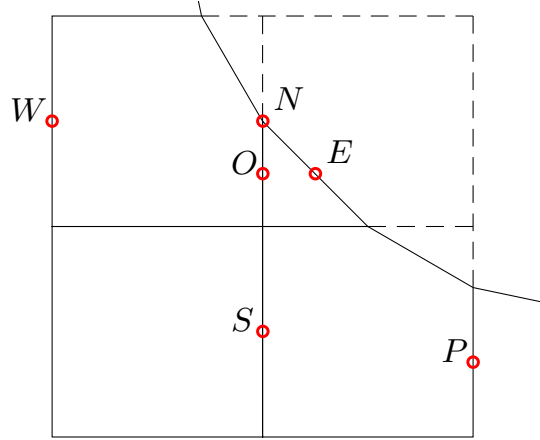
$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

De façon plus précise, nous procédons comme suit.

- (a) Identifier les points d'interpolation : Notons O , S , N , E , W et P les coordonnées des points qui servent à l'interpolation. Les cinq premiers points correspondent respectivement aux points origine, sud, nord, est et ouest, comme illustré sur la Figure 3.9. Le sixième et dernier point n'a pas de position particulière par rapport à l'origine, il sera appelé point supplémentaire, car il n'intervient pas dans la discrétisation volumes finis usuelle du Laplacien. Ces six points sont définis comme suit :

– le point origine

$$O = M_{ij}^u. \quad (3.3.3)$$


 FIGURE 3.9 – Points d'interpolation intervenant dans l'approximation du Laplacien pour u .

– le point nord

$$N = \begin{cases} (x_i, y_{j-1} + r_{ij}^u h) & \text{si } d_{ij} \geq 0, \\ M_{ij+1}^u & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

– le point sud

$$S = \begin{cases} (x_i, y_j - r_{ij}^u h) & \text{si } d_{ij-1} \geq 0, \\ M_{ij-1}^u & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

– le point ouest

$$W = \begin{cases} \left(x_{i-1} + \ell \frac{d(x_{i-1}, y_O)}{d(x_{i-1}, y_O) - d(x_i, y_O)}, y_O \right) & \text{si } r_{i-1j}^u = 0, \\ M_{i-1j}^u & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

– le point est

$$E = \begin{cases} \left(x_{i+1} - \ell \frac{d(x_{i+1}, y_O)}{d(x_{i+1}, y_O) - d(x_i, y_O)}, y_O \right) & \text{si } r_{i+1j}^u = 0, \\ M_{i-1j}^u & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

– enfin le point supplémentaire P est le point le plus proche de l'obstacle et appartenant à Ω^F parmi

$$\{M_{i-1j-1}^u, M_{i-1j+1}^u, M_{i+1j-1}^u, M_{i+1j+1}^u\}.$$

(b) Calculer les coefficients d'interpolation. On cherche les coefficients $\alpha_M \in \mathbb{R}$, pour

$M \in \{O, N, S, W, E, P\}$, tels que

$$\sum_{M \in \mathcal{V}} \alpha_M u(M) = \Delta u(O) + \mathcal{O}(h), \quad (3.3.8)$$

pour toute fonction réelle u régulière définie sur Ω . Ce qui équivaut à résoudre le système linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} V_O & V_N & V_S & V_E & V_W & V_P \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{66}(\mathbb{R}), \quad (3.3.9)$$

où

$$V_M = \begin{pmatrix} 1 \\ (x_M - x_O) \\ (y_M - y_O) \\ (x_M - x_O)^2 \\ (x_M - x_O)(y_M - y_O) \\ (y_M - y_O)^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (3.3.10)$$

et de second membre

$$(0, 0, 0, 2, 0, 2)^t. \quad (3.3.11)$$

3.3.2 Approximation de la non-linéarité

3.3.2.1 Quelques notations particulières

On pose

$$\Delta_{max} = \max \left(h, \max_i \{\ell_i\} \right) \quad (3.3.12)$$

On définit la maille K_{ij} et les mailles décalées K_{ij}^u et K_{ij}^v par

$$\begin{aligned} K_{ij} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \\ K_{ij}^u &= [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1}, y_j], \\ K_{ij}^v &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

où

$$\begin{aligned} x_{i+1/2} &= (x_i + x_{i+1})/2, \\ y_{j+1/2} &= (y_j + y_{j+1})/2, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

et les faces « est » et « sud » de la maille K_{ij} , notées σ_{ij}^u et σ_{ij}^v sont définies par

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^u &= \{x_i\} \times [y_{j-1}, y_j], \\ \sigma_{ij}^v &= [x_{i-1}, x_i] \times \{y_j\}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

3.3.2.2 Propriété fondamentale du terme non-linéaire

Proposition 3.3.1. *Soient u et v deux fonctions régulières définies sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) u \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (u^2) \, dx \, dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial(u^3)}{\partial x} + \frac{\partial(u^2v)}{\partial y} \, dx \, dy \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

On a un résultat analogue pour la deuxième composante de la non-linéarité. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (u^2 + v^2) \, dx \, dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (u(u^2 + v^2)) + \frac{\partial}{\partial y} (v(u^2 + v^2)) \, dx \, dy \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

La dernière intégrale se réduit en

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (u^2 + v^2) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (3.3.18)$$

Si on suppose que la composante normale de la vitesse est nulle sur le bord du domaine et que le champ de vitesse est à divergence nulle, il vient

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} \, dx \, dy = 0 \quad (3.3.19)$$

C'est une propriété fondamentale du terme non-linéaire, déjà utilisée dans la Section 1.1, pour démontrer la majoration de l'énergie cinétique (1.1.67). Sous l'hypothèse de glissement

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (3.3.20)$$

la solution \mathbf{u} du système de Navier-Stokes incompressibles vérifie l'équation d'énergie suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \quad (3.3.21)$$

Dans (3.3.21), le terme $\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}$ est l'injection d'énergie apportée par la force extérieure et l'enstrophie $\nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}$ est la dissipation de l'énergie par effet visqueux. La compétition entre ces deux termes induit les variations de l'énergie cinétique. On désigne par $(NL_1(\mathbf{u}))_{ij}$ une approximation discrète de la première composante de la non-linéarité intégrée sur la maille K_{ij}^u et $(NL_2(\mathbf{u}))_{ij}$ une approximation discrète de la première composante de la non-

linéarité intégrée sur la maille K_{ij}^v , c'est à dire

$$\begin{aligned} (NL_1(\mathbf{u}))_{ij} &\approx \int_{K_{ij}^u} \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) dx dy, \\ (NL_2(\mathbf{u}))_{ij} &\approx \int_{K_{ij}^v} \left(\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Il semble important que la discrétisation de la non-linéarité vérifie un équivalent discret de la propriété (3.3.19).

Définition 3.3.1. Soit $NL(\mathbf{u}) = (NL_1(\mathbf{u}), NL_2(\mathbf{u}))$ un champ réel bi-dimensionnel. On dira que $NL(\mathbf{u})$ est une approximation de la non-linéarité **conservative** lorsque le réel

$$B(\mathbf{u}) = \sum_{ij} (NL_1(\mathbf{u}))_{ij} u_{ij} + (NL_2(\mathbf{u}))_{ij} v_{ij} \quad (3.3.23)$$

est nul pour tout champ de vitesse (u, v) à divergence discrète nulle dont la composante normale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ s'annule sur le bord du domaine.

3.3.2.3 En absence d'obstacle

Dans cette section, on définit une approximation du terme non-linéaire du second ordre, valable en absence d'obstacle, ou plus généralement loin de l'obstacle. Dans ce cas, u_{ij} est une approximation de u au milieu de la face σ_{ij}^u , c'est à dire

$$u_{ij} \approx u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) \quad (3.3.24)$$

et l'inconnue v_{ij} est une approximation de v au milieu de la face σ_{ij}^v , c'est à dire

$$v_{ij} \approx v(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j) \quad (3.3.25)$$

La divergence discrète de \mathbf{u} intégrée sur la maille K_{ij} , notée $(D(\mathbf{u}))_{ij}$, est définie par

$$(D(\mathbf{u}))_{ij} = h(u_{ij} - u_{i-1j}) + \ell(v_{ij} - v_{ij-1}) \quad (3.3.26)$$

Définition 3.3.2. Soient $1 \leq j \leq n_h$ et $1 \leq i \leq n_l - 1$, on définit une approximation de la première composante du terme non-linéaire

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}$$

intégré sur la maille K_{ij}^u par

$$(NL_1(\mathbf{u}))_{ij} = h \left(u_{i+\frac{1}{2}j}^2 - u_{i-\frac{1}{2}j}^2 \right) + \ell \left(u_{ij+\frac{1}{2}} v_{i+\frac{1}{2}j} - u_{ij-\frac{1}{2}} v_{i+\frac{1}{2}j-1} \right), \quad (3.3.27)$$

avec

$$\begin{aligned}
 u_{i+\frac{1}{2}j} &= (u_{ij} + u_{i+1j}) / 2, \\
 u_{ij+\frac{1}{2}} &= (u_{ij} + u_{ij+1}) / 2, \\
 v_{i+\frac{1}{2}j} &= (v_{ij} + v_{i+1j}) / 2.
 \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

De même, pour $1 \leq j \leq n_h - 1$ et $1 \leq i \leq n_l$, on définit une approximation de la seconde composante du terme non-linéaire

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y}$$

intégré sur la maille K_{ij}^v par

$$(NL_2(\mathbf{u}))_{ij} = \ell \left(v_{ij+\frac{1}{2}}^2 - v_{ij-\frac{1}{2}}^2 \right) + h \left(v_{i+\frac{1}{2}j} u_{ij+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}j} u_{i-1j+\frac{1}{2}} \right). \tag{3.3.29}$$

Remarque 3.3.1. Lorsque le maillage n'est pas uniforme dans la direction horizontale, on remplace dans (3.3.27) ℓ par $(\ell_i + \ell_{i+1})/2$ et dans (3.3.29) ℓ par ℓ_i .

Proposition 3.3.2. Sous les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned}
 (D(\mathbf{u}))_{ij} &= 0 \quad \forall i, j, \\
 u_{0j} &= 0 = u_{n_\ell j} \quad \forall j, \\
 v_{i0} &= 0 = v_{in_h} \quad \forall i,
 \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

la formule d'approximation définie par 3.3.27 est conservative au sens suivant

$$B(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} (NL_1(\mathbf{u}))_{ij} u_{ij} + \sum_{j=1}^{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} (NL_2(\mathbf{u}))_{ij} v_{ij} = 0. \tag{3.3.31}$$

Plus précisément, on montre que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} (NL_1(\mathbf{u}))_{ij} u_{ij} + \sum_{j=1}^{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} (NL_2(\mathbf{u}))_{ij} v_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \frac{1}{4} \left((D(\mathbf{u}))_{ij} + (D(\mathbf{u}))_{i+1j} \right) u_{ij}^2 \\
&+ \sum_{j=1}^{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} \frac{1}{4} \left((D(\mathbf{u}))_{ij} + (D(\mathbf{u}))_{ij+1} \right) v_{ij}^2 \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n_h} h \left(u_{n_\ell j} u_{n_\ell-1j}^2 + u_{n_\ell-1j} u_{n_\ell j}^2 - u_{1j} u_{0j}^2 - u_{0j} u_{1j}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_\ell} \ell \left(v_{i n_h} v_{i n_h-1}^2 + v_{i n_h-1} v_{i n_h}^2 - v_{i1} v_{i0}^2 - v_{i0} v_{i1}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \ell \left(u_{i n_h+1} u_{i n_h} (v_{i n_h} + v_{i+1 n_h}) - u_{i1} u_{i0} (v_{i0} + v_{i+10}) \right) \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n_h-1} h \left(v_{n_\ell+1j} v_{n_\ell j} (u_{n_\ell j} + u_{n_\ell j+1}) - v_{1j} v_{0j} (u_{0j} + u_{0j+1}) \right).
\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 4 \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} u_{ij} (NL_1(\mathbf{u}))_{ij} &= \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} u_{ij} \left(h((u_{ij} + u_{i+1j})^2 - (u_{i-1j} + u_{ij})^2) \right. \\
 &\quad \left. + \ell((u_{ij} + u_{i+1j})(v_{ij} + v_{i+1j}) - (u_{i-1j} + u_{ij})(v_{i-1j} + v_{i+1j-1})) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{n_h} \left\{ h \left(\sum_{i=1}^{n_\ell-1} 2u_{ij}^2 (u_{i+1j} - u_{i-1j}) + \sum_{i=2}^{n_\ell} u_{ij}^2 u_{i-1j} - \sum_{i=0}^{n_\ell-2} u_{ij}^2 u_{i+1j} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \ell u_{ij}^2 (v_{i+1j} + v_{ij} - v_{i+1j-1} - v_{ij-1}) \right\} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \ell \left(\sum_{j=1}^{n_h} u_{ij} u_{i+1j} (v_{ij} + v_{i+1j}) - \sum_{j=0}^{n_h-1} u_{i+1j} u_{ij} (v_{ij} + v_{i+1j}) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{n_h} \left\{ \sum_{i=1}^{n_\ell-1} h u_{ij}^2 (u_{i+1j} - u_{i-1j}) + h (u_{n_\ell j}^2 u_{n_\ell-1j} - u_{1j}^2 u_{0j}) \right. \\
 &\quad \left. + u_{n_\ell-1j}^2 u_{n_\ell j} - u_{0j}^2 u_{1j} \right\} + \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \ell u_{ij}^2 (v_{i+1j} + v_{ij} - v_{i+1j-1} - v_{ij-1}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \ell (u_{i n_h} u_{i n_h+1} (v_{i+1 n_h} + v_{i n_h}) - u_{i1} u_{i0} (v_{i+10} + v_{i0})) \\
 &= \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} u_{ij}^2 (D(\mathbf{u}))_{ij} + D(\mathbf{u})_{i+1j} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n_h} h (u_{n_\ell j}^2 u_{n_\ell-1j} - u_{1j}^2 u_{0j} + u_{n_\ell-1j}^2 u_{n_\ell j} - u_{0j}^2 u_{1j}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \ell (u_{i n_h} u_{i n_h+1} (v_{i+1 n_h} + v_{i n_h}) - u_{i1} u_{i0} (v_{i+10} + v_{i0}))
 \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

De la même façon, on montre que

$$\begin{aligned}
 4 \sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{j=1}^{n_h-1} v_{ij} (NL_2(\mathbf{u}))_{ij} &= \sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{j=1}^{n_h-1} v_{ij}^2 (D(\mathbf{u}))_{ij} + D(\mathbf{u})_{i,j+1} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_\ell} \ell (v_{i n_h}^2 v_{i n_h-1} - v_{i1}^2 v_{i0} + v_{i n_h-1}^2 v_{i n_h} - v_{i0}^2 v_{i1}) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n_h-1} h (v_{n_\ell j} v_{n_\ell+1j} (u_{n_\ell j+1} + u_{n_\ell j}) - v_{1j} v_{0j} (u_{0j+1} + u_{0j}))
 \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

□

Remarque 3.3.2. *Ce résultat est bien conforme à ce qu'on obtient dans le cas continu, voir proposition 3.3.1.*

Par construction, $(NL_1(\mathbf{u}))_{ij}$ est une approximation de la première composante de la

non-linéarité $\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}$ intégrée sur la maille K_{ij}^u . Pour obtenir une approximation de la non-linéarité au point où est localisé u_{ij} il suffit de diviser $(NL_1(\mathbf{u}))_{ij}$ par l'aire de la maille K_{ij}^u . La longueur de cette maille est égale à $(\ell_i + \ell_{i+1})/2$ et sa hauteur est égale à h .

Proposition 3.3.3. *Approximation ordre deux*

Si u et v sont des fonctions suffisamment régulières on a

$$\begin{aligned} \frac{2(NL_1(\mathbf{u}))_{ij}}{(\ell_i + \ell_{i+1})h} &= \frac{\partial(u^2)}{\partial x}(x_i, y_{j-1/2}) + \frac{\partial(uv)}{\partial y}(x_i, y_{j-1/2}) \\ &+ \frac{(\ell_{i+1} - \ell_i)}{4} \left(\frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2}(x_i, y_{j-1/2}) + 2 \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i, y_{j-1/2}) \right) \\ &+ \frac{1}{2} (\ell_{i+1}^2 + \ell_i^2 - \ell_i \ell_{i+1}) \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i, y_{j-1/2}) \\ &+ \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3(uv)}{\partial y^3}(x_i, y_{j-1/2}) - \frac{\ell_i \ell_{i+1}}{8} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) (x_i, y_j) \\ &+ \frac{h^2}{8} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (x_i, y_j) + \mathcal{O}(\Delta_{max}^3) \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

La Figure 3.10 représente l'erreur d'approximation de la non-linéarité en fonction du pas d'espace. On observe que la pente de cette courbe se comporte en $\mathcal{O}(\Delta_{max}^2)$ (le segment tracé en noir au dessus de la courbe représente une pente en Δ_{max}^2).

Remarque 3.3.3. Dans le cas d'un maillage uniforme en x , ℓ_i est constant égal à ℓ . Le premier terme du reste disparaît ce qui donne une erreur d'approximation égale à

$$\begin{aligned} &\frac{\ell^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i, y_{j-1/2}) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3(uv)}{\partial y^3}(x_i, y_{j-1/2}) \\ &- \frac{\ell^2}{8} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) (x_i, y_j) + \frac{h^2}{8} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (x_i, y_j) + \mathcal{O}(\Delta_{max}^3) \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Remarque 3.3.4. Si le maillage dans la direction horizontale $(x_i)_{i=0\dots n_\ell}$ est l'image d'un maillage uniforme $(x_i^{uni})_{i=0\dots n_\ell}$ par une application régulière $\varphi(ih)$, alors (3.3.35) se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{(2NL_1(\mathbf{u}))_{ij}}{(\ell_i + \ell_{i+1})h} &= \frac{\partial(u^2)}{\partial x}(x_i, y_{j-1/2}) + \frac{\partial(uv)}{\partial y}(x_i, y_{j-1/2}) \\ &+ \frac{\ell^2}{4} \varphi''(x_i^{uni}) \left(\frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2}(x_i, y_{j-1/2}) + 2 \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i, y_{j-1/2}) \right) \\ &+ \frac{\ell^2}{2} (\varphi'(x_i^{uni}))^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i, y_{j-1/2}) \\ &+ \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3(uv)}{\partial y^3}(x_i, y_{j-1/2}) - \frac{\ell^2}{8} (\varphi'(x_i^{uni}))^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) (x_i, y_j) \\ &+ \frac{h^2}{8} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (x_i, y_j) + \mathcal{O}(\Delta_{max}^3) \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

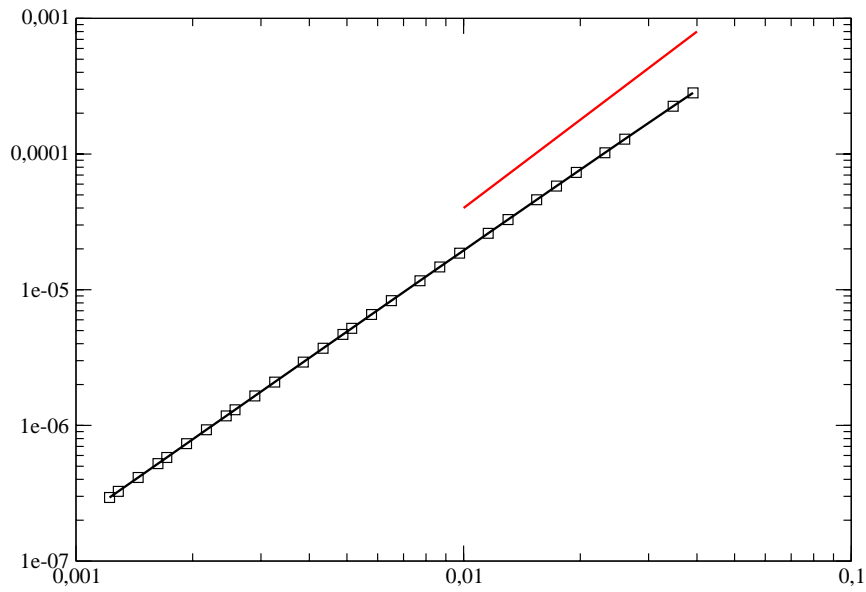


FIGURE 3.10 – Erreur d'approximation du terme non-linéaire loin de l'obstacle. On observe une convergence d'ordre deux.

où x_i^{uni} est la subdivision régulière sous-jaçante. Ainsi $(NL_1(\mathbf{u}))_{ij}$ approche bien $\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}$ à l'ordre deux au point $(x_i, y_{j-1/2})$.

Nous présentons dans les deux paragraphes suivants deux approximations du terme non-linéaire, valables à proximité d'un obstacle. La première est de type Volumes Finis. Lorsqu'on intègre le terme non-linéaire sur une maille coupée par l'obstacle, on peut toujours se ramener à une intégrale sur le bord. Pour obtenir une approximation des flux sur les arêtes on a recours à une interpolation des flux du second ordre. Sous certaines hypothèses portant sur le maillage, on montre que l'erreur d'approximation de la non-linéarité est d'ordre un. Dans la seconde approche, une approximation du terme non-linéaire est dérivée de la notion de conservation définie dans 3.3.1.

3.3.2.4 Approximation de la non-linéarité par une approche Volumes Finis. Approximation par une reconstruction des flux au second ordre

Dans cette section, nous construisons une approximation du terme non-linéaire. Nous traitons uniquement la première composante. On a une formule analogue pour la deuxième composante. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq n_\ell - 1$ et $1 \leq j \leq n_h$. On suppose que le ratio r_{ij}^u est strictement positif. Dans ce cas, u_{ij} est localisée dans la partie fluide du domaine, c'est une inconnue du problème. On remarque que l'ensemble $\Omega_h^F \cap K_{ij}^u$ est de mesure non nulle. On peut donc considérer l'intégrale \mathcal{I}_{ij} du terme non-linéaire sur ce domaine

$$\mathcal{I}_{ij} = \int_{\Omega_h^F \cap K_{ij}^u} \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) d\mathbf{x}. \quad (3.3.38)$$

On se ramène à une intégrale sur le bord

$$\mathcal{I}_{ij} = \int_{\partial \tilde{K}_{ij}^u} (u^2 n_x + (uv) n_y) dS, \quad (3.3.39)$$

où

$$\tilde{K}_{ij}^u = \Omega_h^F \cap K_{ij}^u, \quad (3.3.40)$$

est la partie de la maille K_{ij}^u occupée par le fluide. Comme on le voit sur la Figure 3.11, la maille coupée \tilde{K}_{ij}^u est un polygone. Il s'ensuit que sa frontière est une ligne brisée fermée. Les segments qui la composent peuvent être classés en fonction de leur orientation : horizontal, vertical ou oblique. On introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned} F_{ij}^E &= \int_{\Omega_h^F \cap S_{i-\frac{1}{2}j}^u} u^2 dS, \\ F_{ij}^N &= \int_{\Omega_h^F \cap S_{i+\frac{1}{2}j}^v} uv dS, \\ F_{ij}^B &= \int_{\partial\{K_{ij}^u \cap \Omega_h^F\} \cap \Gamma_h} (u^2 n_x + (uv) n_y) dS. \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

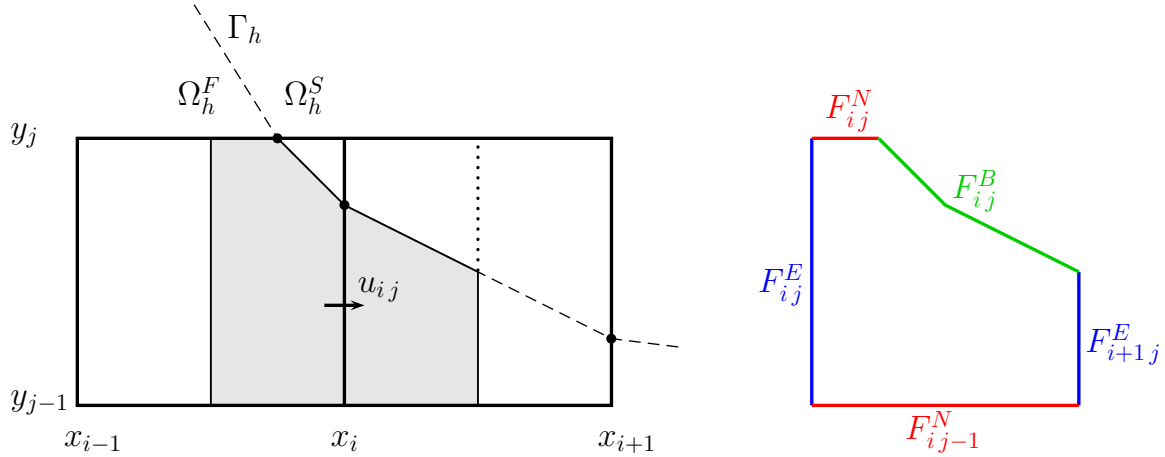


FIGURE 3.11 – Le domaine \tilde{K}_{ij}^u est représenté en gris. On introduit trois types de flux sur le bord d'une maille coupée.

