Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Le corps $\mathbb{C}$

On trouve dans les livres de Terminales ou de DEUG, la définition des nombres complexes, de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ avec les propriétés habituelles :
Pour l'addition : associativité $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$, commutativité $z+z' = z'+z$, 0 est élément neutre et tout élément $z = x+iy$ admet un opposé $-z = -x-iy$.
Pour la multiplication : associativité $(z\,z')\,z'' = z\,(z'\,z'')$, commutativité $z\,z' = z'\,z$, 1 est élément neutre et tout élément non nul admet un inverse $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{\overline{z}}{z\,\overline{z}}$. Il y a distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $z\,(z'+z'') = z\,z' + z\,z''$.

On dit qu'on a un corps commutatif, que l'on note $\mathbb{C}$.

Théorème 1.1 *Unicité de l'écriture $z = x+iy$ avec x et y* réels
Si $x+iy = x'+iy'$ avec x, x', y, y' réels*, alors $x = x'$ et $y = y'$.*

On appelle partie réelle $\mathcal{R}e(z)$ et partie imaginaire $\mathcal{I}m(z)$, les nombres réels x et y tels que $z = x+iy$.
Le conjugué $\overline{z}$ de $z = x+iy$ est le complexe $\overline{z} = x-iy$.

On a les identités remarquables comme $(z+z')(z-z') = z^2 - z'^2$
$(z+z')^2 = z^2 + 2z\,z' + z'^2$ et $(z-z')^2 = z^2 - 2z\,z' + z'^2$ que l'on généralise avec les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.2 *Somme d'une série géométrique* $\quad S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$
on a : $\quad S = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ *si* $z \neq 1$, $\quad$ *et* $\;S = n+1$ *si* $z = 1$.

Ce théorème permet de factoriser toute différence de type $z^n - 1$ ou mieux :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + z^{n-2}\,a + z^{n-3}\,a^2 + \ldots + z\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

Exemples : $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a) \qquad z^3 - a^3 = (z-a)(z^2+az+a^2)$
$z^5 - a^5 = (z-a)(z^4 + az^3 + a^2z^2 + a^3z + z^4)$

Théorème 1.3 *Formule du binôme de Newton :*
Pour tous a et b de $\mathbb{C}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient du binôme $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
(du triangle de Pascal ci-contre).

$$\begin{array}{llllll}
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots & & & & &
\end{array}$$

N.B. : le coefficient du binôme $\binom{n}{k}$ se note aussi C_n^k

Exemple : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Bien comprendre la notation $\sum\limits_{k=0}^{n}$ qui introduit une somme d'autant de termes qu'il y a d'entiers k allant de 0 à n, chacun des termes de la somme est donné en fonction de la valeur de cet entier k. Cet entier k est appelé "indice de sommation", c'est une "variable muette", c-à-d qui n'apparaît pas dans le résultat de la somme.

N.B. : Par convention dans cette formule $a^0 = 1$ et $b^0 = 1$.

Noter également que pour un produit, on utilise : $\prod\limits_{k=0}^{n}$

Proposition 1.4 *Règle de simplification : $z\, z' = 0 \Rightarrow (z = 0$ ou $z' = 0)$.*
En particulier, si *$z \neq 0$, toute égalité $z.z' = z.z''$ implique l'égalité $z' = z''$.*

Par contre, il n'y a pas de relation $\leqslant$ ou $\geqslant$ dans $\mathbb{C}$. On ne peut encadrer que des modules :

Définition 1.5 *On appelle module de $z = x+iy$ le nombre réel : $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$*

Ce module s'interprète comme une distance (voir plus loin).

Théorème 1.6 *On a pour tous complexes z et z' et tout entier n de $\mathbb{Z}$:*

$$|z\, z'| = |z|\,|z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|},\, z' \neq 0 \qquad |z^n| = |z|^n$$

Théorème 1.7 *Inégalité triangulaire : pour tous z et z' de $\mathbb{C}$, on a :*

$$|\,|z| - |z'|\,| \leqslant |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Preuve :
Montrons d'abord l'inégalité de droite.