On peut décomposer l'intégrale \mathcal{I}_{ij} en

$$\mathcal{I}_{ij} = F_{i+1,j}^E - F_{ij}^E + F_{ij}^N - F_{ij-1}^N + F_{ij}^B \quad (3.3.42)$$

Nous allons maintenant discrétiser les termes intervenant dans (3.3.42). Puisque ces intégrales portent sur des segments, on les approche avec précision en utilisant une formule d'intégration au point milieu. L'erreur de cette formule d'intégration numérique est d'ordre trois. On trouve plus de détails sur cette méthode d'intégration dans les propositions suivantes.

Proposition 3.3.4. *Soient a et b deux réels quelconques. Soit f une application définie sur le segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. La formule élémentaire du point milieu consiste à approcher l'intégrale*

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad (3.3.43)$$

par

$$\mathcal{I}^m(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (3.3.44)$$

Si f est de classe \mathcal{C}^2 , on a :

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}^m(f)| \leq \frac{M_2 (b-a)^3}{24}, \quad (3.3.45)$$

avec $M_2 = \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$

Proposition 3.3.5. *Soient A et B deux points du plan quelconques. Soit f une application définie sur le segment $[A, B] \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. La formule élémentaire du point milieu consiste à approcher l'intégrale*

$$\mathcal{I}(f) = \int_{[A,B]} f dS = AB \int_0^1 f(A + t(B-A))dt, \quad (3.3.46)$$

par

$$\mathcal{I}^m(f) = ABf\left(\frac{A+B}{2}\right). \quad (3.3.47)$$

Si f est de classe \mathcal{C}^2 , on a :

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}^m(f)| \leq \frac{M_2 AB^3}{24}, \quad (3.3.48)$$

avec

$$M_2 = \max_{\mathbf{x} \in [A,B]} (|\partial_{xx}f(\mathbf{x})| + |\partial_{xy}f(\mathbf{x})| + |\partial_{yy}f(\mathbf{x})|).$$

1. Discrétisation de F_{ij}^B . On pose :

$$K_{ij}^{ul} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{et} \quad K_{ij}^{ur} = [x_i, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (3.3.49)$$

ainsi que

$$\tilde{K}_{ij}^{ul} = K_{ij}^{ul} \cap \Omega_h^F \quad \text{et} \quad \tilde{K}_{ij}^{ur} = K_{ij}^{ur} \cap \Omega_h^F \quad (3.3.50)$$

Alors

$$K_{ij}^u = K_{ij}^{ul} \cup K_{ij}^{ur} \quad \text{et} \quad |K_{ij}^{ul} \cap K_{ij}^{ur}| = 0 \quad (3.3.51)$$

et

$$F_{ij}^B = \int_{\partial\{\tilde{K}_{ij}^{ul}\} \cap \Gamma_h} (u^2 n_x + (uv)n_y) dS + \int_{\partial\{\tilde{K}_{ij}^{ur}\} \cap \Gamma_h} (u^2 n_x + (uv)n_y) dS \quad (3.3.52)$$

On introduit les notations suivantes (voir Figure 3.12)

$$\begin{aligned} M^l &= (x^l, y^l) \text{ le milieu du segment } \partial\tilde{K}_{ij}^{ul} \cap \Gamma_h \\ M^r &= (x^r, y^r) \text{ le milieu du segment } \partial\tilde{K}_{ij}^{ur} \cap \Gamma_h \\ \mathbf{n}^l &= (n_x^l, n_y^l) \text{ la normale à } \Gamma_h \text{ au point } M^l \text{ dirigée de } \Omega_h^F \text{ vers } \Omega_h^S \\ \mathbf{n}^r &= (n_x^r, n_y^r) \text{ la normale à } \Gamma_h \text{ au point } M^r \text{ dirigée de } \Omega_h^F \text{ vers } \Omega_h^S \\ \ell_{ij}^{Bl} &= \text{la longueur du segment } \partial\tilde{K}_{ij}^{ul} \cap \Gamma_h \\ \ell_{ij}^{Br} &= \text{la longueur du segment } \partial\tilde{K}_{ij}^{ur} \cap \Gamma_h \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

Ce qui nous amène à approcher F_{ij}^B par

$$\begin{aligned} F_{ij}^{B \text{ app}} &= \ell_{ij}^{Bl} (u(x^l, y^l)^2 n_x^l + u(x^l, y^l)v(x^l, y^l)n_y^l) \\ &\quad + \ell_{ij}^{Br} (u(x^r, y^r)^2 n_x^r + u(x^r, y^r)v(x^r, y^r)n_y^r) \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

2. Discrétisation de F_{ij}^N . On a besoin de construire des valeurs approchées du second ordre de u et v au milieu de $\Omega_h^F \cap S_{i+\frac{1}{2}, j}^v$, notées $u_{i+\frac{1}{2}, j}$ et $v_{i+\frac{1}{2}, j}$. Pour cela, on utilise les valeurs suivantes :

$$\left\{ u_{i+\delta_1, j+\delta_2}, \delta_1 \in \{-1, 0, 1\}, \delta_2 \in \{0, 1\} \right\} \cup \left\{ v_{ij}, v_{i+1j} \right\} \quad (3.3.55)$$

Les valeurs de u et v sur la frontière Γ_h sont également utilisées, elles font partie des données du problème. On obtient $u_{i,j+\frac{1}{2}}$ et $v_{i+\frac{1}{2},j}$ en appliquant une formule d'interpolation linéaire du second ordre. Ces considérations nous amènent à approcher F_{ij}^N par

$$F_{ij}^{N\ app} = \ell_{ij}^N u_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i+\frac{1}{2},j} \quad (3.3.56)$$

où ℓ_{ij}^N est la longueur du segment $\Omega_h^F \cap S_{i+\frac{1}{2},j}^v$.

3. Discretisation de F_{ij}^E . On utilise la technique utilisée pour F_{ij}^N . Cette fois, on construit une valeur approchée de u au milieu de $\Omega_h^F \cap S_{i-\frac{1}{2},j}^u$, notée $u_{i-\frac{1}{2},j}$. On utilise pour cela les valeurs $\{u_{i-1,j}, u_{i,j}\}$ et la donnée de u sur la frontière Γ_h . Finalement, on approche F_{ij}^E par

$$F_{ij}^{E\ app} = \ell_{ij}^E (u_{i-\frac{1}{2},j})^2 \quad (3.3.57)$$

où ℓ_{ij}^E est la longueur du segment $\Omega_h^F \cap S_{i-\frac{1}{2},j}^u$.

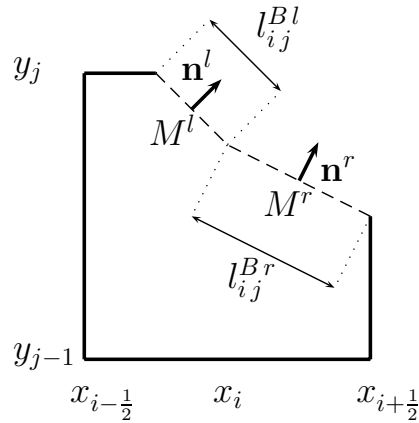
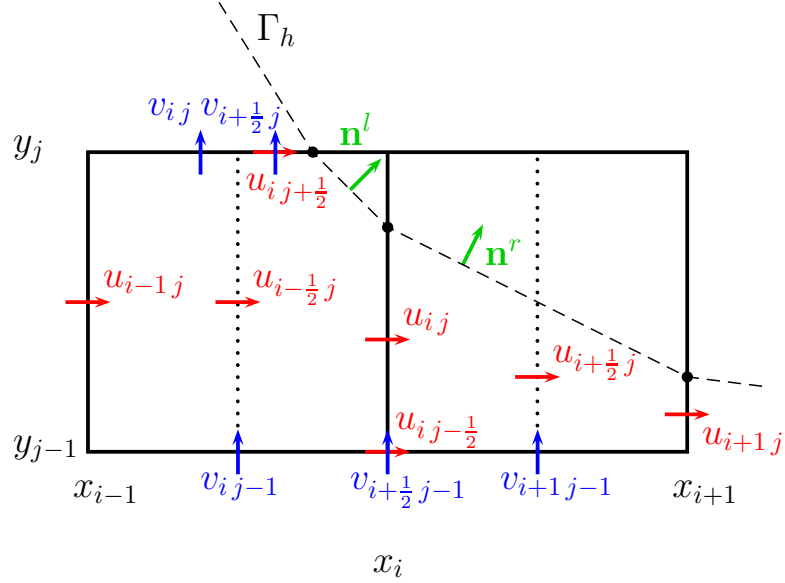


FIGURE 3.12 – La maille K_{ij}^u est coupée par l'obstacle. On a représenté les quantités mises en jeu dans le calcul de $F_{ij}^{B\ app}$.

Tous les termes de (3.3.42) ont été discrétisés. Nous sommes maintenant en mesure de définir une approximation de la première composante du terme non-linéaire, notée $NL_1(\mathbf{u})$, lorsque le placement des inconnues est de type MAC et en présence d'un obstacle.

Définition 3.3.3.

$$NL_1(\mathbf{u})_{ij} = F_{i+1,j}^{E\ app} - F_{ij}^{E\ app} + F_{ij}^{N\ app} - F_{ij-1}^{N\ app} + F_{ij}^{B\ app}, \quad (3.3.58)$$


 FIGURE 3.13 – Nouveaux flux sur le bord de \tilde{K}_{ij}^u .

avec

$$\begin{aligned}
 F_{ij}^{E,app} &= \ell_{ij}^E (u_{i-\frac{1}{2},j})^2, \\
 F_{ij}^{N,app} &= \ell_{ij}^N u_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i+\frac{1}{2},j}, \\
 F_{ij}^{B,app} &= \ell_{ij}^{Bl} (u(x^l, y^l)^2 n_x^l + u(x^l, y^l) v(x^l, y^l) n_y^l), \\
 &\quad + \ell_{ij}^{Br} (u(x^r, y^r)^2 n_x^r + u(x^r, y^r) v(x^r, y^r) n_y^r).
 \end{aligned} \tag{3.3.59}$$

Etude de l'erreur d'approximation : Les tests numériques semblent montrer que l'erreur de cette approximation est de l'ordre de h (pas d'espace du maillage).

Proposition 3.3.6. ORDRE D'APPROXIMATION DE LA FORMULE 3.3.58

On suppose l'existence d'une constante réelle strictement positive C_0 telle que

$$0 < C_0 \Delta_{max}^2 \leq \min_{|\tilde{K}_{ij}^u| > 0} |\tilde{K}_{ij}^u| \tag{3.3.60}$$

pour tout pas d'espace Δ_{max} . Soit u une fonction régulière. Alors on a le résultat suivant

$$\frac{1}{|\tilde{K}_{ij}^u|} (NL_1(\mathbf{u})_{ij} - \mathcal{I}_{ij}) = \mathcal{O}(\Delta_{max}), \tag{3.3.61}$$

pour tout (i, j) tels que $|\tilde{K}_{ij}^u| > 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\tilde{K}_{ij}^u|} (NL_1(\mathbf{u})_{ij} - \mathcal{I}_{ij}) &\leq \frac{1}{|\tilde{K}_{ij}^u|} \left(|F_{i+1j}^{E\,app} - F_{i+1j}^E| + |F_{ij}^{E\,app} - F_{ij}^E| + \right. \\
 &\quad \left. |F_{ij}^{N\,app} - F_{ij}^N| + |F_{ij-1}^{N\,app} - F_{ij-1}^N| + |F_{ij}^{B\,app} - F_{ij}^B| \right) \\
 &\leq \frac{C_1}{C_0 h^2} \left((\ell_{i+1j}^E)^3 + (\ell_{ij}^E)^3 + (\ell_{ij}^N)^3 \right. \\
 &\quad \left. + (\ell_{ij-1}^N)^3 + (\ell_{ij}^{Bl})^3 + (\ell_{ij}^{Br})^3 \right) \\
 &\leq C_2 \Delta_{max},
 \end{aligned} \tag{3.3.62}$$

où C_2 est une constante qui dépend uniquement de la fonction u . \square

Remarque 3.3.5. *On peut se demander si la contrainte sur le maillage (3.3.60) n'est pas trop forte. On calcule pour cela la quantité*

$$C_h = \left\{ \min_{|\tilde{K}_{ij}^u| > 0} |\tilde{K}_{ij}^u| \right\} / \Delta_{max}^2 \tag{3.3.63}$$

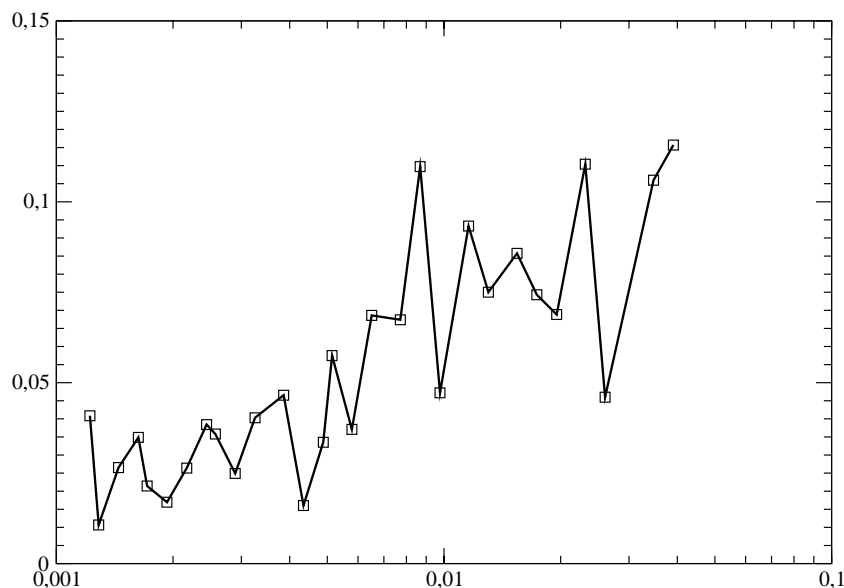
Pour cette application numérique, on a pris des maillages uniformes comportant entre 32 et 1024 points dans chaque direction. L'obstacle est un disque de rayon 1/2 centré en (0, 0) et le domaine $\Omega = [-L, L]^2$, avec $L = 0.625$. Le résultat de cette étude est illustré par la Figure 3.14, on a représenté le coefficient C_h en fonction de h . Il semble que le coefficient C_h reste plus grand que 0.01. On peut cependant concevoir un cas dans lequel le coefficient C_h est aussi petit que l'on veut. En effet, dans le cas où l'obstacle passe par un point du maillage, C_h est nul. Nous allons maintenant illustrer la proposition 3.3.6 avec une application numérique. Nous mettons en évidence que l'approximation de la non-linéarité définie dans 3.3.3 est d'ordre un. Pour tester l'ordre d'approximation, on propose les deux erreurs d'approximation suivantes

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \max_{|\tilde{K}_{ij}^u| > 0} \frac{|\mathcal{I}_{ij} - NL_1(\mathbf{u})_{ij}|}{|\tilde{K}_{ij}^u|} \\
 E_2 &= \max_{|\tilde{K}_{ij}^u| > 0} \left| \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) (G_{ij}) - \frac{NL_1(\mathbf{u})_{ij}}{|\tilde{K}_{ij}^u|} \right|
 \end{aligned} \tag{3.3.64}$$

où G_{ij} est le centre de gravité de la maille \tilde{K}_{ij}^u . La différence entre ces deux définitions se comporte en $\mathcal{O}(h^2)$. En effet, on a la proposition suivante

Proposition 3.3.7. *Soit un domaine $\omega \subset \mathbb{R}^2$. Soit une fonction f définie sur ω à valeurs réelles régulière. Soit G le centre de gravité de ω , noté $G = (x_G, y_G)$ défini par*

$$x_G = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} x \, dx \, dy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} y \, dx \, dy \tag{3.3.65}$$

FIGURE 3.14 – Le coefficient C_h en fonction du pas d'espace.

On montre que

$$f(G) - \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} f(x, y) \, dx \, dy = \mathcal{O}(d(\omega)^2) \quad (3.3.66)$$

où $d(\omega)$ désigne le diamètre de ω .

Remarque 3.3.6. Le point G défini dans 3.3.7 permet d'obtenir la meilleure approximation ponctuelle de la moyenne de f sur ω . On peut montrer que cette propriété caractérise le point G .

Les erreurs E_1 et E_2 se comportent en $\mathcal{O}(h)$, on peut donc utiliser indifféremment ces deux définitions. L'erreur E_2 est représentée en fonction du pas d'espace h sur la Figure 3.15. On a choisi $u(x, y) = \cos(x)\sin(y)$. Comme on le voit sur la Figure 3.15, l'erreur d'approximation se comporte en $\mathcal{O}(h)$.

Remarques sur le temps de calcul : Si on suppose que l'obstacle est immobile, la mise à jour du terme non-linéaire $NL_1(\mathbf{u})$ nécessite un temps de calcul raisonnable. En effet, certains termes dépendent uniquement de la géométrie et/ou de la vitesse au bord de l'obstacle, notamment les aires V_{ij}^u et les flux $F_{ij}^{B,app}$. Ils peuvent être calculés lors de la première itération à partir des ratios $\{r_{ij}^u\}$ et $\{r_{ij}^v\}$ et de la donnée de la vitesse \mathbf{u} sur Γ . Une fois stockés, on peut les utiliser directement pour les itérations suivantes. Durant la première itération, on peut également stocker les coefficients mis en jeu dans le calcul des flux $F_{ij}^{N,app}$ et

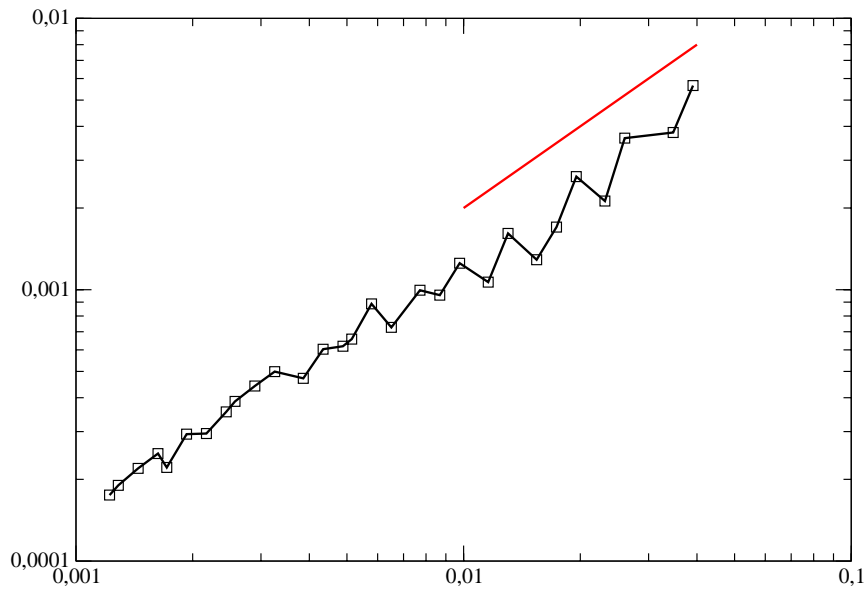


FIGURE 3.15 – Erreur d’approximation du terme non-linéaire près de l’obstacle. On observe une convergence d’ordre un.

$F_{ij}^{E,app}$. Ainsi, on réduit le temps de calcul lors des itérations suivantes, le nombre d'opérations est de l'ordre de $n_\ell n_h$.

3.3.2.5 Formule d'approximation conservative

On suppose ici que la vitesse vérifie $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le bord de l'obstacle. Dans ce cas, la divergence discrète de \mathbf{u} intégrée sur la maille $K_{ij} \cap \Omega^F$ est donnée par

$$(D^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} = h (r_{ij}^u u_{ij} - r_{i-1j}^u u_{i-1j}) + \ell (r_{ij}^v v_{ij} - r_{ij-1}^v v_{ij-1}) \quad (3.3.67)$$

Définition 3.3.4. Soit \mathbf{u} un champ de vitesse bi-dimensionnel. Pour i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq n_\ell - 1$ et $1 \leq j \leq n_h$, on note \mathbf{ru} le nouveau champ de vitesse défini par

$$\mathbf{ru}_{ij} = (r_{ij}^u u_{ij}, r_{ij}^v v_{ij}).$$

Soit $(NL_1^{obs}(\mathbf{u}))_{ij}$ l'approximation de la première composante de la non-linéarité $\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}$ intégrée sur la maille K_{ij}^u définie par

$$\begin{aligned} (NL_1^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} &= (NL_1(\mathbf{ru}))_{ij} \\ &= \frac{h}{4} \left((r_{i+1j}^u u_{i+1j} + r_{ij}^u u_{ij})^2 - (r_{ij}^u u_{ij} + r_{i-1j}^u u_{i-1j})^2 \right) \\ &\quad + \frac{\ell}{4} \left((r_{ij}^u u_{ij} + r_{ij+1}^u u_{ij+1}) (r_{ij}^v v_{ij} + r_{i+1j}^v v_{i+1j}) \right. \\ &\quad \left. - (r_{ij}^u u_{ij} + r_{ij-1}^u u_{ij-1}) (r_{ij-1}^v v_{ij-1} + r_{i+1j-1}^v v_{i+1j-1}) \right). \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

De même, pour i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq n_\ell$ et $1 \leq j \leq n_h - 1$. On définit une approximation de la deuxième composante de la non-linéarité $\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y}$ intégrée sur la maille K_{ij}^v par

$$\begin{aligned} (NL_2^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} &= (NL_2(\mathbf{ru}))_{ij} \\ &= \frac{\ell}{4} \left((r_{ij+1}^v v_{ij+1} + r_{ij}^v v_{ij})^2 - (r_{ij}^v v_{ij} + r_{ij-1}^v v_{ij-1})^2 \right) \\ &\quad + \frac{h}{4} \left((r_{ij}^v v_{ij} + r_{i+1j}^v v_{i+1j}) (r_{ij}^u u_{ij} + r_{ij+1}^u u_{ij+1}) \right. \\ &\quad \left. - (r_{ij}^v v_{ij} + r_{i-1j}^v v_{i-1j}) (r_{i-1j}^u u_{i-1j} + r_{i-1j+1}^u u_{i-1j+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.3.69)$$

Proposition 3.3.8. Sous les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} (D^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} &= 0 \quad \forall i, j, \\ u_{0j} &= 0 = u_{n_\ell j} \quad \forall j, \\ v_{i0} &= 0 = v_{in_h} \quad \forall i, \end{aligned} \quad (3.3.70)$$

on montre que $NL^{obs}(\mathbf{u})$ est une approximation de la non-linéarité conservative au sens

suivant

$$\sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} (NL_1^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} (r_{ij}^u u_{ij}) + \sum_{j=1}^{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} (NL_2^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} (r_{ij}^v v_{ij}) = 0 \quad (3.3.71)$$

Plus précisément, on montre que :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} (NL_1^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} (r_{ij}^u u_{ij}) + \sum_{j=1}^{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} (NL_2^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} (r_{ij}^v v_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \frac{1}{4} \left((D^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} + (D^{obs}(\mathbf{u}))_{i+1j} \right) (r_{ij}^u u_{ij})^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} \frac{1}{4} \left((D^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} + (D^{obs}(\mathbf{u}))_{i,j+1} \right) (r_{ij}^v v_{ij})^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n_h} h \left(r_{n_\ell j}^u u_{n_\ell j} (r_{n_\ell-1 j}^u u_{n_\ell-1 j})^2 + r_{n_\ell-1 j}^u u_{n_\ell-1 j} (r_{n_\ell j}^u u_{n_\ell j})^2 \right. \\ &\quad \left. - r_{1j}^u u_{1j} (r_{0j}^u u_{0j})^2 - r_{0j}^u u_{0j} (r_{1j}^u u_{1j})^2 \right) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_\ell} \ell \left(r_{i n_h}^v v_{i n_h} (r_{i n_h-1}^v v_{i n_h-1})^2 + r_{i n_h-1}^v v_{i n_h-1} (r_{i n_h}^v v_{i n_h})^2 \right. \\ &\quad \left. - r_{i1}^v v_{i1} (r_{i0}^v v_{i0})^2 - r_{i0}^v v_{i0} (r_{i1}^v v_{i1})^2 \right) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} \ell \left((r_{i n_h+1}^u u_{i n_h+1}) (r_{i n_h}^u u_{i n_h}) (r_{i n_h}^v v_{i n_h} + r_{i+1 n_h}^v v_{i+1 n_h}) \right. \\ &\quad \left. - (r_{i1}^u u_{i1}) (r_{i0}^u u_{i0}) (r_{i0}^v v_{i0} + r_{i+10}^v v_{i+10}) \right) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n_h-1} h \left((r_{n_\ell+1 j}^v v_{n_\ell+1 j}) (r_{n_\ell j}^v v_{n_\ell j}) (r_{n_\ell j}^u u_{n_\ell j} + r_{n_\ell j+1}^u u_{n_\ell j+1}) \right. \\ &\quad \left. - (r_{1j}^v v_{1j}) (r_{0j}^v v_{0j}) (r_{0j}^u u_{0j} + r_{0j+1}^u u_{0j+1}) \right). \end{aligned} \quad (3.3.72)$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$B(\mathbf{ru}) = \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{i=1}^{n_\ell-1} (NL_1^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} (r_{ij}^u u_{ij}) + \sum_{j=1}^{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} (NL_2^{obs}(\mathbf{u}))_{ij} (r_{ij}^v v_{ij}) \quad (3.3.73)$$

où $B(\cdot)$ est défini dans 3.3.23 et d'utiliser la proposition 3.3.2. \square

3.4 Discretisation de l'étape de correction

Après l'étape de prédiction, on obtient un champ de vitesse qui ne satisfait pas la contrainte d'incompressibilité. L'étape de correction consiste à projeter le champ de vitesse sur l'espace à divergence discrète nulle.

Nous commençons par définir la divergence discrète de la vitesse lorsque la maille est coupée par l'obstacle. Ensuite pour corriger la vitesse à proximité de l'obstacle, nous proposons une discrétisation du gradient de pression d'ordre deux spécifique au traitement du bord. Loin de l'obstacle, les opérateurs sont discrétisés par l'approximation volumes finis usuelle.

3.4.1 La divergence discrète en présence d'un obstacle

Les cellules K_{ij} sont classées en trois catégories. Pour cela, on leur associe un entier :

$$I_{ij}^{c.c.} \approx \begin{cases} -1 & \text{si } K_{ij} \subset \Omega^F, \\ +1 & \text{si } K_{ij} \subset \Omega^S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $1 \leq i \leq n_\ell$ et $1 \leq j \leq n_h$. On intègre l'équation de continuité sur la maille K_{ij} . Après une intégration par parties, on obtient

$$\iint_{K_{ij} \cap \Omega^F} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial(K_{ij} \cap \Omega^F)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.4.1)$$

$$= \int_{\sigma_{ij}^u} u \, dS - \int_{\sigma_{i-1j}^u} u \, dS + \int_{\sigma_{ij}^v} v \, dS - \int_{\sigma_{ij-1}^v} v \, dS + \int_{\widehat{AB}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.4.2)$$

où A et B sont les points d'intersection de Γ avec les faces de K_{ij} (voir Figure 3.16).

$$\Gamma \cap \partial K_{ij} = \{A, B\} \quad (3.4.3)$$

et \widehat{AB} est le chemin parcouru par la courbe Γ dans la maille K_{ij} , c'est à dire

$$\widehat{AB} = \Gamma \cap K_{ij} \quad (3.4.4)$$

En supposant que la taille de la maille est petite devant le rayon de courbure de Γ , on

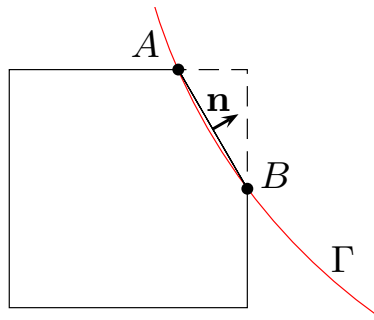


FIGURE 3.16 – La maille K_{ij} est coupée par Γ .

peut raisonnablement approcher l'arc \widehat{AB} par le segment $[AB]$. On fait donc l'approximation suivante

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx \int_{[AB]} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx l \mathbf{u} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (3.4.5)$$

où l est la longueur du segment $[AB]$ et $\mathbf{n}_{i,j}$ est le vecteur, unitaire, orthogonal à $[AB]$ et dirigé de Ω^F vers Ω^S . L'erreur commise ici est de l'ordre de h^3 . De plus, le placement des inconnues autorise les approximations suivantes

$$\int_{\sigma_{i,j}^u} u dS \approx r_{i,j}^u h u_{i,j} \quad (3.4.6)$$

$$\int_{\sigma_{i,j}^v} v dS \approx r_{i,j}^v \ell v_{i,j} \quad (3.4.7)$$

Les approximations (3.4.5) et (3.4.5) nous amènent à définir la divergence discrète de la façon suivante :

Définition 3.4.1. Soit $\mathbf{u} = \{u_{i,j}; 1 \leq i \leq n_\ell \text{ et } 1 \leq j \leq n_h\}$. En présence d'un obstacle, on définit la divergence discrète de \mathbf{u} intégrée sur la maille $K_{i,j}$ par

$$(D_{obs}\mathbf{u})_{i,j} = h(r_{i,j}^u u_{i,j} - r_{i-1,j}^u u_{i-1,j}) + \ell_i(r_{i,j}^v v_{i,j} - r_{i,j-1}^v v_{i,j-1}) + l \mathbf{g} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_{i,j} \quad (3.4.8)$$

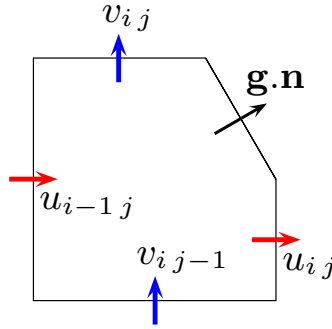


FIGURE 3.17 – Divergence discrète généralisée aux cut-cell.

Dans la définition de D_{obs} , il est inutile de distinguer si $K_{i,j} \cap \Omega^F$ est un rectangle, un trapèze, un pentagone ou un triangle. Les informations géométriques du problème sont contenues dans les ratios $r_{i,j}^u$ et $r_{i,j}^v$. Les points A et B , la longueur l et le vecteur $\mathbf{n}_{i,j}$ s'expriment en fonction des ratios $r_{i,j}^u$, $r_{i-1,j}^u$, $r_{i,j}^v$ et $r_{i,j-1}^v$, ce sont des données géométriques du problème. Cette formulation fait intervenir la vitesse du fluide sur le bord de l'obstacle \mathbf{g} , c'est également une donnée du problème. Il faut noter que la divergence discrète, ainsi définie, se décompose immédiatement en

$$D_{obs}\mathbf{u} = D_{obs}^0\mathbf{u} + D^{supp}, \quad (3.4.9)$$

avec

$$(D_{obs}^0\mathbf{u})_{i,j} = h(r_{i,j}^u u_{i,j} - r_{i-1,j}^u u_{i-1,j}) + \ell_i(r_{i,j}^v v_{i,j} - r_{i,j-1}^v v_{i,j-1}), \quad (3.4.10)$$

et

$$(D^{supp})_{i,j} = l \mathbf{g} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_{i,j}. \quad (3.4.11)$$

Les deux termes $D_{obs}^0 \mathbf{U}$ et D^{supp} sont fondamentalement différents. En effet, D_{obs}^0 contient la partie linéaire de la divergence discrète et D^{supp} les termes constants. Remarquons que la quantité D^{supp} dépend seulement des données du problème et peut, dans certains cas, être calculée une seule fois en prétraitement. Si la maille $K_{i,j}$ est entièrement dans la partie fluide du domaine, la divergence discrète $D_{obs} \mathbf{u}$ coïncide avec la divergence discrète classique $D \mathbf{u}$ définie par

$$(D \mathbf{u})_{i,j} = h(u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \ell_i(v_{i,j} - v_{i,j-1}) \quad (3.4.12)$$

En effet, dans ce cas les ratios $r_{i,j}^u$, $r_{i-1,j}^u$, $r_{i,j}^v$ et $r_{i,j-1}^v$ sont tous égaux à 1. En ce sens, on peut dire que D_{obs} est une généralisation de D qui permet de définir la divergence discrète lorsque la maille est coupée par la frontière Γ .

3.4.2 Gradient de pression et opérateur d'interpolation

Le gradient discret de la pression s'écrit naturellement de la façon suivante :

$$Gp = \begin{pmatrix} G^1 p \\ G^2 p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\ell_i} \\ \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h} \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

Le gradient discret, ainsi défini, est une approximation du second ordre du gradient continu, localisé au milieu de la face $\sigma_{i,j}^u$ pour la première composante et au milieu de la face $\sigma_{i,j}^v$ pour la seconde composante.

Afin de localiser vitesse et gradient de pression aux mêmes points, on introduit les triplets de \mathbb{R}^3 définis par :

$$\mathbf{c}_{i,j}^u = \begin{cases} (0.5(1 - r_{i,j}^u), 0.5(1 + r_{i,j}^u), 0)^t & \text{si } d_{i,j} > 0 \text{ et } d_{i,j-1} < 0, \\ (0, 0.5(1 + r_{i,j}^u), 0.5(1 - r_{i,j}^u))^t & \text{si } d_{i,j} < 0 \text{ et } d_{i,j-1} > 0, \\ (0, 1, 0)^t & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.4.14)$$

pour tout $0 \leq i \leq n_\ell$ et $1 \leq j \leq n_h$ et

$$\mathbf{c}_{i,j}^v = \begin{cases} (0.5(1 - r_{i,j}^v), 0.5(1 + r_{i,j}^v), 0)^t & \text{si } d_{i,j} > 0 \text{ et } d_{i-1,j} < 0, \\ (0, 0.5(1 + r_{i,j}^v), 0.5(1 - r_{i,j}^v))^t & \text{si } d_{i,j} < 0 \text{ et } d_{i-1,j} > 0, \\ (0, 1, 0)^t & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.4.15)$$

pour tout $1 \leq i \leq n_\ell$ et $0 \leq j \leq n_h$. Par la suite, $c_{i,j,k}^u$ désignera la $k^{\text{ième}}$ composante de $\mathbf{c}_{i,j}^u$, k pouvant appartenir à $\{1, 2, 3\}$. L'opérateur d'interpolation du gradient de pression \mathcal{P}_ϕ est

défini à partir des coefficients $\mathbf{c}_{i,j}^u$ et $\mathbf{c}_{i,j}^v$ par :

$$(\mathcal{P}_\phi(Gp))_{i,j} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 (G^1 p)_{i,j+k-1} c_{i,j,k}^u \\ \sum_{k=1}^3 (G^2 p)_{i+k-1,j} c_{i,j,k}^v \end{pmatrix} \quad (3.4.16)$$

L'opérateur \mathcal{P}_ϕ est l'identité sauf dans la partie fluide du domaine à proximité de l'obstacle. En effet, la première composante est l'identité sauf quand le segment $\sigma_{i,j}^u$ est coupé par Γ . On montre que le gradient de pression interpolé $\mathcal{P}_\phi(Gp)$ et la vitesse \mathbf{U} sont localisés aux mêmes points. Par suite, nous proposons de corriger la vitesse intermédiaire $\tilde{\mathbf{u}}$ par :

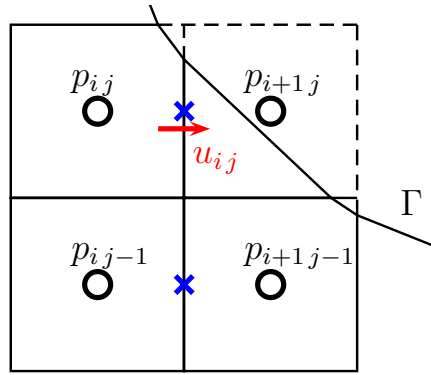


FIGURE 3.18 – Interpolation du gradient de pression au point $M_{i,j}^u$.

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathcal{P}_\phi(G\delta\phi) \quad (3.4.17)$$

où $\delta\phi$ est l'incrément de pression. Nous sommes donc amenés à résoudre

$$D_{obs}(\tilde{\mathbf{u}}) = D_{obs}^0(\mathcal{P}_\phi(G\delta\phi)), \quad (3.4.18)$$

afin d'imposer la condition d'incompressibilité

$$D_{obs}(\mathbf{u}) = 0. \quad (3.4.19)$$

Le système d'équations linéaires 3.4.18 diffère du système sans obstacle

$$D(\tilde{\mathbf{u}}) = D(G\delta\phi), \quad (3.4.20)$$

seulement aux points (i,j) tels que $I_{i,j}^{c.c.} = 0$. Plus précisément $D(\mathcal{P}_\phi(G\delta\phi))_{i,j}$ est égal au

produit scalaire de

$$\left(\begin{array}{c} \frac{h}{\ell_i} r_{ij}^u c_{ij3}^u + \frac{\ell_i}{h} r_{ij}^v c_{ij1}^v \\ -\frac{h}{\ell_i} r_{ij}^u c_{ij3}^u - \frac{h}{\ell_i} r_{i-1j}^u c_{i-1j3}^u + \frac{\ell_i}{h} r_{ij}^v c_{ij2}^v \\ \frac{h}{\ell_i} r_{ij}^u c_{ij3}^u + \frac{\ell_i}{h} r_{ij}^v c_{ij3}^v \\ \frac{h}{\ell_i} r_{i-1j}^u c_{i-1j2}^u - \frac{\ell_i}{h} r_{ij}^v c_{ij1}^v - \frac{\ell_i}{h} r_{ij-1}^v c_{ij-11}^v \\ -\frac{h}{\ell_i} r_{ij}^u c_{ij2}^u - \frac{h}{\ell_i} r_{i-1j}^u c_{i-1j2}^u - \frac{\ell_i}{h} r_{ij}^v c_{ij2}^v - \frac{\ell_i}{h} r_{ij-1}^v c_{ij-12}^v \\ \frac{h}{\ell_i} r_{ij}^u c_{ij2}^u - \frac{\ell_i}{h} r_{ij}^v c_{ij3}^v - \frac{\ell_i}{h} r_{ij-1}^v c_{ij-13}^v \\ \frac{h}{\ell_i} r_{i-1j}^u c_{i-1j1}^u + \frac{\ell_i}{h} r_{ij-1}^v c_{ij-11}^v \\ -\frac{h}{\ell_i} r_{ij}^u c_{ij1}^u - \frac{h}{\ell_i} r_{i-1j}^u c_{i-1j1}^u + \frac{\ell_i}{h} r_{ij-1}^v c_{ij-12}^v \\ \frac{h}{\ell_i} r_{ij}^u c_{ij1}^u + \frac{\ell_i}{h} r_{ij-1}^v c_{ij-13}^v \end{array} \right) \quad (3.4.21)$$

et

$$\left(\begin{array}{c} (\delta\phi)_{i-1,j+1} \\ (\delta\phi)_{i,j+1} \\ (\delta\phi)_{i+1,j+1} \\ (\delta\phi)_{i-1,j} \\ (\delta\phi)_{i,j} \\ (\delta\phi)_{i+1,j} \\ (\delta\phi)_{i-1,j-1} \\ (\delta\phi)_{i,j-1} \\ (\delta\phi)_{i+1,j-1} \end{array} \right) \quad (3.4.22)$$

3.5 Description du solveur rapide

Dans cette section, nous décrivons le solveur utilisé pour la résolution du système linéaire pour l'écoulement d'un fluide en présence d'un obstacle.

La discrétisation des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle conduit à la résolution d'un système linéaire non-symétrique. Ce type de système linéaire est souvent résolu par une méthode itérative, par exemple par l'algorithme du bi-gradient conjugué avec préconditionnement. Malheureusement, la technique de frontière immergée sur maillage cartésien peut entraîner un mauvais conditionnement du système linéaire, la convergence des méthodes itératives peut alors être difficile. Dans ce contexte, afin de ne pas être pénalisé par le conditionnement du système linéaire, nous utilisons une méthode de résolution directe.

Cette méthode est détaillée dans l'article [14] de F. Bouchon et H. Peichl qui est inspirée des travaux de B.L. Buzbee et F.W. Dorr rédigés dans [17] et [16]. On s'intéresse à la résolution du système linéaire suivant :

$$Mx = z. \quad (3.5.1)$$

Soit G une matrice pour laquelle un système linéaire est simple à résoudre. On suppose que la matrice M diffère de la matrice G sur n_1 lignes. Par exemple, la matrice du système linéaire pour l'écoulement autour d'un obstacle diffère de la matrice du système linéaire pour l'écoulement sans obstacle seulement sur les lignes correspondant au traitement de l'obstacle. Une manipulation habile du système linéaire (3.5.1) permet de ramener sa résolution à la résolution successive des trois systèmes linéaires suivants

$$(I_{n_1} + P^t(M - G)G^{-1}P)y = P^t(M - G)G^{-1}z, \quad (3.5.2)$$

où P est la matrice de dimension $(n - 1)^2 \times n_1$ composée d'un coefficient non-nul par colonne (égal à 1) telle que le vecteur $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ solution de $Py = (M - G)x$ collecte les valeurs non-nulles de $(M - G)x$,

$$\tilde{z} = z - Py, \quad (3.5.3)$$

et

$$Gx = \tilde{z}. \quad (3.5.4)$$

Remarque 3.5.1. *On montre que $(I_{n_1} + P^t(M - G)G^{-1}P)$ est une matrice inversible de dimension n_1 . La résolution du système (3.5.2) est assez coûteuse, elle est de l'ordre de $\mathcal{O}(n^3)$ opérations. Si l'obstacle est immobile, cette étape est la même à chaque itération. On peut effectuer la factorisation LU de la matrice $(I_{n_1} + P^t(M - G)G^{-1}P)$. Cette étape de prétraitement est donc réalisée une fois pour toute la simulation.*

La résolution du système (3.5.3) est immédiate et la complexité de (3.5.4) est de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2 \ln(n))$ opérations (même complexité que pour l'écoulement équivalent sans obstacle).

3.6 Simulations numériques directes

Afin de valider le schéma proposé, on s'intéresse à l'écoulement bi-dimensionnel, supposé incompressible, d'un fluide homogène et newtonien, autour d'un obstacle de forme cylindrique, placé à l'origine du repère. L'obstacle est supposé immobile

$$\mathbf{u}_{\Gamma_S} = \mathbf{0}$$

et la vitesse du fluide loin de l'obstacle est uniforme et horizontale

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow (u_\infty, 0) \text{ quand } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Pour les applications numériques que nous présentons, le diamètre de l'obstacle D vaut 1 et la vitesse à l'infini u_∞ vaut 1. Dans ce cas, on peut simplifier l'écriture du nombre de Reynolds

$$Re = 1/\nu. \quad (3.6.1)$$

Dans la Section 3.6.1, nous présentons des simulations d'écoulements à faibles nombres de Reynolds, $Re \in \{1, 10, 20, 40\}$. L'écoulement atteint rapidement un état d'équilibre, on observe typiquement deux zones de recirculation symétriques placées à l'arrière de l'obstacle. Nous avons comparé les caractéristiques de l'écoulement obtenu (longueur de la zone de recirculation, coefficient de traînée, etc...) avec les résultats trouvés dans la littérature.

Ensuite, dans la Section 3.6.2, nous présentons des simulations d'écoulements à nombres de Reynolds modérés, $Re \in \{80, 200\}$. Après un phase transitoire, l'écoulement atteint un état instable, on observe une succession de tourbillons alternés à l'arrière de l'obstacle. Nous avons comparé les caractéristiques de l'écoulement obtenu (coefficient de traînée, de portance, nombre de Strouhal, etc...) avec les résultats trouvés dans la littérature.

Puis, dans la Section 3.6.3, nous présentons une simulation d'écoulement à nombre de Reynolds élevé, $Re = 9500$. Une telle simulation étant très coûteuse en temps de calcul, nous nous sommes intéressés, tout comme [40], aux premiers instants du développement de la solution ($t < 5$). Les résultats obtenus (lignes de niveaux de la fonction de courant) sont confrontés avec d'autres simulations numériques et avec des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature.

3.6.1 Écoulements stationnaires

Nous avons remarqué que dans la littérature des articles au sujet de l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'un obstacle, les auteurs ne s'accordent pas sur une taille de domaine idéale. D'ailleurs le choix du domaine paraît souvent arbitraire. C'est pour cela que nous proposons de faire l'étude de la convergence en grille de la méthode proposée dans cette thèse (en faisant varier le pas d'espace h) sur différents domaines d'étude (en faisant varier Ω). Pour cette étude, le nombre de Reynolds est de 40. L'écoulement atteint un état stationnaire à partir de $t = 100$, nous comparons les coefficients de traînée obtenus (voir Tableau 3.1). Le pas d'espace varie entre $1.95 \cdot 10^{-2}$ et $7.8 \cdot 10^{-2}$, le domaine d'étude est un carré $\Omega = (-L, L)^2$, avec L entre 5 et 50. D'une part, pour une taille de domaine donnée, on remarque que le

$h \backslash L$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$7.8 \cdot 10^{-2}$	1.734	1.568	1.524	1.505	1.494	1.487	1.482	1.479	1.476	1.474
$5.2 \cdot 10^{-2}$	1.730	1.565	1.522	1.503	1.492	1.485	1.481	1.477	1.475	1.473
$3.9 \cdot 10^{-2}$	1.748	1.582	1.538	1.519	1.508	1.502	1.497	1.493	1.491	1.489
$2.6 \cdot 10^{-2}$	1.758	1.591	1.547	1.528	1.517	1.510	1.505	1.502	1.500	
$1.95 \cdot 10^{-2}$	1.757	1.591	1.547	1.528	1.517	1.510				

TABLE 3.1 – Convergence en grille : on a reporté pour chaque simulation le coefficient de traînée.

coefficient de traînée arrive à convergence dès que le pas d'espace h est inférieur à

$$h_* = 2.6 \times 10^{-2}.$$

D'autre part, pour un pas d'espace donné, on remarque que le coefficient de traînée arrive à convergence dès que la longueur L est supérieur à

$$L_* = 40.$$

La simulation de référence pour l'écoulement à nombre de Reynolds égal à 40 est donc obtenue sur le maillage $\Omega = (-40, 40)^2$, avec un maillage dont le pas d'espace h vaut $2.6 \cdot 10^{-2}$. Le nombre de mailles coupées par l'obstacle est de 156 et le pas de temps vaut $7.5 \cdot 10^{-3}$.