On a : $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z}$

On remarque que les deux derniers termes sont conjugués et que leur somme est donc $2\mathcal{R}e(z\overline{z'})$. Or, ce nombre est inférieur ou égal à $2|z\overline{z'}| = 2|z|.|\overline{z'}| = 2|z|.|z'|$. On a alors, $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathcal{R}e(z\overline{z'}) \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|.|z'| = (|z|+|z'|)^2$

En passant aux racines carrées, on obtient l'inégalité $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.

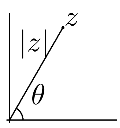
Montrons maintenant l'autre inégalité. On a : $z' = (z+z') - z$ d'où, d'après ce qui précède : $|z'| \leqslant |z+z'| + |-z|$, ce qui s'écrit : $|z'| - |z| \leqslant |z+z'|$. En inversant z et z', on a aussi : $|z| - |z'| \leqslant |z+z'|$. Si d est la différence $|z'| - |z|$, alors d et $-d$ sont $\leqslant |z+z'|$, la valeur absolue $|d|$ qui est le plus grand des deux réels d et $-d$ est donc $\leqslant |z-z'|$, ce qui est le résultat cherché.

N.B. : On a une autre démonstration en utilisant l'interprétation géométrique du module comme distance. La démonstration ci-dessus a surtout pour rôle de montrer comment manipuler les nombres complexes, en évitant de se ramener à x et y.

Définition 1.8 *On dit qu'un nombre complexe non nul z, a pour* argument *le nombre réel θ si on peut écrire* $\quad z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Théorème 1.9 *Caractérisation par module et argument :*
Si z est de module $r > 0$ et d'argument θ, et z' de module $r' > 0$ et d'argument θ', alors l'égalité $z = z'$ est équivalente à l'égalité $r = r'$ des modules et à l'égalité modulo 2π *: $\theta = \theta' + 2k\pi$ des arguments.*

Attention aux hypothèses : on doit avoir $r > 0$ et $r' > 0$, c-à-d $z \neq 0$.

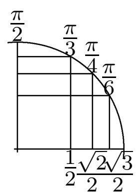


Note : la propriété d'unicité à 2π près de l'argument, fait qu'on parle de *l'argument* de z, quand on écrit : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$. Mais, on prendra garde que toute égalité entre arguments s'écrit avec un "$+2k\pi$".

Théorème 1.10 *Propriétés de l'argument :*
1. Le produit $z.z'$ de deux complexes non nuls, est d'argument égal modulo 2π*, à la somme $\theta + \theta'$ des arguments de z et z'.*
2. De même le rapport z/z' est d'argument égal modulo 2π*, à la différence des arguments.*
3. Enfin, si $n \in \mathbb{Z}$ et z est d'argument θ, le nombre z^n est d'argument $n\,\theta + 2k\pi$.

1.2 Calcul pratique :

Si M est le point d'angle polaire x, son abscisse est $\cos x$, son ordonnée $\sin x$. Le dessin ci-contre, montre les valeurs des cosinus et sinus de quelques angles de base. On peut les retrouver à l'aide du tableau :

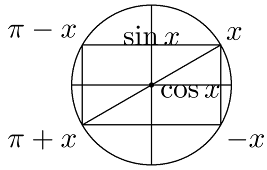


x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Pour une valeur de θ extérieure à $]-\pi, \pi]$ ou à $[0, 2\pi[$ il est nécessaire de faire une réduction modulo 2π. Exemple : $\dfrac{2005\pi}{6}$. Je divise 2005 par 6, et j'obtiens : $2005 = 334.6 + 1$ donc $\dfrac{2005\pi}{6} = 334\pi + \dfrac{\pi}{6}$. Comme 334 est un entier pair, 334π est multiple de 2π, et $\dfrac{2005\pi}{6}$ a même cosinus et même sinus que $\dfrac{\pi}{6}$ d'où $\sin\dfrac{2005\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $\cos\dfrac{2005\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Par contre, pour $\dfrac{2015\pi}{6}$, on a $2015 = 335.6 + 5$, soit $\dfrac{2015\pi}{6} = 335\pi + \dfrac{5\pi}{6}$. L'entier 335 étant impair, les sinus et cosinus de $\dfrac{2015\pi}{6}$, sont les opposés de ceux de $\dfrac{5\pi}{6}$. Enfin $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$ et donc $\sin\dfrac{2015\pi}{6} = \dfrac{-1}{2}$, $\cos\dfrac{2015\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On peut aussi écrire : $2015 = 336.6 - 1$, d'où $\dfrac{2015\pi}{6} = 336\pi - \dfrac{\pi}{6}$ et 336 étant pair, on obtient les sinus et cosinus de $\dfrac{-\pi}{6}$...

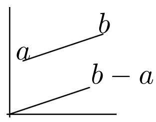
1.3 Interprétation géométrique

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on appelle *affixe* d'un point M de coordonnées (x, y) le nombre complexe $z = x + iy$. On définit ainsi une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}$, c-à-d, tout z de $\mathbb{C}$ est l'affixe d'un et d'un seul point du plan. On définit de même l'affixe d'un vecteur.



Théorème 1.11 *Si a est l'affixe d'un point A, et b l'affixe d'un point B,*
1. l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$
2. le module $|b - a|$ est la distance AB,
3. si $a \neq b$, un argument de $(b - a)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB})$

On peut remarquer que la somme $a + b$ est l'affixe du point C, tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.



L'alignement de 3 points A, B, C, ou la cocyclicité de 4 points, se traduisent facilement en termes de nombres complexes :

Théorème 1.12 *Si A, B, C, D sont des points distincts de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a, b, c et d,*
1. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $arg(\dfrac{c-a}{b-a})$
2. A, B et C sont alignés si et seulement si le rapport $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel.
3. A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si le bi-rapport $\dfrac{c-b}{c-a}\dfrac{d-a}{d-b}$ est réel.

1.4 Références

On peut consulter tout livre de Terminales S ou :

François LIRET, Dominique MARTINAIS, Cours de Mathématiques, Algèbre 1re Année, Cours et exercices avec solutions. DUNOD 2003 <cote B.U. 512 LIR> ou ancienne édition (1997) <cote B.U. 512 (076) LIR> chapitre 3

Philippe PILIBOSSIAN, J-Pierre LECOUTRE, Algèbre, rappel de cours, exercices et problèmes résolus, DUNOD 1998 <cote B.U. 512 (076) PIL> chapitre 3

Dominique PROCHASSON, Algèbre 1re année, exercices corrigés. DUNOD 1999 <cote B.U. 512 (076) PRO> chapitre 2.

Chapitre 2

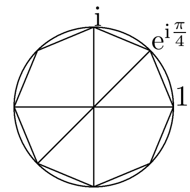
Equations dans $\mathbb{C}$

2.1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Si n est un entier ($n \geqslant 1$) et Z un nombre complexe, on appelle racine $n^{ème}$ de Z tout nombre complexe z vérifiant $z^n = Z$.

Théorème 2.1 *Racines $n^{èmes}$ d'un nombre complexe :*
Tout nombre complexe Z non nul possède exactement n racines $n^{èmes}$ dans $\mathbb{C}$.
Si $Z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $R > 0$, ce sont les $z_k = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, où $r = \sqrt[n]{R}$.

Pour $n \geqslant 3$ ces n racines $n^{ème}$ de Z, sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés, de centre l'origine. Pour $n = 3$, on a un triangle équilatéral, pour $n = 4$ un carré, pour $n = 5$ un pentagone régulier...



On appelle racine $n^{ème}$ de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

Théorème 2.2 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, il y a n racines $n^{èmes}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$.*
Ce sont les nombres $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

On peut remarquer que le produit de deux racines $n^{èmes}$ de l'unité est aussi une racine $n^{ème}$ de l'unité, et que l'inverse d'une racine $n^{ème}$ est une racine $n^{ème}$. On dit que l'ensemble U_n des racines $n^{èmes}$ de l'unité est un groupe multiplicatif.

D'autre part, si on note ζ_k le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$, alors, on a : $\zeta_k = \zeta_1^k$.