Maintenant que l'on possède une simulation de référence sur un domaine carré, nous proposons de tester l'influence des conditions aux limites sur le développement de l'écoulement. Pour ces simulations numériques, le pas d'espace est égal à h_* . On fait d'abord varier la hauteur du domaine d'étude, la longueur du domaine est inchangée, on prend

$$\Omega = (-L_*, L_*) \times (-A, A),$$

avec A entre 5 et 40. On obtient un résultat satisfaisant dès que la longueur A est supérieure à 30 (voir Tableau 3.2).

A	5	10	15	20	25	30	35	40
C_d	1.729	1.576	1.537	1.520	1.512	1.507	1.503	1.502

TABLE 3.2 – Convergence en grille : on fait varier la hauteur du domaine.

On fait ensuite varier la longueur du domaine en amont de l'obstacle, la longueur du domaine en aval et sa hauteur sont inchangées, on prend

$$\Omega = (-X_u, L_*) \times (-L_*, L_*),$$

avec X_u entre 5 et 40. On obtient un résultat satisfaisant dès que la longueur X_u est supérieure à 30 (voir Tableau 3.3).

X_u	5	10	15	20	25	30	35	40
C_d	1.695	1.570	1.535	1.522	1.514	1.508	1.503	1.502

TABLE 3.3 – Convergence en grille : on fait varier la longueur du domaine en amont.

Enfin, on fait varier la longueur du domaine en aval de l'obstacle, la longueur du domaine en amont et sa hauteur sont inchangées, on prend

$$\Omega = (-L_*, X_d) \times (-L_*, L_*),$$

avec X_d entre 5 et 40. On obtient un résultat satisfaisant dès que la longueur X_d est supérieure à 15 (voir Tableau 3.4).

X_d	5	10	15	20	25	30	35	40
C_d	1.495	1.497	1.500	1.501	1.502	1.502	1.502	1.502

TABLE 3.4 – Convergence en grille : on fait varier la longueur du domaine en aval.

Ces résultats montrent que les conditions aux limites ont une influence sur le développement de la solution numérique. La condition aux limites sur le plan de sortie est celle qui a la plus faible influence.

En considérant que l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de $Re^{1/2}$, on peut déduire les paramètres des simulations à nombres de Reynolds $Re \in \{1, 10, 20\}$. Le domaine d'étude est carré, $\Omega = (-L, L)^2$, on trouve les paramètres de ces simulations dans le Tableau 3.5.

Re	L	n	h
1	80	1536	10^{-1}
10	40	1536	$5.2 \cdot 10^{-2}$
20	40	2048	$3.9 \cdot 10^{-2}$
40	40	3072	$2.6 \cdot 10^{-2}$

TABLE 3.5 – Simulations étudiée dans le cas stationnaire.

On a représenté sur les Figures 3.19, 3.21 et 3.20 les lignes de niveaux de la fonction de courant ϕ , de la vorticité ω et de la pression p .

On rappelle les notations introduites par Bouard et Coutanceau dans [8], elles permettent de caractériser la structure d'un écoulement stationnaire autour d'un obstacle cylindrique (voir Figure 3.22) :

- l la longueur de la zone de recirculation,
- a la distance du cylindre au centre du tourbillon,
- b la distance entre les centres des deux tourbillons,
- θ l'angle de séparation de l'écoulement mesuré par rapport à l'axe horizontal.

Les résultats des simulations à nombres de Reynolds $Re = 20$ et 40 sont présentés dans le Tableau 3.6. Ils sont conformes aux résultats rencontrés dans la littérature.

La contribution des forces de pression et de frottement pour le coefficient de traînée des simulations à nombres de Reynolds $Re \in \{1, 10, 20, 40\}$ est présentée dans le Tableau 3.7. On voit que la contribution des forces de frottement diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente.

L'évolution de l'angle de séparation et la longueur de la zone de recirculation est présentée sur la Figure 3.23, pour les simulations à nombres de Reynolds $Re \in \{1, 10, 20, 40\}$.

On définit les quantités

$$\begin{aligned} sym_u &= \max(|u_{ij} - u_{i n_h - j + 1}|, 0 \leq i \leq n_\ell \text{ et } 1 \leq j \leq n_h/2) \\ sym_v &= \max(|v_{ij} + v_{i n_h - j}|, 1 \leq i \leq n_\ell \text{ et } 0 \leq j \leq n_h/2 - 1) \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

L'évolution du maximum de la divergence discrète de la vitesse (en valeur absolue) et de sym_u et sym_v est illustrée sur la Figure 3.24.

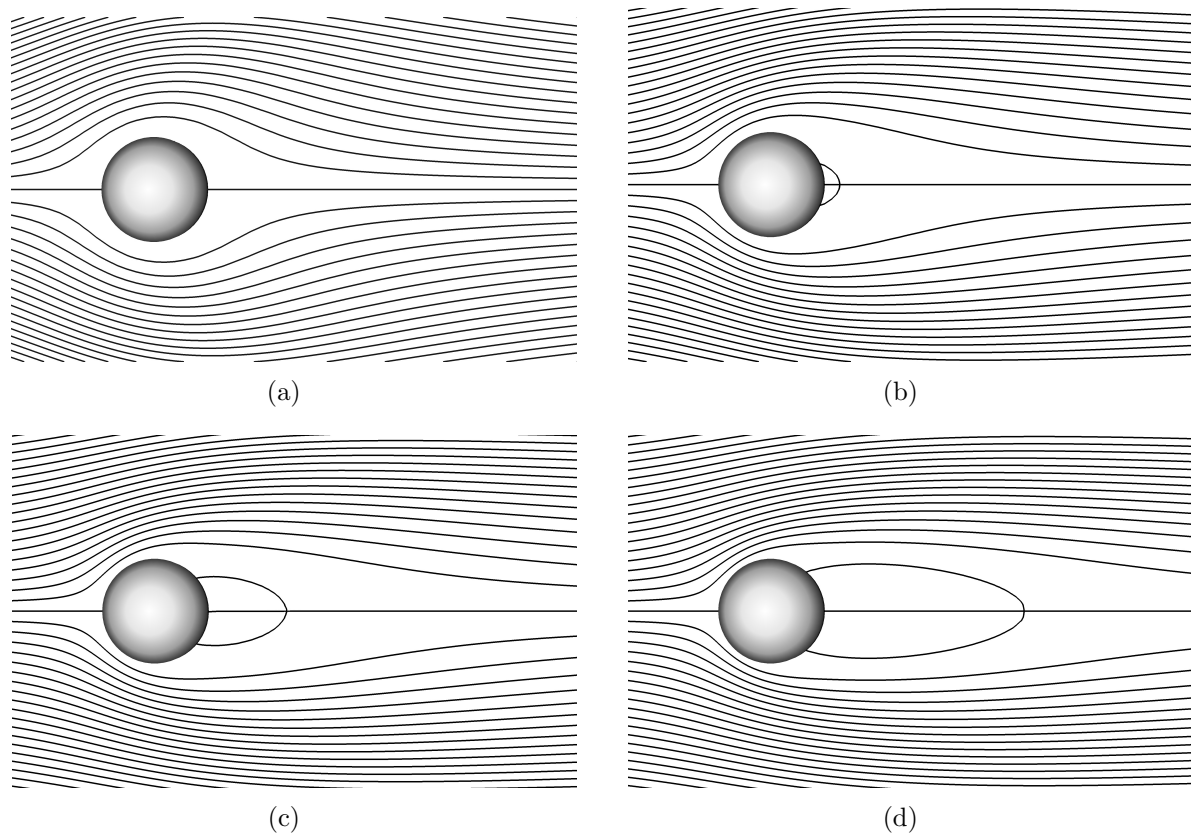


FIGURE 3.19 – Lignes de niveau de la fonction de courant associée à la dynamique d'un écoulement autour d'un disque. Le nombre de Reynolds vaut 1 (a), 10 (b), 20 (c) et 40 (d).

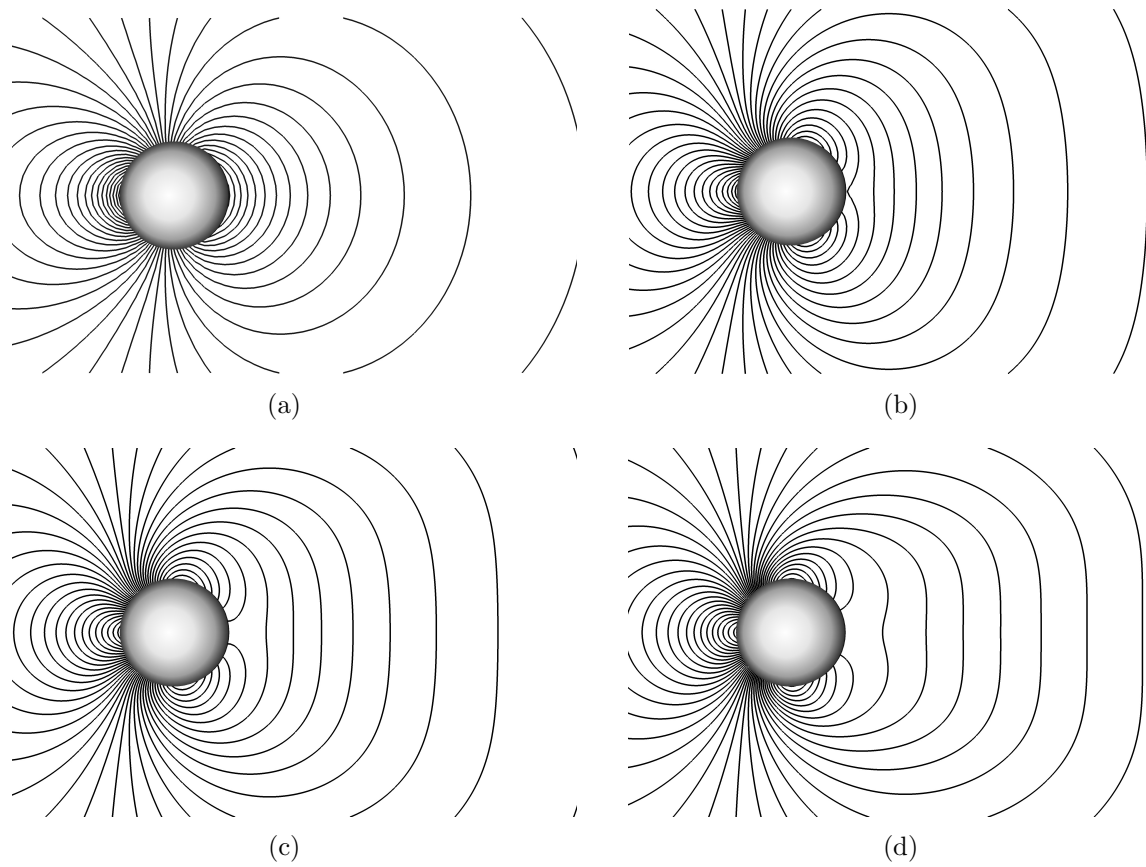


FIGURE 3.20 – Lignes de niveau de la pression associée à la dynamique d'un écoulement autour d'un disque. Le nombre de Reynolds vaut 1 (a), 10 (b), 20 (c) et 40 (d).

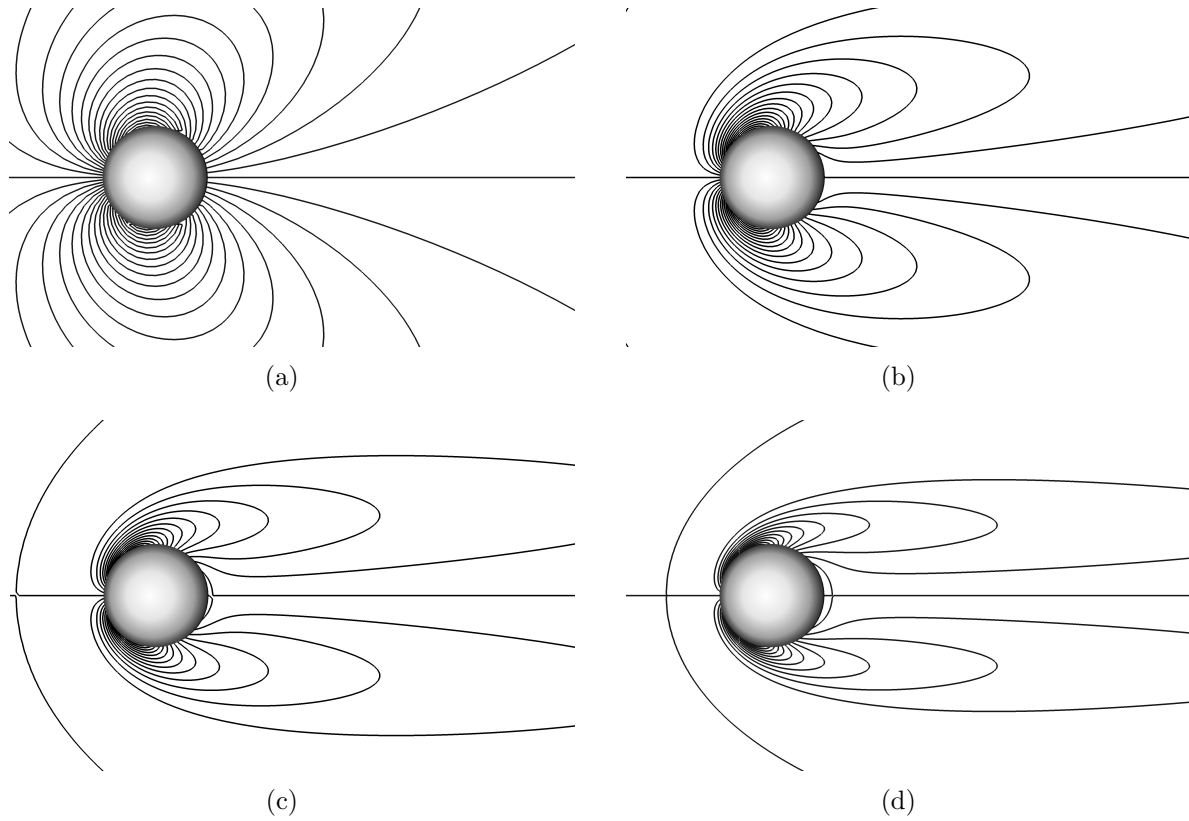


FIGURE 3.21 – Lignes de niveau de la vorticité de la vitesse associée à la dynamique d'un écoulement autour d'un disque. Le nombre de Reynolds vaut 1 (a), 10 (b), 20 (c) et 40 (d).

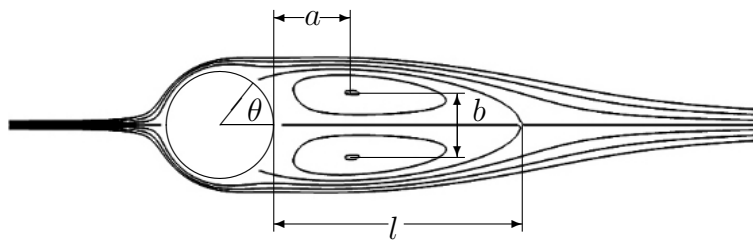


FIGURE 3.22 – Definition des dimensions caractéristiques de la structure d'un écoulement stationnaire.

Auteurs	$Re = 20$					$Re = 40$				
	C_d	θ	l	a	b	C_d	θ	l	a	b
Bouard et al [8]		45.0	0.93	0.33	0.46		53.8	2.13	0.76	0.59
Calhoun [20]	2.19	45.5	0.91			1.62	54.2	2.18		
Chung [23]	2.05		0.96			1.54		2.30		
Dennis et al [26]	2.05	43.7	0.94			1.52	53.8	2.35		
Ding et al [28]	2.14		0.94			1.58	52.8	2.32		
Fornberg [38]	2.00	45.7	0.91			1.50	55.6	2.24		
Gao et al [39]	2.09					1.58				
Henderson [43]						1.54				
Linnick et al [55]	2.06	43.5	0.93	0.36	0.43	1.54	53.6	2.28	0.72	0.60
Mittal et al [59]						1.53				
Silvano et al [54]	2.04					1.54				
Taira et al [69]	2.07	44.1		0.37	0.43	1.55	54.1		0.73	0.60
Tritton [73]	2.22					1.48				
Tseng et al [74]						1.53		2.21		
Ye et al [81]	2.03		0.92			1.52		2.27		
Présente étude	2.10	42.1	0.91	0.359	0.429	1.50	53.4	2.26	0.710	0.60

TABLE 3.6 – Écoulements à nombres de Reynolds 20 et 40 : comparaison avec les résultats obtenus dans littérature.

Re	pression	frottement	cumul
1	5.30 (52%)	4.49 (48%)	10.19
10	1.57 (57%)	1.20 (43%)	2.77
20	1.22 (61%)	0.79 (39%)	2.01
40	0.99 (66%)	0.51 (34%)	1.50

TABLE 3.7 – Coefficient de traînée : contribution des forces de pression et de frottement.

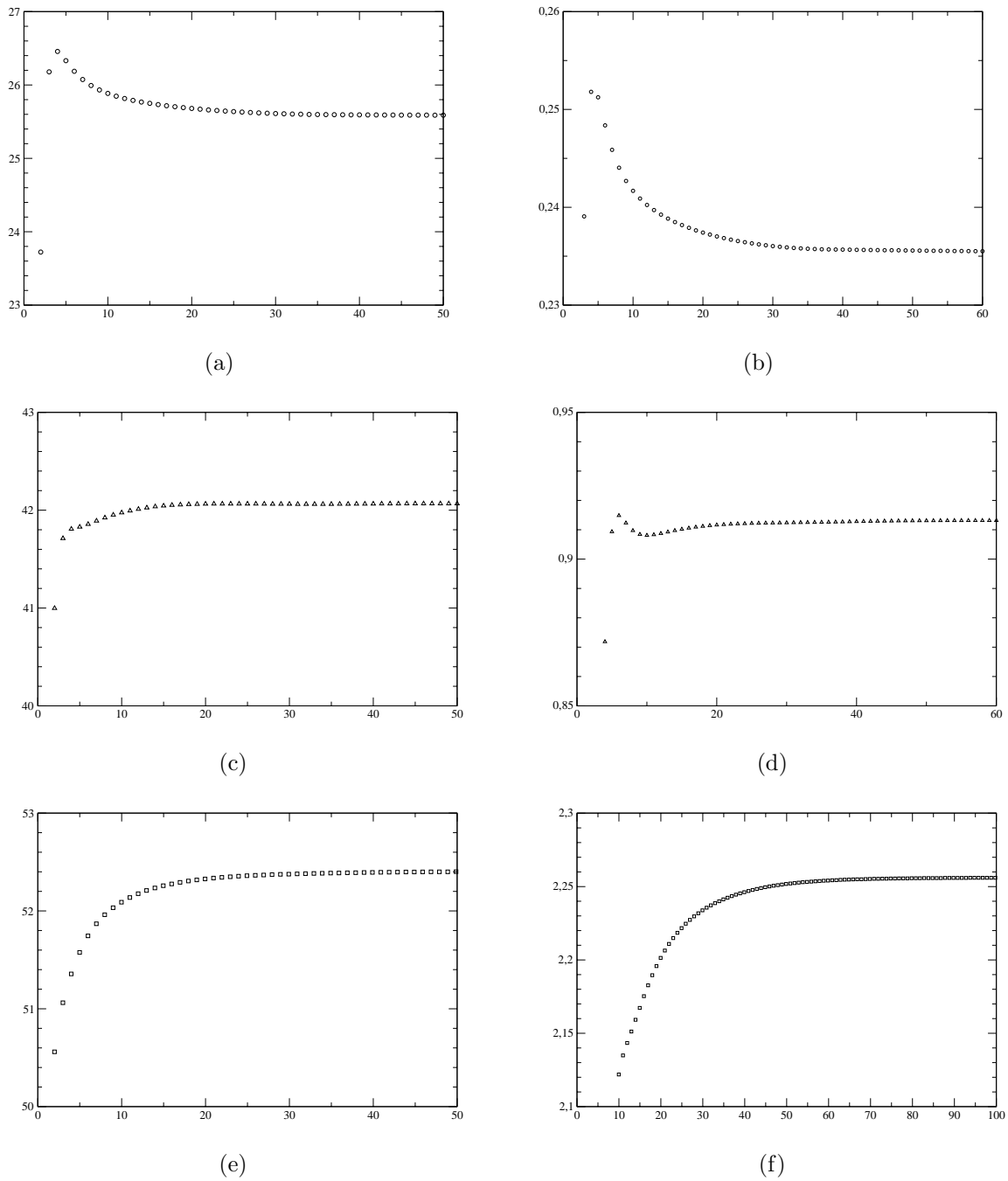
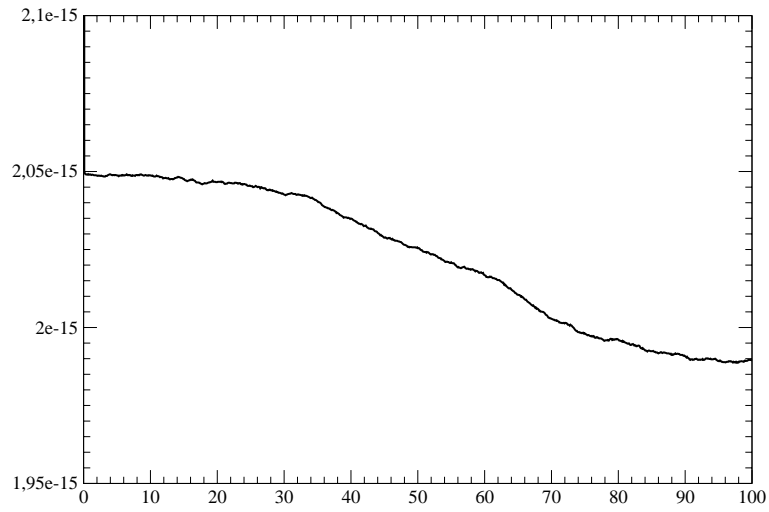
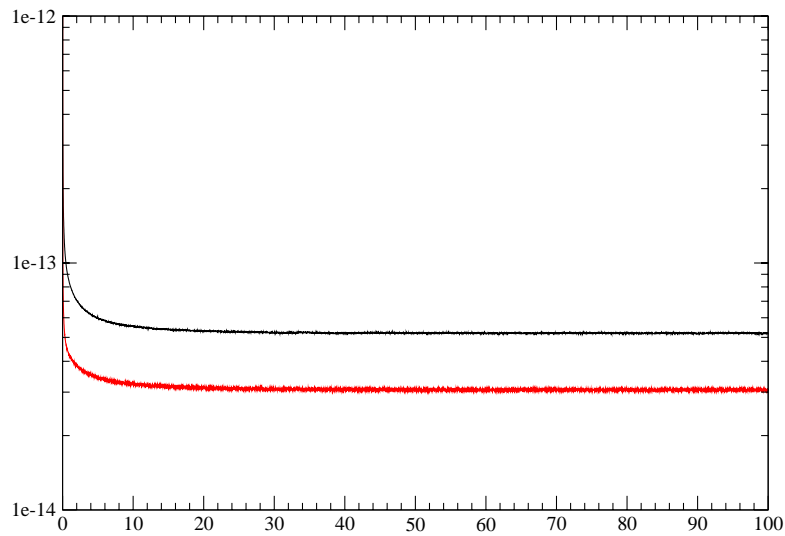


FIGURE 3.23 – Colonne de gauche, angle de séparation exprimé en degré et colonne de droite longueur de la zone de recirculation à l’arrière de l’obstacle. De haut en bas, le nombre de Reynolds de l’écoulement vaut 10, 20, 40.