Une conséquence est que la somme des n racines $n^{ème}$ de l'unité, se calcule comme somme d'une suite géométrique et est égale à 0 (pour $n \geqslant 2$).

Proposition 2.3 *Si z_0 est une solution de l'équation $z^n = Z$ (où Z est donné), les solutions de cette équation sont les nombres z_k obtenus en multipliant z_0 par les racines $n^{èmes}$ de l'unité.*

Remarque : Les 3 racines cubiques de l'unité sont les nombres 1, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ noté j et $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3} = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$. On a [1] donc : $\mathrm{j}^3 = 1$ et : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

[1]Certains physiciens préfèrent noter j notre nombre i, ceci pour que la lettre i désiqne une intensité de courant électrique. Ils ont donc : $\mathrm{j}^2 = -1$. Attention aux risques de confusion...

2.2 Equations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées. Mais la notation $\sqrt{\ }$ est interdite dans $\mathbb{C}$, car rien ne permet de privilégier l'une des deux racines par rapport à l'autre.

Tout trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ à coefficients $a \neq 0$, b et c dans $\mathbb{C}$, peut se mettre sous forme canonique :

$$P(z) = a\left((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Et la discussion est plus simple que sur $\mathbb{R}$ car il n'y a pas de signe à regarder.

Théorème 2.4 *Résolution du trinôme dans $\mathbb{C}$:*
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discrimant du trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ où $a \neq 0$.
Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine dans $\mathbb{C}$: $z_0 = \frac{-b}{2a}$ et on a : $P(z) = a(z - z_0)^2$.
Si $\Delta \neq 0$, le trinôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est l'une des deux racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$. De plus : $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

On peut retenir selon l'expression consacrée, que *toute* équation du second degré dans $\mathbb{C}$ a deux racines "distinctes ou confondues".

En fait, il s'agit d'un cas particulier d'un résultat plus général :

Théorème 2.5 *Théorème de D'Alembert : Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

2.3 Calcul des racines carrées d'un complexe Z :

La méthode la plus rapide est celle qui utilise module et argument.

Une autre méthode est de chercher la forme algébrique $x + \mathrm{i}y$. Le complexe $z = x + iy$ est racine carrée de $Z = X + \mathrm{i}Y$ si x et y vérifient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2\,x\,y = Y \end{cases} \quad \text{auquel on peut ajouter l'équation } x^2 + y^2 = |z|^2 = |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

On a alors facilement x^2 et y^2, d'où x et y aux "signes près". L'équation $2xy = Y$ permet de savoir si x et y sont de signes égaux ou opposés, et de faire une vérification.

2.4 Références

On peut consulter les livres proposés pour le chapitre 1 (LIRET-MARTINAIS, PILIBOSSIAN-LECOUTRE et PROCHASSON) et :

Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Algèbre 1, VUIBERT 1997 <cote B.U. 512 JER>, chapitre 1 (se limiter aux nombres complexes).

Chapitre 3

Trigonométrie

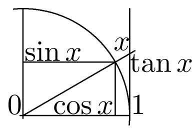
On note e^{it} le nombre complexe $\cos t + i \sin t$.

D'où les formules dites d'Euler : $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ *et* $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Les théorèmes sur l'argument d'un nombre complexe se démontrent à l'aide de formules de trigonométrie. Les propriétés de l'exponentielle complexe s'en déduisent. Mais, ces résultats permettent de retrouver les formules de trigonométrie (et d'en démontrer certaines).

3.1 Le cercle trigonométrique :

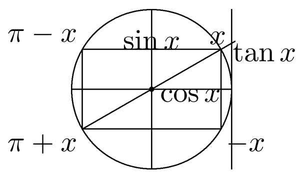
Si M est le point d'angle polaire x, son abscisse est $\cos x$, son ordonnée $\sin x$. Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on définit la tangente : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ qui est l'ordonnée du point T d'intersection de la droite (OM) et de la droite $x = 1$ (tangente au cercle au point A d'affixe 1).



Le rectangle, montre comment sont situés les points du cercle d'angle polaire $-x, (\pi - x)$, et $(\pi + x)$, par rapport au point d'angle polaire x.