(a)



(b)

FIGURE 3.24 – Sur la Figure (a) évolution du maximum de la divergence en valeur absolue du champ de vitesse. Sur la Figure (b) évolution des coefficients sym_u et sym_v représentés respectivement en noir et rouge.

La répartition de la pression et de la contrainte de cisaillement sur l'obstacle est illustrée sur la Figure 3.25. Un point de coordonnées (x, y) appartenant à l'obstacle est ici caractérisé par l'angle $\theta \in (-\pi, \pi)$ qu'il forme avec l'axe horizontal

$$\theta = \tan^{-1}(y/x). \quad (3.6.3)$$

L'évolution du coefficient de traînée est illustrée sur la Figure 3.26.

Quelques profils de la vitesse pour l'écoulement à nombre de Reynolds égal à 40 sont représentés sur la Figure 3.27. On peut voir qu'à ce nombre de Reynolds, la couche limite est assez large.

3.6.2 Écoulements à nombres de Reynolds modérés : $Re=80$ et 200

On a choisi de traiter les écoulements autour d'un cylindre à nombre de Reynolds 80 et 200. Ces écoulements sont instationnaires, on sait que l'écoulement devient instationnaire au delà de $Re \approx 43$. En revanche le sillage derrière l'obstacle forme une allée de tourbillons alternés, appelée allée de Von Karmann. On voit sur la Figure 3.28 que la représentation de la vitesse en un point est un signal périodique.

La fréquence d'émission des tourbillons est appelée **nombre de Strouhal**, on la note St . Pour amener plus rapidement la solution vers un état instable, on applique à l'obstacle une rotation dont le centre est l'origine du repère. Comme l'obstacle est de forme cylindrique, il reste inchangé par une telle rotation. L'obstacle coupe donc les mailles de la grille de calcul de la même façon. La rotation de l'obstacle se traduit par l'ajout de nouveaux termes explicites dans le membre de droite du système linéaire. Il est inutile de renouveler l'étape coûteuse de prétraitement. La Figure 3.6.2 représente la vitesse de rotation $r(t)$ imposée à l'obstacle au cours du temps t . La vitesse de rotation au bord du cylindre est donnée par

$$\mathbf{u}_{\Gamma_S}(x, y) = r(t) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Cette perturbation est non nulle à partir de $t = 0.1$, afin de laisser la solution se développer quelques instants ($0 < t < 0.1$) sans perturbation. Elle cesse au temps $t = 0.95$, dès lors la solution est déstabilisée et l'obstacle reste immobile. Si on n'introduit pas de perturbation, les erreurs de troncature introduites par le calcul sur ordinateur (en double précision $\approx 10^{-14}$) s'amplifient progressivement jusqu'à rendre la solution instable (environ à partir de $t \approx 100$). En perturbant la solution, on se dispense de cette phase de transition qui peut être très longue. On a de plus observé que les caractéristiques de l'écoulement « perturbé » sont identiques à celles de l'écoulement équivalent « non perturbé ». Les résultats des simulations à nombres de Reynolds $Re = 80$ et 200 sont présentés dans le Tableau 3.8. Ils sont conformes aux résultats rencontrés dans la littérature. On a représenté sur la Figure 3.30 les lignes de niveaux de la fonction de courant ϕ , de la vorticité ω et de la pression p , pour les écoulements à nombre de Reynolds 80 et 200. La répartition de la pression et de la contrainte de cisaillement sur l'obstacle est illustrée sur la Figure 3.31. L'évolution du coefficient de traînée et du coefficient de portance est illustrée sur la Figure 3.32.

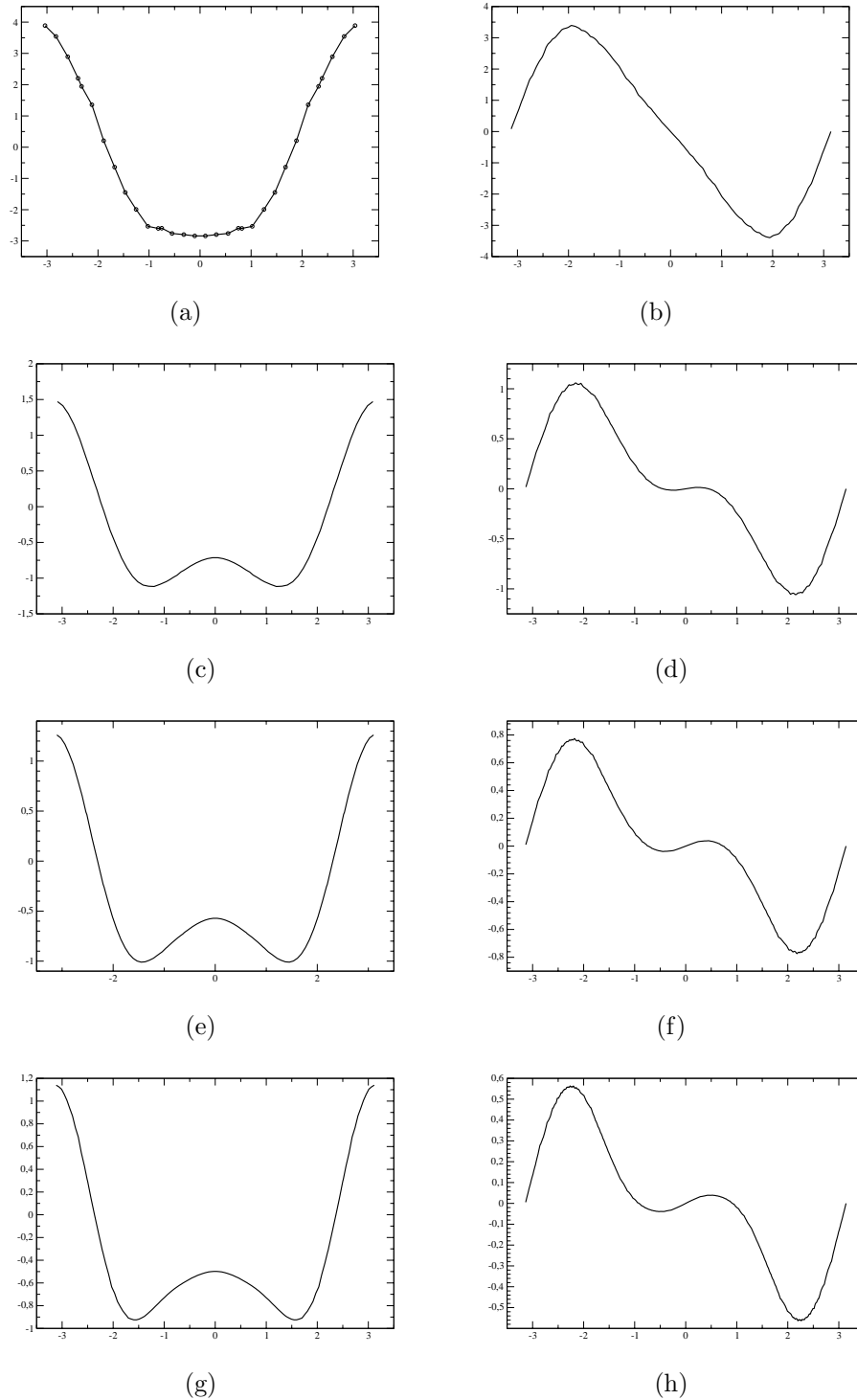
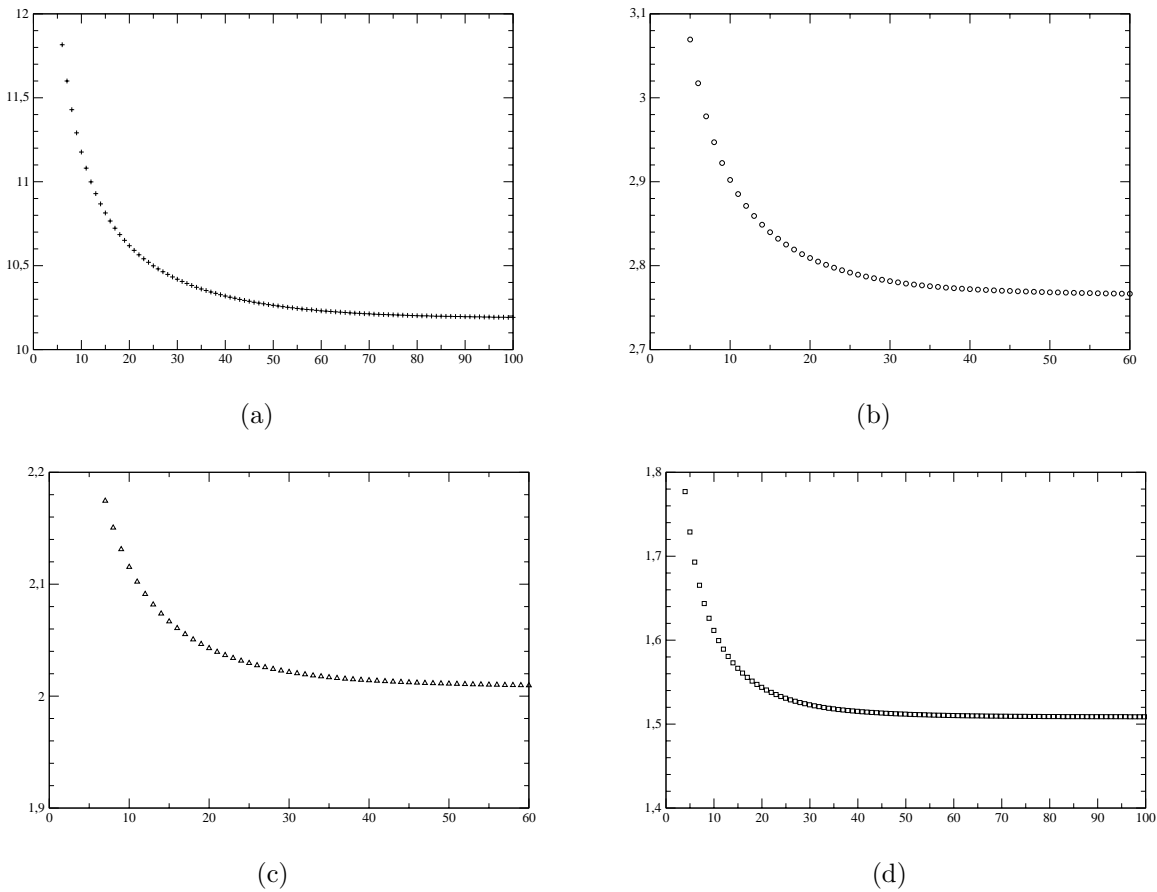


FIGURE 3.25 – Dans la colonne de gauche, la répartition de la pression sur l’obstacle et dans celle de droite, la contrainte de cisaillement sur l’obstacle. De haut en bas, le nombre de Reynolds de l’écoulement vaut 1, 10, 20 et 40.


 FIGURE 3.26 – Evolution du coefficient de traînée : (a) $Re = 1$, (b) $Re = 10$, (c) $Re = 20$ et (d) $Re = 40$.

Auteurs	$Re = 80$			$Re = 200$		
	C_d	C_l	St	C_d	C_l	St
Lima E Silva, et al [54]	1.40					
Ye et al [81]	1.37		0.15			
Williamson [79]			0.15			
Park et al [62]	1.35					
Sucker et al [68]	1.51					
Belov et al [5]				1.19 ± 0.042	0.64	0.193
Linnick et al [55]				1.34 ± 0.044	0.69	0.197
Liu et al [57]				1.31 ± 0.049	0.69	0.192
Miyake et al [61]				1.34 ± 0.043	0.67	0.196
Rogers et al [67]				1.23 ± 0.05	0.65	0.185
Taira et al [69]				1.36 ± 0.043	0.69	0.197
Présente étude	1.347 ± 0.0042	0.234	0.153	1.380 ± 0.0445	0.678	0.197

TABLE 3.8 – Ecoulements à nombre de Reynolds 80 et 200 : résultats dans la littérature.

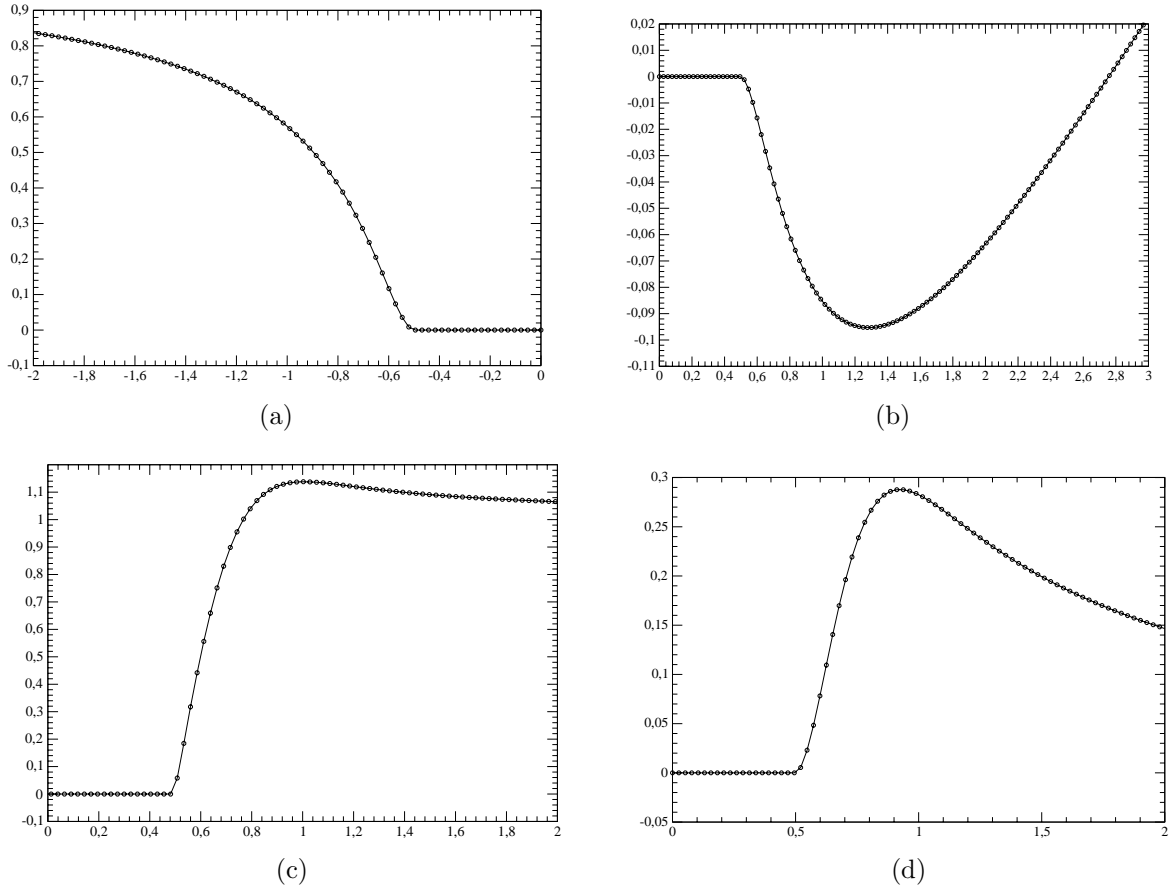


FIGURE 3.27 – Le nombre de Reynolds vaut 40. On a représenté le profil de u à $x = 0$ (c), profil de u à $y = 0$ en amont (a), profil de u à $y = 0$ en aval (b), profil de v à $x = 0$ (d).

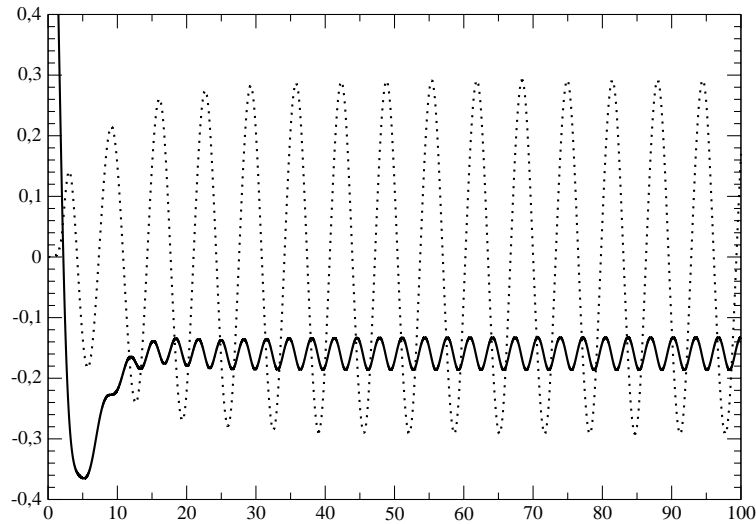


FIGURE 3.28 – Capteur de vitesse au point $(-1.4, 0)$: en trait plein, la composante horizontale u , en pointillés, la composante verticale v . Le nombre de Reynolds vaut 80. On observe un signal sinusoïdal.

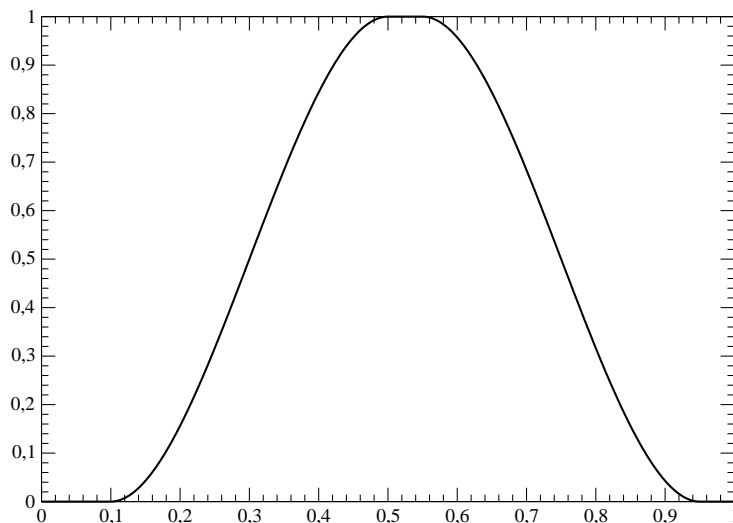


FIGURE 3.29 – Evolution de la vitesse de rotation imposée à l’obstacle pour déstabiliser l’écoulement.

3.6.3 Écoulements à nombre de Reynolds élevé : $Re=9500$

Le développement initial de l’écoulement autour d’un cylindre placé dans un écoulement uniforme lorsque le nombre de Reynolds vaut 9500 a été étudié par des techniques de visualisation [9] et étudié numériquement dans les articles [22] et [49]. A ce nombre de Reynolds, l’écoulement présente une structure tourbillonnaire complexe qui rend la simulation difficile. Sur la Figure 3.33, les résultats obtenus avec le schéma Différences Finies / Volumes Finis sont comparés avec l’écoulement expérimental de [9], aux instants $t = 0.75, 1.0, 1.25$ et 1.5 . La ressemblance est excellente. Quand $t = 0.75$, le sillage est confiné dans une fine zone de recirculation. On remarque la présence d’un point singulier où se concentre le tourbillon. Lorsque $t = 1.0$, le tourbillon déjà présent à l’instant $t = 0.75$ a grandi. On remarque l’apparition de deux nouveaux tourbillons, c’est le phénomène β . La répartition de la pression et de la contrainte de frottement sur l’obstacle est illustrée sur les Figures 3.34 et 3.35. La vorticité du champ de vitesse est représentée sur la Figure 3.36.

3.7 Simulations multi-niveaux : résultats préliminaires

Ici, le nombre de Reynolds vaut 500 000, le pas de temps δt est égal à 10^{-4} et le domaine d’étude est $\Omega = (-5, 5) \times (-2.5, 2.5)$. Une simulation directe ne donne aucun résultat, l’accumulation de l’énergie portée par les petites échelles empêche le développement de la couche limite. En appliquant régulièrement la correction des petites échelles, nous obtenons la solution illustrée par la Figure 3.37. La répartition de la pression et de la contrainte de cisaillement sur l’obstacle, au temps $t = 10$, est présentée sur la Figure 3.38.

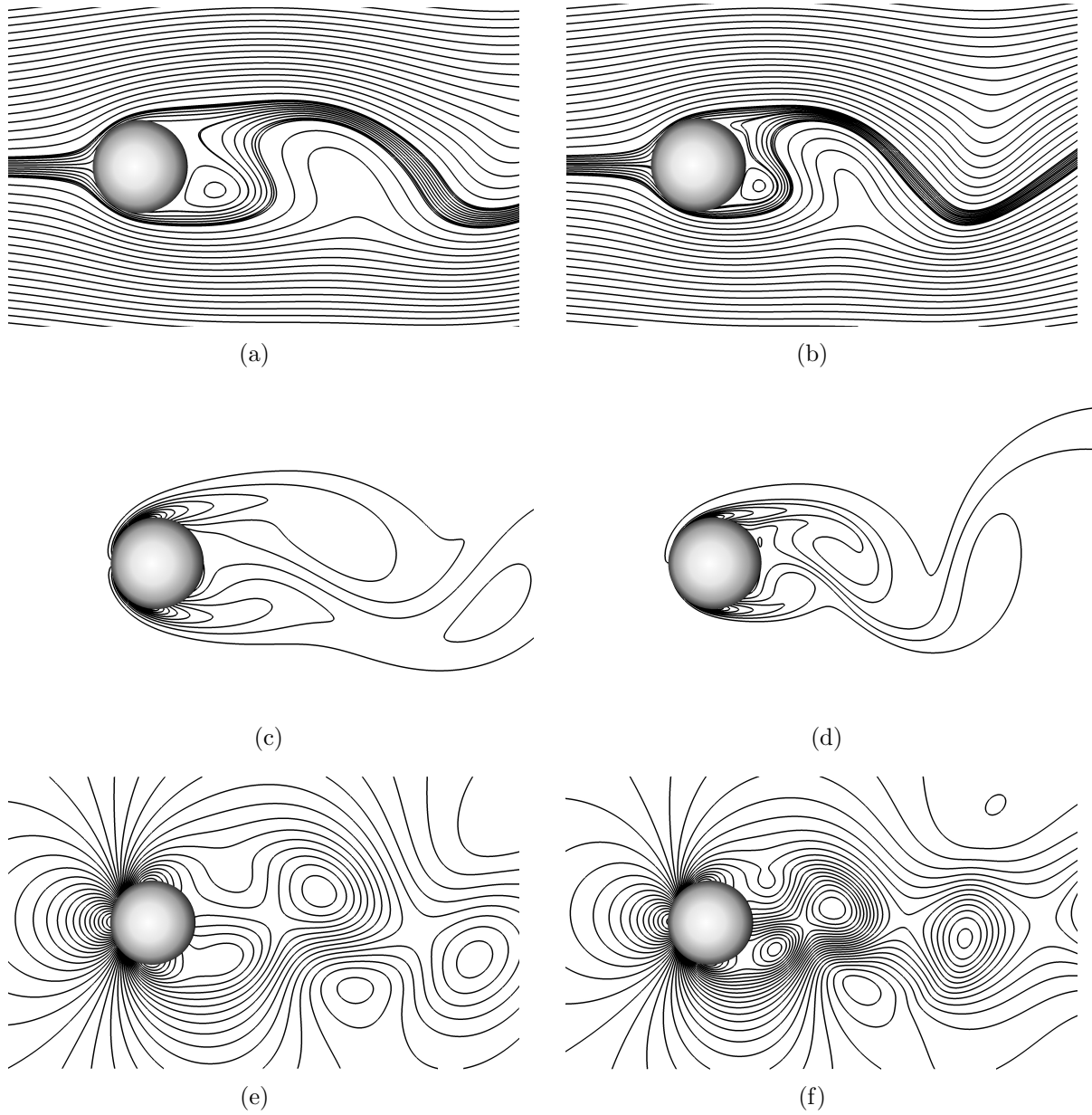


FIGURE 3.30 – Ecoulement autour d'un disque au temps $t = 100$. De bas en haut, les lignes de niveau de la fonction de courant ϕ , de la vorticité ω et de la pression p . Dans la colonne de gauche, le nombre de Reynolds vaut 80, dans celle de droite 200.

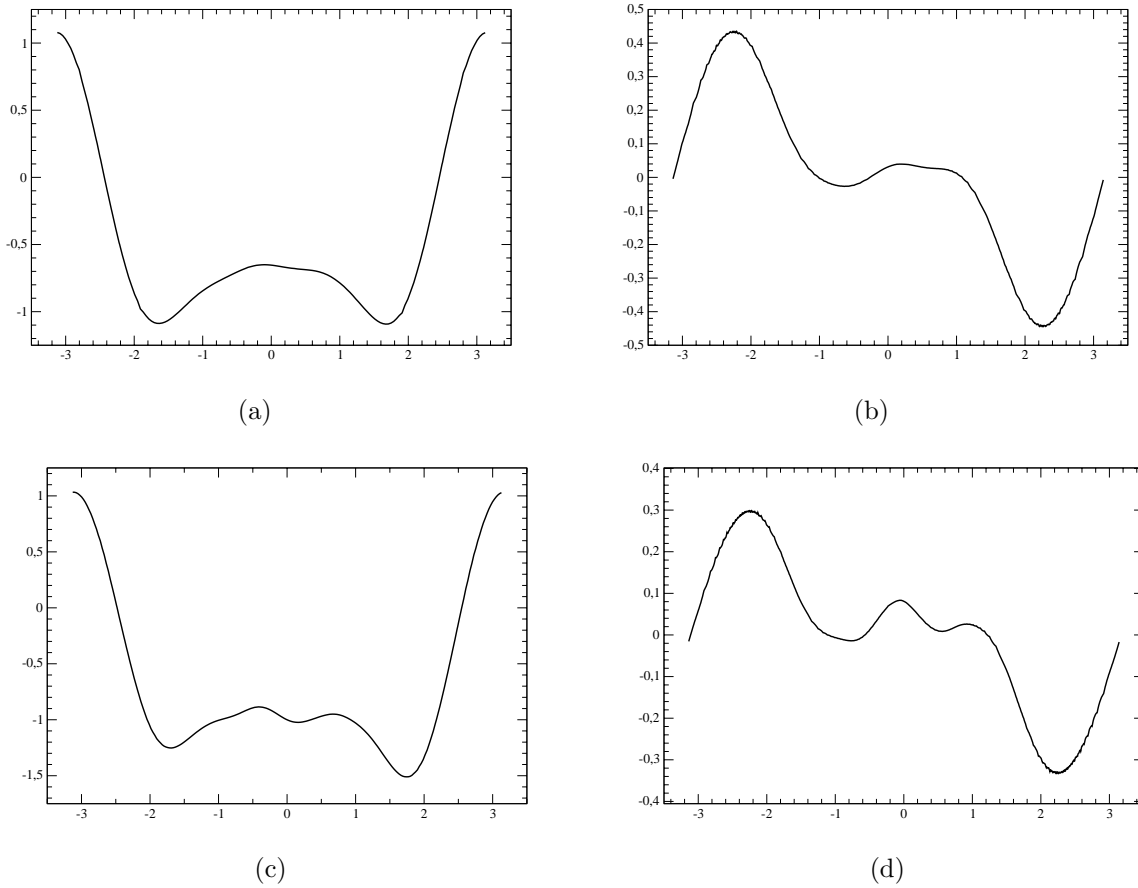


FIGURE 3.31 – Dans la colonne de gauche, la répartition de la pression sur l’obstacle et dans celle de droite, la contrainte de cisaillement sur l’obstacle. De haut en bas, le nombre de Reynolds de l’écoulement vaut 80 et 200.

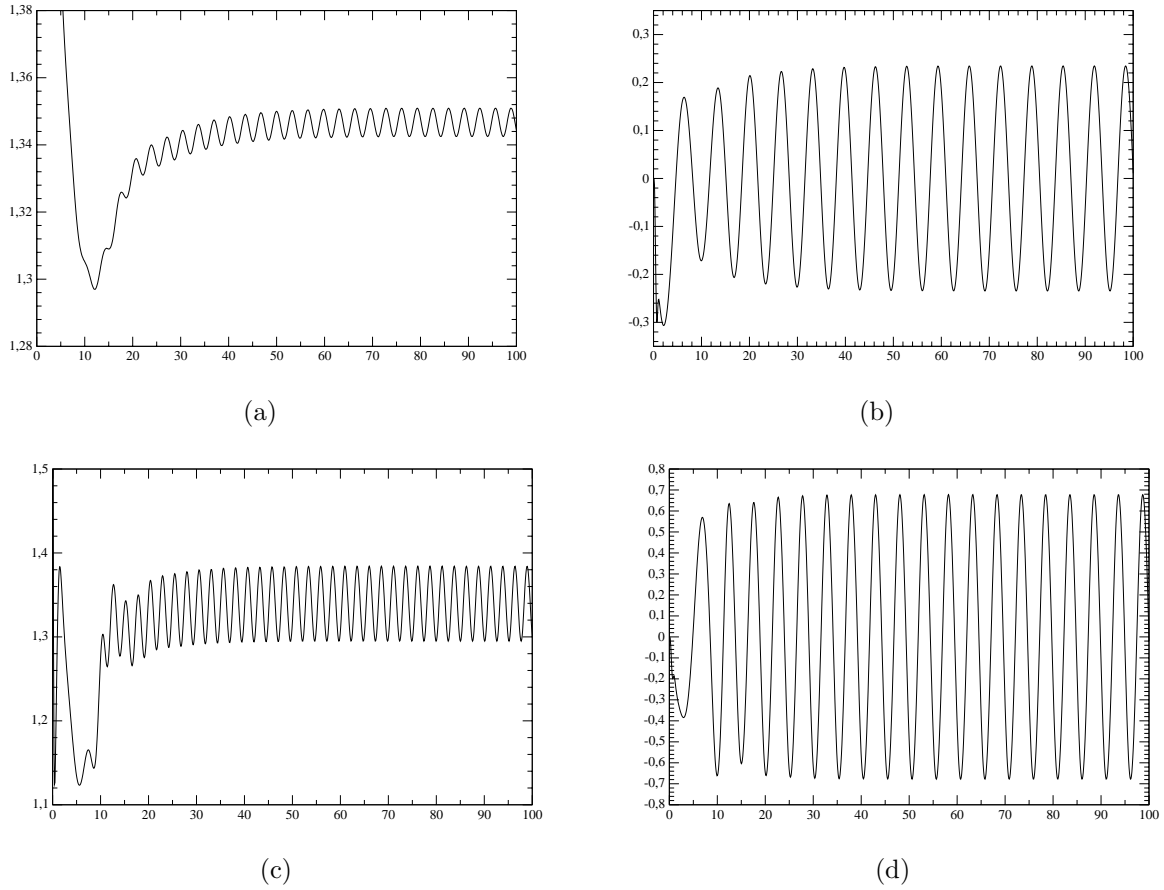


FIGURE 3.32 – Dans la colonne de gauche, l'évolution du coefficient de traînée C_d , dans celle de droite l'évolution du coefficient de portance C_l . De haut en bas, le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut 80 et 200.

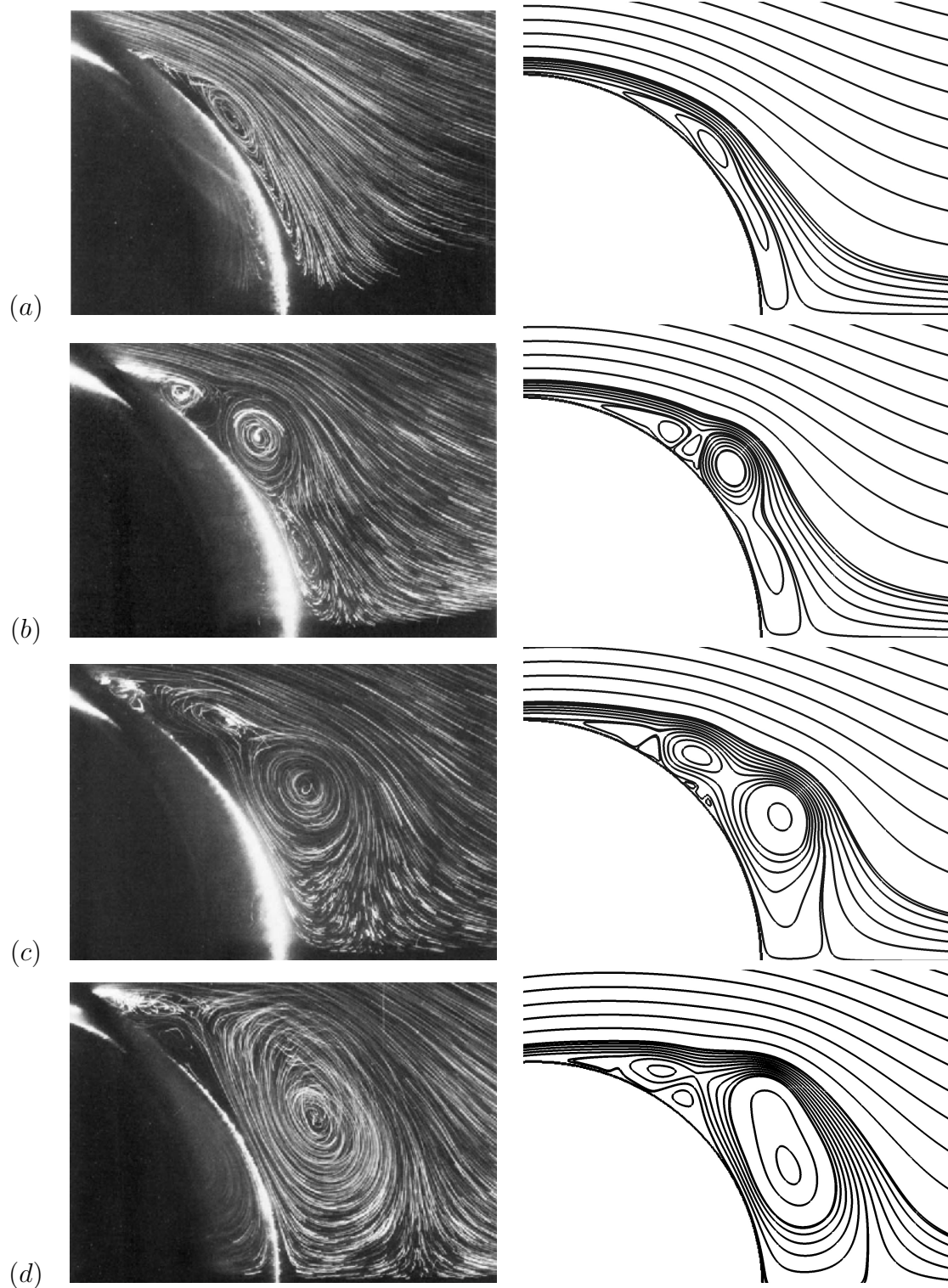


FIGURE 3.33 – Comparaison des lignes de niveaux de la fonction courant ϕ entre, à gauche les résultats expérimentaux de Bouard et Coutanceau et, à droite les résultats numériques de la présente méthode, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 0.75$, (b) $t = 1.0$, (c) $t = 1.25$, (d) $t = 1.5$.

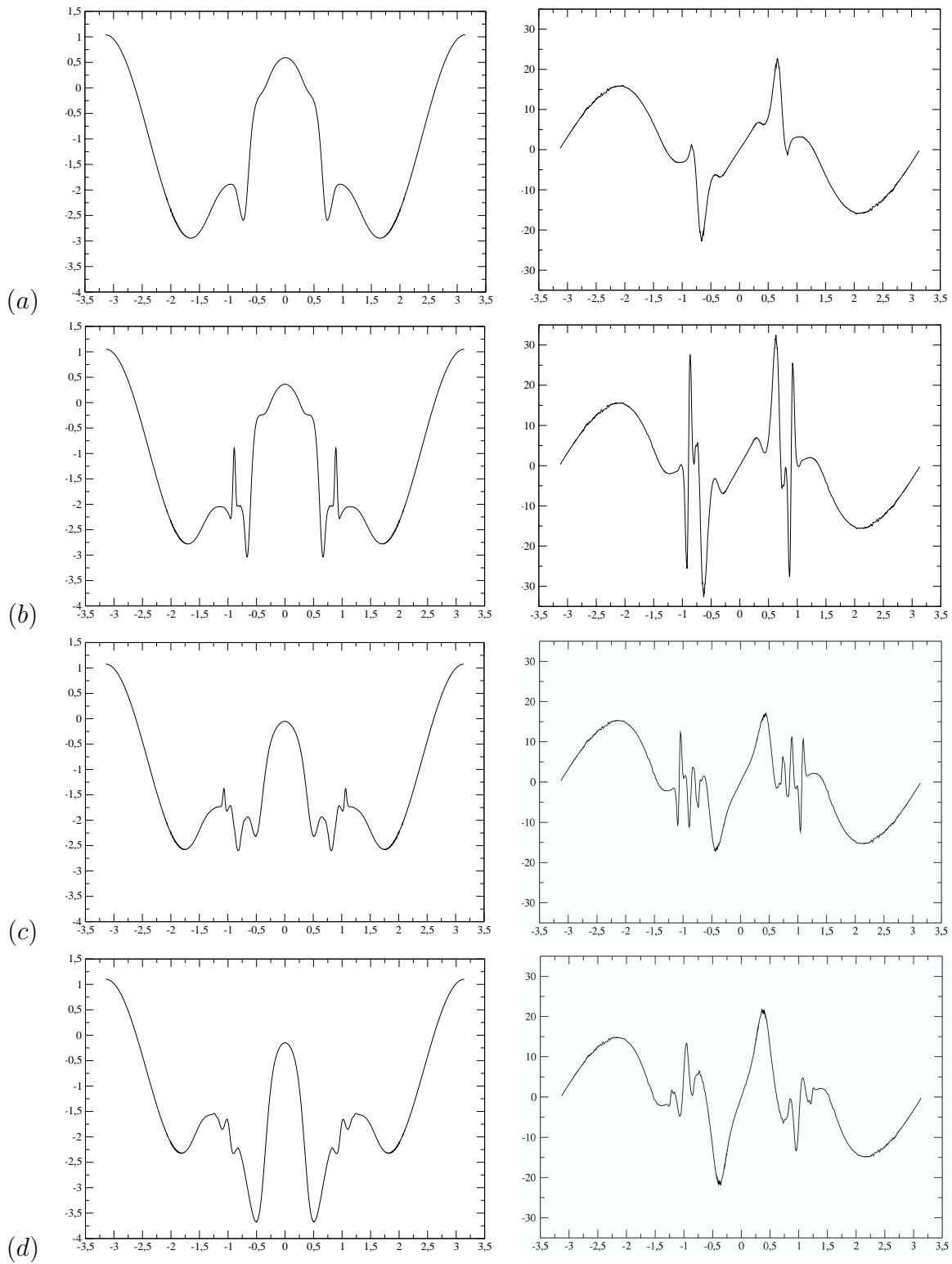


FIGURE 3.34 – À gauche, les courbes de pression et, à droite, les courbes de la contrainte de cisaillement, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 0.75$, (b) $t = 1.0$, (c) $t = 1.25$, (d) $t = 1.5$.

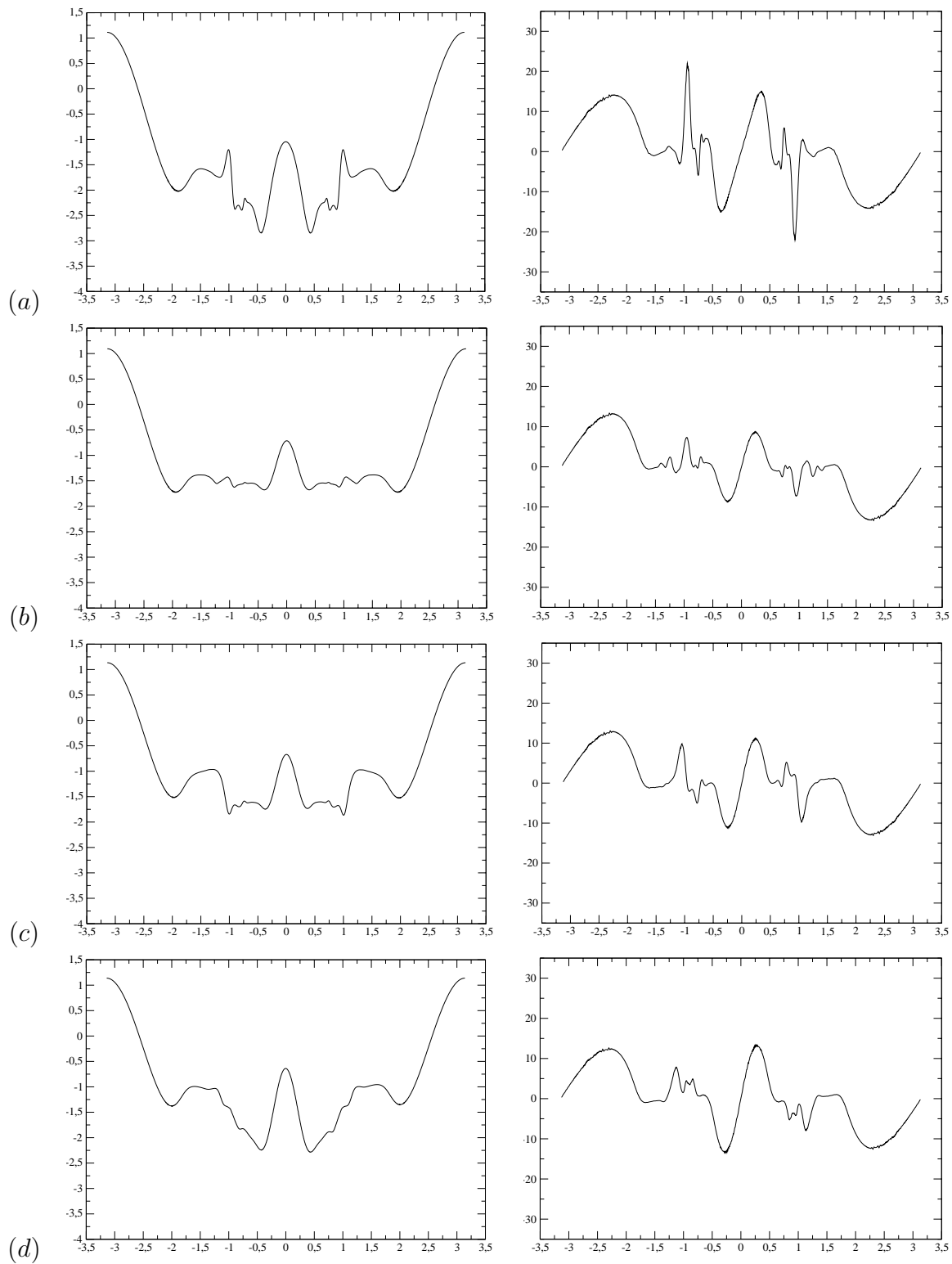


FIGURE 3.35 – À gauche, les courbes de pression et, à droite, les courbes de la contrainte de cisaillement, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 2.0$, (b) $t = 3.0$, (c) $t = 4.0$, (d) $t = 5.0$.

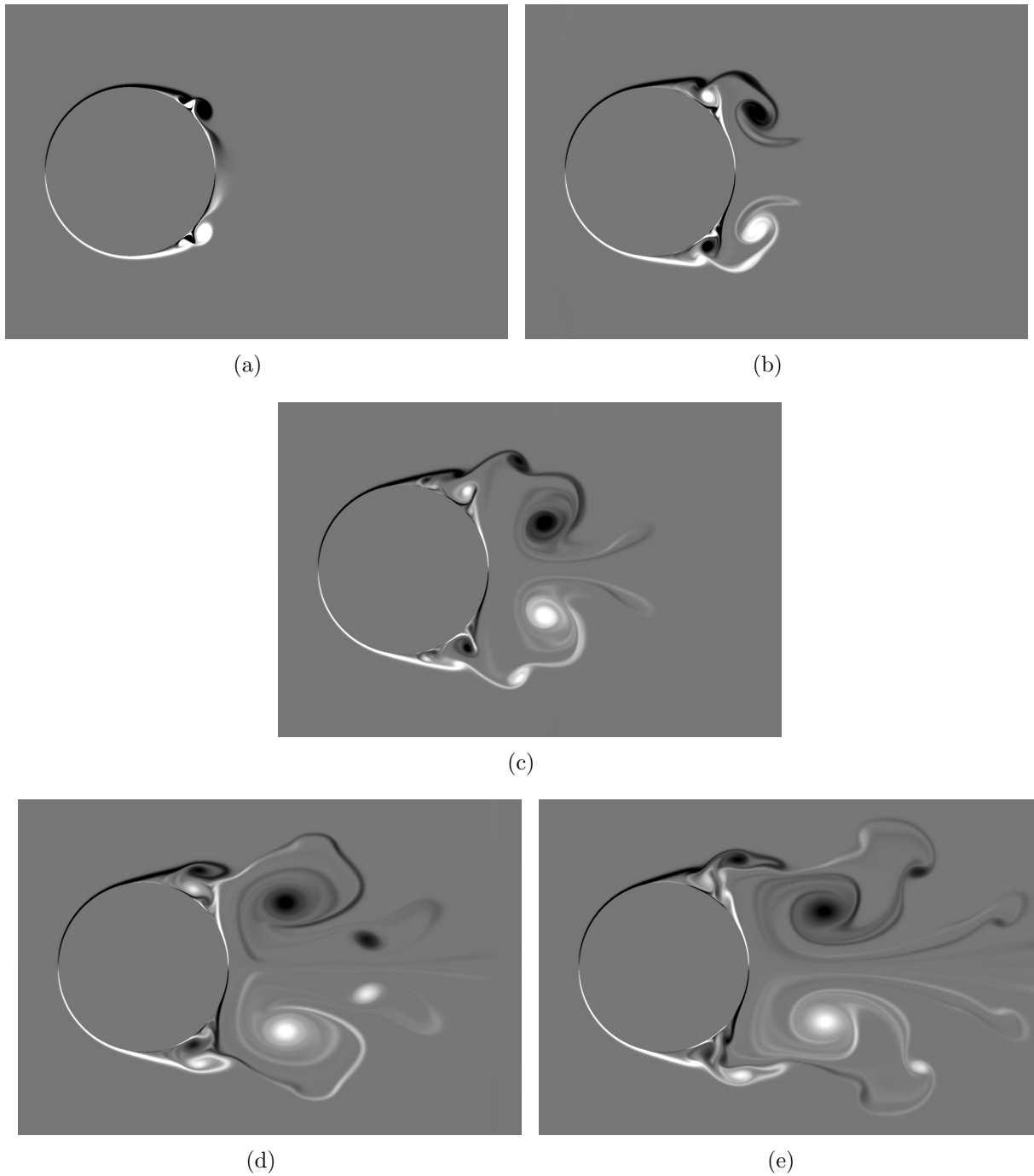


FIGURE 3.36 – Vorticité du champ de vitesse, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 1.0$, (b) $t = 2.0$, (c) $t = 3.0$, (d) $t = 4.0$ et (e) $t = 5.0$.

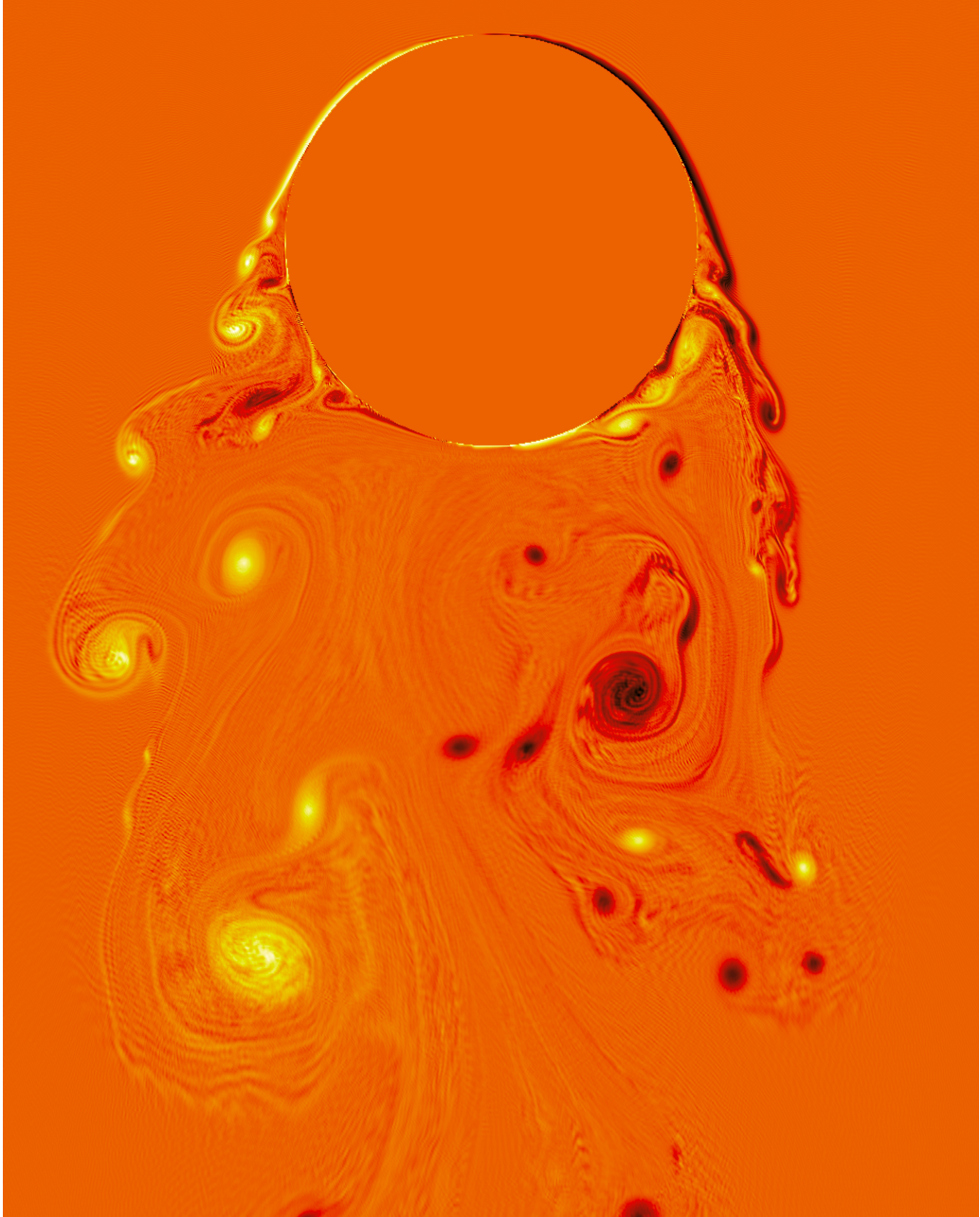
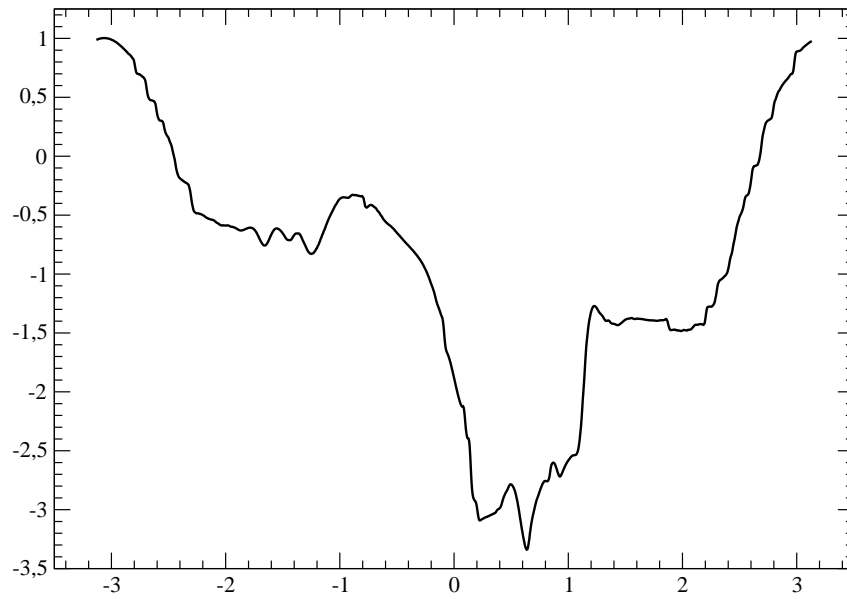
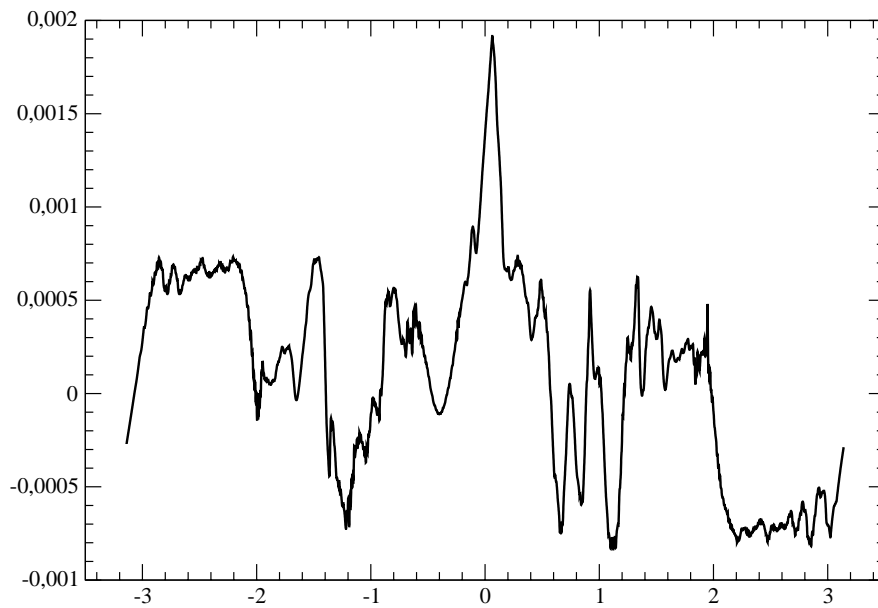


FIGURE 3.37 – Application de la méthode multi-niveaux autour de l'obstacle, vorticité pour $Re = 500\,000$ à $t = 10$.



(a)



(b)

FIGURE 3.38 – Le nombre de Reynolds vaut 500 000. Nous appliquons l’algorithme multi-niveaux autour de l’obstacle. La Figure (a) représente la répartition de la pression sur l’obstacle et la Figure (b) représente la contrainte de cisaillement sur l’obstacle, à l’instant $t = 10$.

Conclusion et perspectives

Le premier objectif de cette thèse concernait la construction de nouveaux opérateurs d'interpolation sur maillage MAC [42] et le développement d'une méthode multi-niveaux utilisant ces opérateurs. Les opérateurs proposés sont d'ordre deux et conservent la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement. Nous avons montré par une analyse spectrale que la décomposition petites/grandes échelles sépare efficacement les échelles de l'écoulement. Une méthode multi-niveaux, inspirée des travaux [11], a été développée dans le contexte de la discrétisation MAC. Elle consiste à appliquer une correction dynamique en temps des petites échelles lorsque l'énergie de celles-ci dépasse un seuil établi en fonction de l'énergie contenue dans les autres échelles. Les résultats présentés dans le cas de la turbulence homogène et de l'écoulement dans une cavité montrent que l'application de la méthode multi-niveaux sur grille grossière permet de diminuer considérablement le temps de calcul de la simulation, comparativement à une simulation numérique directe.

Le deuxième objectif de cette thèse concernait l'application des méthodes multi-niveaux à la simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles. Une nouvelle méthode de type frontière immergée sur maillage MAC a été développée afin de permettre la simulation d'écoulements à nombres de Reynolds élevés. Après une étape de prétraitement, la résolution des systèmes linéaires est effectuée à l'aide d'une méthode directe.

Les résultats sont comparés avec ceux obtenus à l'aide d'autres schémas numériques et avec des données issues d'expériences. Les écoulements autour d'un disque à nombres de Reynolds compris entre 1 et 9 500 sont simulés avec précision. Une simulation numérique multi-niveaux de l'écoulement autour d'un disque au nombre de Reynolds égal à 500 000 a été réalisée. Une simulation numérique directe, c'est-à-dire sans modèle de turbulence, n'est pas envisageable à ce nombre de Reynolds : elle nécessiterait trop de points pour être résolue sur les calculateurs dont nous disposons (coût mémoire et temps CPU trop importants). Ces résultats préliminaires sont très encourageants.

Les perspectives de recherche à la suite de cette thèse sont nombreuses. Nous avons classé ces thèmes par ordre de difficulté croissante.

- Simulations numérique d'écoulements autour d'un ensemble d'objets : la méthode que nous avons proposée s'adapte facilement à l'écoulement autour de plusieurs obstacles. Une distance algébrique d_i (négative dans le fluide) est associée à chaque obstacle Ω_i^S , la distance algébrique à l'ensemble $\bigcup_i \Omega_i^S$ est définie par $d = \max_i d_i$.
- Construction des opérateurs d'interpolation en dimension trois : nous recherchons des opérateurs de restriction et de prolongement d'ordre deux qui agissent sur des champs de vitesse définis sur maillage MAC en dimension trois et qui conservent la contrainte d'incompressibilité. La construction de l'opérateur de restriction est facile, celle de l'opérateur de prolongement est nettement plus complexe.
- Mise en évidence du phénomène de « crise de traînée » aux alentours de $Re = 300\,000$ pour l'écoulement autour d'un cylindre par simulation numérique multi-niveaux et/ou directe.
- Prise en compte de la température du fluide dans les équations de Navier-Stokes : on pourra s'intéresser à la simulation de la convection naturelle autour d'un objet plus

(resp. moins) chaud que le fluide (exemple de tels travaux dans [80]).

- Extension du schéma pour l'écoulement autour d'un obstacle en dimension trois : nous commencerons par étudier le cas où l'obstacle est un volume de révolution (cylindre) de longueur infinie. Une condition aux limites périodique pourrait être appliquée dans la troisième direction. On a représenté sur la Figure 3.39 une maille coupée en dimension trois. Le placement des inconnues et la définition de la divergence discrète se généralisent.

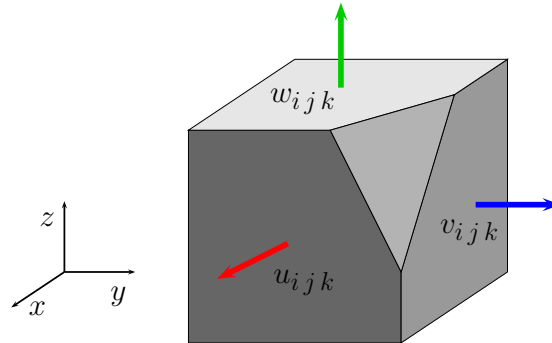


FIGURE 3.39 – Exemple de maille coupée en dimension trois.

- Utilisation d'une méthode de décomposition de domaine pour l'écoulement autour d'un obstacle : l'idée est de résoudre le schéma numérique sur un domaine de petite taille qui contient l'obstacle, lequel est discrétisé par un maillage très fin.
- Méthode de raffinement local : les opérateurs de restriction/prolongement proposés peuvent être utilisés pour raffiner localement la résolution dans les zones de forte activité, comme les couches limites et derrière un obstacle, là où la turbulence se développe et où de nombreuses échelles de petites tailles sont générées.

La simulation numérique d'écoulements bi-dimensionnels a été un contexte favorable au développement de nouvelles méthodes numériques. Les résultats obtenus nous donnent bon espoir quant à l'extension de ces méthodes pour la simulation d'écoulements tri-dimensionnels. Nous pourrions alors traiter des problèmes encore plus réalistes.

Références

- [1] P. Angot, C.H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalisation method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Num. Math.*, 81 :497–520, 1999.
- [2] R. Aris. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, 1962.
- [3] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [4] G.K. Batchelor. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *High-speed Comp. in Fluid Dynamics, Phys. Fluids Suppl. II*, 12 :233–239, 1969.
- [5] A. Belov, L. Martinelli, and A. Jameson. A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations. *AIAA Journal*, 1995.
- [6] P.A. Berthelsen and O.M. Faltinsen. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems in irregular boundaries. *J. Comp. Phys.*, 227 :4354–4397, 2008.
- [7] O. Botella and Y. Cheny. On the treatment of complex geometries in a cartesian grid flow solver with the level set method. In *ECCOMAS CFD*, 2006.
- [8] R. Bouard and M. Coutanceau. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 1. steady flow. *J. Fluid Mech.*, 79 :231–256, 1977.
- [9] R. Bouard and M. Coutanceau. The early stages of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < re < 10^4$. *J. Fluid Mech.*, 101 :583–607, 1980.
- [10] F. Bouchon and T. Dubois. Incremental unknowns : a tool for large eddy simulation ? In *ERCOFTAC*, 1999.
- [11] F. Bouchon and T. Dubois. A les model based on the spectral decay of the kinetic energy. In *European Turbulence Conference*, 2000.
- [12] F. Bouchon, T. Dubois, and N. James. Separation of scales on staggered grids : 1. the periodic case. En préparation.

- [13] F. Bouchon and F. Jauberteau. A multilevel method applied in the nonhomogeneous direction of the channel flow problem. *Appl. Num. Math.*, 36(1) :1–34, 2001.
- [14] F. Bouchon and G. H. Peichl. The immersed interface technique for parabolic problems with mixed boundary conditions. Soumis.
- [15] W.L. Briggs, V.E. Henson, and S.F. Mc Cormick. *A multigrid tutorial Second Edition*. SIAM Books, 2000.
- [16] B. L. Buzbee, F. W. Dorr, J. A. George, and G.H. Golub. The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions. *SIAM J. Num. Anal.*, 8 :722–736, 1971.
- [17] B.L. Buzbee and F.W. Dorr. The direct solution of the biharmonic equation on rectangular regions and the Poisson equation on irregular regions. *SIAM J. Num. Anal.*, 11 :753–763, 1974.
- [18] C. Calgario, A. Debussche, and J. Laminie. On a multi-level approach for the two dimensional navier-stokes equations with finite elements. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 27 :241–258, 1998.
- [19] C. Calgario, J. Laminie, and R. Temam. Dynamical multilevel schemes for the simulation of evolution equations by hierarchical finite element discretization. *Appl. Num. Math.*, 23 :403–442, 1997.
- [20] D. Calhoun. A cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equation in irregular regions. *J. Comp. Phys.*, 176 :231–275, 2002.
- [21] J.P. Chehab. Solution of generalized stokes problems using hierarchical methods and incremental unknowns. *Appl. Num. Math.*, 21 :9–42, 1996.
- [22] M. Cheng, Y.T. Chew, and S.C. Luo. A hybrid vortex method for flows over a bluff body. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 24 :253–274, 1997.
- [23] M.H. Chung. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape. *Comp. Fluids*, 35 :607–623, 2006.
- [24] M. De Tullio, A. Cristallo, E. Balaras, G. Pascazio, P. De Palma, G. Iaccarino, M. Napolitano, and R. Verzicco. Recent advances in the immersed boundary method. In *ECCOMAS CFD*, 2006.
- [25] A. Debussche, J. Laminie, and E. Zahrouni. A dynamical multi-level scheme for the burgers equation : Wavelet and hierarchical finite element. *J. Sci. Comp.*, 25 :445–497, 2005.
- [26] S.C.R Dennis and G. Chang. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds number up to 100. *J. Fluid Mech.*, 42 :471–489, 1970.

-
- [27] E. Deriaz and V. Perrier. Using divergence-free and curl-free wavelets for the simulation of turbulent flows. *Proc. Appl. Math. Mech.*, pages –, 2007.
- [28] H. Ding, C. Shu, and Q.D. Cai. Applications of stencil-adaptative finite difference method to incompressible viscous flows with curved boundary. *Comp. Fluids*, 36 :786–793, 2007.
- [29] J.A. Domaradzki and Saiki E.M. A subgrid-scale model based on the estimation of unresolved scales of turbulence. *Phys. Fluids*, 9 :2148–2164, 1997.
- [30] J.A. Domaradzki and K. Loh. The subgrid-scale estimation model in the physical space representation. *Phys. Fluids*, 11 :2330–2342, 1999.
- [31] T. Dubois and F. Jauberteau. A dynamic multilevel model for the simulation of the small structures in homogeneous isotropic turbulence. *J. Sci. Comp.*, 13(3) :323–367, 1998.
- [32] T. Dubois, F. Jauberteau, and R. Temam. *Dynamic Multilevel Methods and the Numerical Simulation of Turbulence*. Cambridge University Press, 1998.
- [33] T. Dubois, F. Jauberteau, and Y. Zhou. Influence of subgrid scale dynamics on resolvable scale statistics in large-eddy simulations. *Physica D*, 100 :390–406, 1997.
- [34] E.A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yosof. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensionnal complex flow simulations. *J. Comp. Phys.*, 161 :35–60, 2000.
- [35] S. Faure. *Méthodes de volumes finis et multiniveaux pour les équations de Navier-Stokes, de Burgers et de la chaleur*. PhD thesis, Université Paris 11 Orsay, 2003.
- [36] S. Faure. Finite volume discretization and multilevel methods in flow problems. *J. Sci. Comp.*, 25 :231–261, 2004.
- [37] C. Fois, O.P. Maley, and R. Temam. Modelling of the interaction of small and large eddies in two-dimensional turbulent flows. *Math. Mod. and Num. Anal.*, 22 :93–114, 1987.
- [38] B. Fornberg. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 98 :819–855, 1980.
- [39] Tong Gao, Yu-Heng Tseng, and Xi-Yun Lu. An improved hybrid cartesian/immersed boundary method for fluid-solid flows. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 55 :1189–1211, 2007.
- [40] A. George, L.C. Huang, W.P. Tang, and Y.D. Wu. Numerical simulation of unsteady incompressible flow (re<9500) on the curvilinear half-staggered mesh. *SIAM J. Sci. Comp.*, 21(6) :2331–2351, 2000.
-

- [41] J.L. Guermond, P. Mineev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.*, 195 :6011–6045, 2006.
- [42] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8(12) :2182–2189, 1965.
- [43] R.D. Henderson. Details of the drag curve near the onset of vortex shedding. *Phys. Fluids*, 7 :2102–2104, 1995.
- [44] C. Hsu. *A curvilinear-coordinate method for momentum, heat and mass transfer in domains of irregular geometry*. PhD thesis, University of Minnesota, 1981.
- [45] J. Kim, D. Kim, and H. Choi. An immersed-boundary finite-volume method for simulation of flow in complex geometries. *J. Comp. Phys.*, 171 :132–150, 2001.
- [46] M.P. Kirpatrick, S.W. Armfield, and J.H. Kent. A representation of curved boundaries for the solution of the navier-stokes equations on a staggered three-dimensional cartesian grid. *J. Comp. Phys.*, 184 :1–36, 2003.
- [47] AN Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30 :301–305, 1941.
- [48] AN Kolmogorov. On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 31 :538–341, 1941.
- [49] P. Koumoutsakos and A. Leonard. High-resolutions of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods. *J. Fluid Mech.*, 296 :1–38, 1995.
- [50] R.H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10 :1417–1423, 1967.
- [51] Ming-Chih Lai and Charles S. Peskin. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *J. Comp. Phys.*, 160 :705–719, 2000.
- [52] C.E. Leith. Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 11 :671–73, 1968.
- [53] D.K. Lilly. Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 45 :395–415, 1971.
- [54] E. Lima, A.L.F. Silva, A. Silveira-Neto, and J.J.R. Damasceno. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *J. Comp. Phys.*, 189 :351–370, 2003.
- [55] M.N. Linnick and H.F. Fasel. A high-order immersed boundary interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *J. Comp. Phys.*, 204 :157–192, 2005.

-
- [56] M.N. Linnick and H.F. Fasel. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *J. Comp. Phys.*, 204 :157–192, 2005.
- [57] C. Liu, X. Zheng, and C.H. Sung. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *J. Comp. Phys.*, 139 :35–57, 1998.
- [58] N. Matsunaga and T. Yamamoto. Superconvergence of the shortley-weller approximation for dirichlet problems. *J. Comp. Appl. Math.*, 116 :263–273, 2000.
- [59] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F.M. Najjar, A. Vargas, and A. von Loebbecke. A versatil shap interface immersed boundary method for incompressible floxs with complex boundaries. *J. Comp. Phys.*, 227 :4825–4852, 2008.
- [60] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F.M. Najjar, A. Vargas, and A. Von Loebbecke. A versatile shap interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *J. Comp. Phys.*, 227 :4825–4852, 2008.
- [61] T. Miyake, Y. Sakamoto, H. Tokunaga, and N. Satofuka. Numerical solution of incompressible flow using two-step, one-stage runge-kutta time integration scheme. In *European Comp. Fluid Dynamics Conference*, 1992.
- [62] J. Park, K. Kwon, and H. Choi. Numerical solutions of flow past a circular cylinder at reynolds number up to 160. *KSME Int.*, 12, 1998.
- [63] M. Peric, R. Kessler, and G. Scheuerer. Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and colocated grids. *Comp. Fluids*, 16 :389–403, 1988.
- [64] P. Pouillet. Staggered incremental unknowns for solving stokes and generalized stokes problems. *Appl. Num. Math.*, 35 :23–41, 2000.
- [65] C. Prakash. *A finite element method for predicting flow through ducts with arbitrary cross sections*. PhD thesis, University of Minnesota, 1981.
- [66] C. Rhie. *A numerical study of the flow past an isolated airfoil with separation*. PhD thesis, University of Illinois, 1981.
- [67] S.E. Rogers and D. Kwak. Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible navier-stokes equations. *AIAA Journal*, 28 :254–262, 1990.
- [68] D. Sucker and H. Brauer. Fluidodynamik bei der angestromten zilindern. *Warme Stoffubertragung*, 8 :-, 1975.
- [69] K. Taira and T. Colonius. The immersed boundary method : a projection approach. *J. Comp. Phys.*, 225 :2118–2137, 2007.
- [70] R. Temam. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Appl. Math. Sci., 1988.
-

- [71] R. Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*. American Mathematical Society, 2001.
- [72] G. Tóth and P.L. Roe. Divergence- and curl- preserving prolongation and restriction formulas. *J. Comp. Phy.*, 180 :736–750, 2002.
- [73] D.J. Tritton. Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6 :-, 1959.
- [74] Y.H. Tseng and J.H. Ferziger. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comp. Phys.*, 192 :593–623, 2003.
- [75] Yu-Heng Tseng and Joel H. Ferziger. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comp. Phys.*, 192 :593–623, 2003.
- [76] J. van Kan. A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Statist. Comp.*, 7(3) :870–891, 1986.
- [77] P. Wesseling. *An introduction to multigrid methods*. John Wiley and Sons, 1992.
- [78] Pieter Wesseling. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer, 2000.
- [79] C.H.K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 28, 1996.
- [80] S. Xin, M.C. Duluc, F. Lusseyran, and P. Quéré. Numerical simulations of natural convection around a line-source. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid*, 14(7) :830–850, 2004.
- [81] T. Ye, R. Mittal, H.S. Udaykumar, and W. Shyy. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *J. Comp. Phys.*, 156 :209–240, 1999.
- [82] S. Zeng and P. Wesseling. Multigrid solution of incompressible navier-stokes equation in general coordinates. *SIAM J. Num. Anal.*, 31 :1764–1784, 1994.

Table des matières

Introduction	11
1 Modélisation des écoulements incompressibles turbulents	17
1.1 Écoulements fluides : modélisation mathématique et aspects physiques	18
1.1.1 Les équations de Navier-Stokes	18
1.1.1.1 Un peu de modélisation	18
1.1.1.2 Les problèmes étudiés	23
1.1.1.3 Quelques résultats mathématiques	27
1.1.2 Théorie phénoménologique de la turbulence	29
1.1.2.1 Notations	29
1.1.2.2 Comportement asymptotique des solutions.	31
1.1.2.3 Loi de décroissance du spectre.	31
1.1.3 Couche limite et traînée	32
1.1.3.1 Couche limite	32
1.1.3.2 Bilan de forces agissant sur une paroi	33
1.2 Discrétisations des équations de Navier-Stokes	36
1.2.1 Le schéma MAC	36
1.2.1.1 Méthode de projection	36
1.2.1.2 Discrétisation spatiale.	37
1.2.2 Méthodes de résolution des systèmes linéaires	41
1.2.2.1 Bases de vecteurs propres	41
1.2.2.2 Cholesky	43
1.2.2.3 Découplage du système en n systèmes tri-diagonaux	44
1.2.2.4 Formulation matricielle	44
1.2.2.5 Changement de base	46
1.2.2.6 Matrice de permutation	47
1.2.2.7 Si les vecteurs propres ne sont pas normés	49
1.2.3 Méthodes spectrales	50
2 Algorithme multi-niveaux et applications	53
2.1 Introduction.	55
2.1.1 Enjeux et motivations.	55
2.1.2 Objectifs.	56
2.1.3 Quelques méthodes existantes.	57

2.2	Notations et définitions	58
2.3	Propriétés géométriques des opérateurs	60
2.3.1	Invariance des opérateurs	60
2.3.1.1	Opérateur de restriction	60
2.3.1.2	Opérateur de prolongement	62
2.3.2	Ordre d'un opérateur	63
2.3.3	Consistance avec la contrainte d'incompressibilité	68
2.3.4	Conservation de la contrainte d'incompressibilité	71
2.4	Construction des opérateurs	72
2.4.1	Opérateur de restriction	73
2.4.1.1	L'opérateur de restriction \mathcal{R}^{ZW}	73
2.4.1.2	L'opérateur de restriction \mathcal{R}^{TR}	74
2.4.1.3	L'opérateur de restriction \mathcal{R}^{BDJ}	74
2.4.2	Opérateur de prolongement	75
2.4.2.1	L'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{ZW}	75
2.4.2.2	L'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{TR}	76
2.4.2.3	L'opérateur de prolongement \mathcal{P}^{BDJ}	77
2.5	Séparation des échelles	79
2.5.1	Propriétés de conservation	79
2.5.2	Propriétés dans l'espace physique	80
2.5.3	Propriétés dans l'espace spectral.	81
2.5.3.1	Restriction	82
2.5.3.2	Prolongement	85
2.5.3.3	Illustration de la séparation des échelles sur un champ analytique.	90
2.5.3.4	Illustration de la séparation des échelles sur un écoulement issu d'une simulation.	90
2.6	Méthodes multiniveaux	93
2.6.1	Décomposition de la vitesse	93
2.6.2	Coefficients de correction locaux.	100
2.6.3	Description de l'algorithme	102
2.7	Résultats numériques	103
2.7.1	Simulations numériques directes	103
2.7.1.1	La condition initiale	103
2.7.1.2	Les paramètres et les grandeurs caractéristiques	105
2.7.1.3	La force extérieure	105
2.7.1.4	Convergence en fonction de la taille du maillage	106
2.7.2	Les solutions multi-niveaux.	113
2.8	Opérateurs d'interpolation et conditions aux limites de Dirichlet	116
2.8.1	Extension du champ de vitesse sur les mailles fictives.	118
2.8.2	Restriction et prolongement de la vitesse sur le bord.	121
2.8.3	Application à la simulation de la cavité entraînée.	122

3	Nouveau schéma pour la simulation d'écoulements autour d'obstacles	127
3.1	Description du problème	128
3.1.1	Le domaine d'étude	128
3.1.2	Le nombre de Reynolds	129
3.1.3	L'obstacle	129
3.2	Le placement des inconnues	131
3.2.1	Le maillage	131
3.2.2	Ratios	131
3.2.3	Placement des inconnus	134
3.3	Discrétisation de l'étape de prédiction	134
3.3.1	Discrétisation du Laplacien	135
3.3.2	Approximation de la non-linéarité	137
3.3.2.1	Quelques notations particulières	137
3.3.2.2	Propriété fondamentale du terme non-linéaire	138
3.3.2.3	En absence d'obstacle	139
3.3.2.4	Approximation de la non-linéarité par une approche Volumes Finis. Approximation par une reconstruction des flux au se- cond ordre	145
3.3.2.5	Formule d'approximation conservative	153
3.4	Discretisation de l'étape de correction	154
3.4.1	La divergence discrète en présence d'un obstacle	155
3.4.2	Gradient de pression et opérateur d'interpolation	157
3.5	Description du solveur rapide	159
3.6	Simulations numériques directes	160
3.6.1	Écoulements stationnaires	161
3.6.2	Écoulements à nombres de Reynolds modérés : $Re=80$ et 200	170
3.6.3	Écoulements à nombre de Reynolds élevé : $Re=9500$	174
3.7	Simulations multi-niveaux : résultats préliminaires	174

Table des figures

1.1	La trajectoire d'une particule de fluide.	19
1.2	Un volume matériel se déforme au cours du temps.	19
1.3	Exemples d'écoulements : périodique (a), dans une cavité (b) et autour d'un obstacle (c).	28
1.4	Modes compris dans la couronne S_k	30
1.5	Décroissance du spectre d'énergie en dimension deux. En trait plein, le spectre d'énergie $E(k)$, en tirets la fonction $k^3 E(k)$. Dans la zone inertielle $[k_L, k_d]$, la pente du spectre d'énergie est en k^{-3}	32
1.6	Forces appliquées sur un obstacle placé dans un fluide.	33
1.7	Couche limite et contrainte de cisaillement.	35
1.8	Position des inconnues discrètes sur le maillage.	38
2.1	Placement décalé des inconnues discrètes sur le maillage.	59
2.2	Les opérateurs d'interpolation transfèrent le champ de vitesse entre des niveaux de grille ayant un facteur de raffinement égal à deux.	61
2.3	Douze valeurs interviennent dans la calcul de la restriction \mathcal{R}^{ZW}	73
2.4	Deux valeurs interviennent dans la calcul de la restriction \mathcal{R}^{TR}	74
2.5	Huit valeurs interviennent dans la calcul de la restriction \mathcal{R}_α^{BDJ}	75
2.6	Jusqu'à quatre valeurs interviennent dans la calcul du prolongement \mathcal{P}^{ZW}	76
2.7	Jusqu'à dix valeurs interviennent dans la calcul du prolongement \mathcal{P}^{TR}	77
2.8	Jusqu'à huit valeurs interviennent dans la calcul du prolongement $\mathcal{P}_\lambda^{BDJ}$	78
2.9	Effet de la restriction sur les coefficients de Fourier	83
2.10	Effet du prolongement sur les coefficients de Fourier (N=1024).	90
2.11	Lignes de niveau de la vortacité : filtrage des grandes échelles avec les opérateurs \mathcal{R}^{ZW} et \mathcal{P}^{ZW}	91
2.12	Lignes de niveau de la vortacité : filtrage des grandes échelles avec les opérateurs \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{P}^{TR}	91
2.13	Lignes de niveau de la vortacité : filtrage des grandes échelles avec les opérateurs \mathcal{R}^{BDJ} et \mathcal{P}^{BDJ}	92
2.14	Comparaison des spectres d'énergie. En trait plein noir, celui du champ de vitesse de référence, en pointillés rouges celui des grandes échelles pour les opérateurs \mathcal{R}^{ZW} et \mathcal{P}^{ZW} , en tirets rouges celui des grandes échelles pour les opérateurs \mathcal{R}^{TR} et \mathcal{P}^{TR} et en trait plein rouge celui des grandes échelles pour les opérateurs \mathcal{R}^{BDJ} et \mathcal{P}^{BDJ}	92

2.15	La colonne de gauche (resp. droite) correspond à une simulation sur une grille à 2048^2 points (resp. 1024^2 points). En haut, (a) et (b), la vorticité de champ de vitesse, au milieu, (e) et (f), celle des grandes échelles et en bas, (c) et (d), celle des petites échelles.	94
2.16	On a représenté le spectre d'énergie pour une simulation sur une grille à 2048^2 points (a), 1024^2 points (b). En trait plein celui de u^n , en pointillés celui de des petites échelles, en tirets celui des grandes échelles. La séparation des échelles est ici réalisée avec les opérateurs $\mathcal{R}_\alpha^{\text{BDJ}}$ et $\mathcal{P}_\lambda^{\text{BDJ}}$	95
2.17	« Filtrage » d'un champ de vitesse.	96
2.18	« Filtrage » d'un champ de vitesse. Le spectre d'énergie d'un champ de vitesse défini sur une grille à 2048^2 points est représenté en trait plein, les spectres associés aux champs filtrés $\mathcal{F}^i u^n$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont tracés respectivement en tirets, en traits mixtes et en pointillés.	97
2.19	Décomposition des échelles de deux champs de vitesse : (a)-(c) la turbulence est résolue, (b)-(d) la turbulence n'est pas résolue. On a représenté pour chaque niveau d'échelle ($n_{niv} = 3$), (a)-(b) le spectre d'énergie et (c)-(d) l'énergie cinétique.	99
2.20	Spectres d'énergie de la condition initiale et de la solution obtenue à $t = 1,0$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ sur une grille à 4096^2 points.	104
2.21	Isovaleurs de la vorticité de la condition initiale. Les valeurs utilisées sont $\{-12, -10, -8, -6, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Les lignes de niveaux représentées avec des tirets correspondent aux valeurs négatives de ω_0	104
2.22	Isovaleurs de la vorticité de la force extérieure. Les valeurs utilisées ici sont $\{-0.2, -0.1, -0.05, -0.025, -0.01, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.2\}$. Les lignes de niveaux représentées avec des tirets correspondent aux valeurs négatives.	106
2.23	Spectre d'énergie de la vitesse \mathbf{u} � $t = 20$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ et $n = 1024, 2048$ et 4096	108
2.24	Spectre d'énergie de la vitesse \mathbf{u} � $t = 20$ pour $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ et $n = 1024, 2048$ et 4096	109
2.25	Représentation de $k^{35}E(k)$ à $t = 20$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ (ligne pleine) et $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ (tiret). La résolution est de 4096^2 points.	109
2.26	Spectre d'énergie (trait plein) et $k^3E(k)$ (tiret) � $t = 10$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$. La résolution est de 4096^2 points.	110
2.27	Vorticité à $t = 10$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.	110
2.28	Vorticité à $t = 20$ pour $\nu = 3,33 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.	111
2.29	Vorticité à $t = 10$ pour $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.	111
2.30	Vorticité à $t = 20$ pour $\nu = 2,0 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 4096^2 points.	112
2.31	Spectre d'énergie (trait plein) et $k^3E(k)$ (tiret) � $t = 5$ pour $\nu = 1,33 \times 10^{-6}$ et $n = 8192$	112
2.32	Vorticité à $t = 5$ pour $\nu = 1,33 \times 10^{-6}$ calculée sur une grille à 8192^2 points.	113
2.33	(a) Spectre d'énergie associé à la simulation directe sur une grille à 4096^2 points (trait plein), à 256^2 points (en tirets), au temps $t = 20$. (b) Evolution du rapport $r(\mathbf{u})$ pour la simulation directe sur une grille à 256^2 points.	114

2.34	Evolution de l'énergie contenue dans les petites échelles $\delta_{\mathcal{F}}^1 \mathbf{u}$, les paramètres de l'algorithme multi-niveaux sont $r_{max} = 1$ et $c_{min} = 0$	115
2.35	(a) Spectre d'énergie associé à la simulation directe sur une grille à 4096^2 points (trait plein), simulation multi-niveaux sur grille à 256^2 points (en tirets), au temps $t = 20$. Les paramètres de la simulations multi-niveaux sont $r_{max} = 1$ et $c_{min} = 0.99$. (b) Evolution du rapport $r(\mathbf{u})$ pour la simulation multi-niveaux, aux premiers instants de la simulation $10 \leq t \leq 10.5$	117
2.36	Spectre d'énergie associé à la simulation directe sur une grille à 4096^2 points (trait plein), simulation multi-niveaux sur grille à 256^2 points (en tirets), au temps $t = 20$. Les paramètres de la simulations multi-niveaux sont $r_{max} = 1.2$ et $c_{min} = 0.99$	118
2.37	Comparaison du champ de vorticité à $t = 20$: (a) simulation de référence, (b) simulation directe sur grille à 256^2 points, (c) simulation multi-niveaux sur cette même grille. Les paramètres de la simulations multi-niveaux sont : $r_{max} = 1.2$ et $c_{min} = 0.99$	119
2.38	Extension de la vitesse sur les mailles fictives.	120
2.39	Interpolation de la vitesse sur le bord.	121
2.40	Profil de la vitesse dans la cavité à l'instant $t = 4$	124
2.41	Energie des niveaux d'échelle pour chaque simulation.	124
2.42	La viscosité du fluide vaut 10^{-5} , on a représenté la vorticité du champ de vitesse, au temps $t = 4$, de la solution numérique directe obtenue sur une grille à 1024^2 points (a), 256^2 points (b) et de la solution multi-niveaux sur une grille à 256^2 points (c).	125
3.1	Domaine de calcul.	128
3.2	Quelques dimensions de domaines utilisés pour un écoulement à nombre de Reynolds $Re = 40$	129
3.3	Différents types de sillage : (a) ��coulement dit « rampant », (b) deux zones de recirculation, (c) allée tourbillonnaire de Von Karman, (d) couche limite laminaire, sillage turbulent large, (e) couche limite turbulente, sillage turbulent étroit.	130
3.4	écoulement autour d'un obstacle : décomposition du domaine d'étude.	130
3.5	Pas d'espace dans la direction horizontale.	132
3.6	Calcul du ratio r_{ij}^u à partir de la distance algébrique.	133
3.7	Approximation de la courbe Γ	133
3.8	Placement des inconnues sur le maillage. On a représenté la maille K_{ij}	134
3.9	Points d'interpolation intervenant dans l'approximation du Laplacien pour u	136
3.10	Erreur d'approximation du terme non-linéaire loin de l'obstacle. On observe une convergence d'ordre deux.	144
3.11	Le domaine \tilde{K}_{ij}^u est représenté en gris. On introduit trois types de flux sur le bord d'une maille coupée.	146
3.12	La maille K_{ij}^u est coupée par l'obstacle. On a représenté les quantités mises en jeu dans le calcul de $F_{ij}^{B\ app}$	148

3.13	Nouveaux flux sur le bord de \tilde{K}_{ij}^u	149
3.14	Le coefficient C_h en fonction du pas d'espace.	151
3.15	Erreur d'approximation du terme non-linéaire près de l'obstacle. On observe une convergence d'ordre un.	152
3.16	La maille K_{ij} est coupée par Γ	155
3.17	Divergence discrète généralisée aux cut-cell.	156
3.18	Interpolation du gradient de pression au point M_{ij}^u	158
3.19	Lignes de niveau de la fonction de courant associée à la dynamique d'un écoulement autour d'un disque. Le nombre de Reynolds vaut 1 (a), 10 (b), 20 (c) et 40 (d).	164
3.20	Lignes de niveau de la pression associée à la dynamique d'un écoulement autour d'un disque. Le nombre de Reynolds vaut 1 (a), 10 (b), 20 (c) et 40 (d).	165
3.21	Lignes de niveau de la vorticité de la vitesse associée à la dynamique d'un écoulement autour d'un disque. Le nombre de Reynolds vaut 1 (a), 10 (b), 20 (c) et 40 (d).	166
3.22	Definition des dimensions caractéristiques de la structure d'un écoulement stationnaire.	166
3.23	Colonne de gauche, angle de séparation exprimé en degré et colonne de droite longueur de la zone de recirculation à l'arrière de l'obstacle. De haut en bas, le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut 10, 20, 40.	168
3.24	Sur la Figure (a) évolution du maximum de la divergence en valeur absolue du champ de vitesse. Sur la Figure (b) évolution des coefficients sym_u et sym_v représentés respectivement en noir et rouge.	169
3.25	Dans la colonne de gauche, la répartition de la pression sur l'obstacle et dans celle de droite, la contrainte de cisaillement sur l'obstacle. De haut en bas, le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut 1, 10, 20 et 40.	171
3.26	Evolution du coefficient de traînée : (a) $Re = 1$, (b) $Re = 10$, (c) $Re = 20$ et (d) $Re = 40$	172
3.27	Le nombre de Reynolds vaut 40. On a représenté le profil de u à $x = 0$ (c), profil de u à $y = 0$ en amont (a), profil de u à $y = 0$ en aval (b), profil de v à $x = 0$ (d).	173
3.28	Capteur de vitesse au point $(-1.4, 0)$: en trait plein, la composante horizontale u , en pointillés, la composante verticale v . Le nombre de Reynolds vaut 80. On observe un signal sinusoïdal.	173
3.29	Evolution de la vitesse de rotation imposée à l'obstacle pour déstabiliser l'écoulement.	174
3.30	Ecoulement autour d'un disque au temps $t = 100$. De bas en haut, les lignes de niveau de la fonction de courant ϕ , de la vorticité ω et de la pression p . Dans la colonne de gauche, le nombre de Reynolds vaut 80, dans celle de droite 200.	175
3.31	Dans la colonne de gauche, la répartition de la pression sur l'obstacle et dans celle de droite, la contrainte de cisaillement sur l'obstacle. De haut en bas, le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut 80 et 200.	176

3.32	Dans la colonne de gauche, l'évolution du coefficient de traînée C_d , dans celle de droite l'évolution du coefficient de portance C_l . De haut en bas, le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut 80 et 200.	177
3.33	Comparaison des lignes de niveaux de la fonction courant ϕ entre, à gauche les résultats expérimentaux de Bouard et Coutanceau et, à droite les résultats numériques de la présente méthode, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 0.75$, (b) $t = 1.0$, (c) $t = 1.25$, (d) $t = 1.5$	178
3.34	À gauche, les courbes de pression et, à droite, les courbes de la contrainte de cisaillement, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 0.75$, (b) $t = 1.0$, (c) $t = 1.25$, (d) $t = 1.5$	179
3.35	À gauche, les courbes de pression et, à droite, les courbes de la contrainte de cisaillement, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 2.0$, (b) $t = 3.0$, (c) $t = 4.0$, (d) $t = 5.0$	180
3.36	Vorticité du champ de vitesse, pour $Re = 9500$ et au temps (a) $t = 1.0$, (b) $t = 2.0$, (c) $t = 3.0$, (d) $t = 4.0$ et (e) $t = 5.0$	181
3.37	Application de la méthode multi-niveaux autour de l'obstacle, vorticité pour $Re = 500\ 000$ à $t = 10$	182
3.38	Le nombre de Reynolds vaut 500 000. Nous appliquons l'algorithme multi-niveaux autour de l'obstacle. La Figure (a) représente la répartition de la pression sur l'obstacle et la Figure (b) représente la contrainte de cisaillement sur l'obstacle, à l'instant $t = 10$	183
3.39	Exemple de maille coupée en dimension trois.	188

Liste des tableaux

1.1	Masse volumique et viscosité dynamique de quelques fluides usuels.	24
1.2	Viscosité cinématique et nombre de Reynolds associés aux écoulements de quelques fluides usuels. Les grandeurs caractéristiques sont ici $L_* = 10^{-2} m$ et $U_* = 5 m.s^{-1}$	25
2.1	Paramètres et grandeurs caractéristiques des conditions initiales des simulations numériques directes.	105
2.2	Paramètres et grandeurs caractéristiques des conditions initiales des simulations multi-niveaux.	108
3.1	Convergence en grille : on a reporté pour chaque simulation le coefficient de traînée.	161
3.2	Convergence en grille : on fait varier la hauteur du domaine.	162
3.3	Convergence en grille : on fait varier la longueur du domaine en amont.	162
3.4	Convergence en grille : on fait varier la longueur du domaine en aval.	163
3.5	Simulations étudiée dans le cas stationnaire.	163
3.6	Écoulements à nombres de Reynolds 20 et 40 : comparaison avec les résultats obtenus dans littérature.	167
3.7	Coefficient de traînée : contribution des forces de pression et de frottement. . .	167
3.8	Écoulements à nombre de Reynolds 80 et 200 : résultats dans la littérature. . .	172

Résumé

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit concernent l'application des méthodes multi-niveaux pour la simulation numérique des écoulements incompressibles turbulents dans le cadre d'une approximation Volumes Finis avec placement des inconnues sur grilles décalées (Harlow et Welch [42]), ainsi que le développement d'une nouvelle méthode de type frontière immergée sur maillage cartésien pour la simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles. Les écoulements considérés dans cette étude sont bidimensionnels.

Mots-clés : méthodes multi-niveaux, simulation numérique des écoulements incompressibles turbulents, volumes finis, différences finies, grilles décalées, méthode de type frontière immergée, maillages cartésiens, écoulements autour d'obstacles.

Abstract

The research presented in this manuscript concerns the application of multilevel methods for the numerical simulation of incompressible turbulent flows in the framework of Finite Volume approximation with arrangement of the unknowns on staggered grids (Harlow and Welch [42]) and the development of a new immersed boundary method on cartesian grids for numerical simulations of flows past obstacles. The flows considered in this study are two-dimensional.

Keywords : multilevel methods, numerical simulation, turbulent incompressible flows, finite volume method, finite difference method, staggered grid, immersed boundary method, cartesian grid, flows past obstacles.