On y visualise les formules :

$$\begin{array}{lll}
\cos(-x) = \cos(x) & \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\
\sin(-x) = -\sin(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\
\tan(-x) = -\tan(x) & \tan(\pi - x) = -\tan(x) & \tan(\pi + x) = \tan(x)
\end{array}$$



et la résolution d'équations de base :

$$\begin{array}{ccc}
\cos(x) = \cos(x') & \Longleftrightarrow & x = x' + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -x' + 2k\pi \\
\sin(x) = \sin(x') & \Longleftrightarrow & x = x' + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - x' + 2k\pi \\
\tan(x) = \tan(x') & \Longleftrightarrow & x = x' + k\pi
\end{array}$$

Remarquons aussi qu'on a : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

3.2 Formulaire de trigonométrie

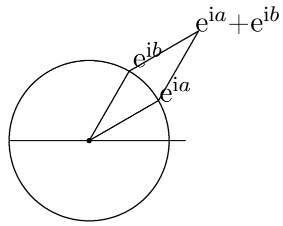
Formules d'addition [1] :
Les formules $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ et $e^{i(a-b)} = e^{ia}e^{-ib}$ correspondent à :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Le cas $a = b$ donne : $\sin(2a) = 2 \sin a \, \cos a$
et : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

d'où on tire les formules de **linéarisation** : $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ $\quad \sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Dans une **somme** du type $e^{ia} + e^{ib}$ ou une différence $e^{ia} - e^{ib}$, on a tout intérêt à mettre en facteur un terme en $e^{i(a+b)/2}$. Par exemple :



$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}} \right) = 2\, e^{i\frac{a+b}{2}} \cos \frac{a-b}{2}$$

Explication : les nombres $0, e^{ia}, e^{ib}$ et $e^{ia} + e^{ib}$ sont les affixes des sommets d'un losange. Ses diagonales sont aussi bissectrices.

Remarque : Cette règle vaut notamment pour $1 + e^{ia}$ et $1 - e^{ia}$.

Les formules sur $e^{ia} + e^{ib}$ et $e^{ia} - e^{ib}$ permettent d'écrire :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cos a - \cos b = -2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

et $$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

Enfin, la propriété $\left(e^{it}\right)^n = e^{int}$ donne la **formule de Moivre** [2] :

$$(\cos t + i \; u \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$$

qui permet soit de **développer** $\cos nt = \mathcal{R}e((c+is)^n)$ ou $\sin nt = \mathcal{I}m((c+is)^n)$ avec $c = \cos t$ et $s = \sin t$ et la formule du binôme de Newton,
soit de **linéariser** $\cos^n t = \dfrac{(z+\overline{z})^n}{2^n}$ et $\sin^n t = \dfrac{(z-\overline{z})^n}{2^n i^n}$ où $z = e^{it}$ et $z\overline{z} = 1$.

Exemples : Je développe $\sin 3x = \mathcal{I}m(e^{i3x})$ Or, $e^{i3x} = (c+is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$
Les nombres $c = \cos x$ et $s = \sin x$ étant réels, la partie imaginaire est $3c^2s - s^3$, qu'on peut écrire (en utilisant l'égalité $c^2 + s^2 = 1$) sous la forme $3s - 4s^3$ ou $s(4c^2-1)$.
D'où : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$.

Je linéarise $\sin^3 x = \dfrac{(z-\overline{z})^3}{(2i)^3} = \dfrac{i}{8}(z^3 - 3z^2\overline{z} + 3z\overline{z}^2 - \overline{z}^3) = \dfrac{i}{8}(z^3 - 3z + 3\overline{z} - \overline{z}^3)$

d'où $\sin^3 x = \dfrac{i}{8}(2i \sin 3x - 6i \sin x) = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

[1] Tout formulaire doit s'apprendre par coeur **et** pouvoir être retrouvé facilement, et ceci même dans plusieurs années. Je vous conseille d'essayer de l'écrire complètement, sans document, et de recommencer plusieurs jours plus tard.

[2] Moivre, 1667-1754

On linéarise également des produits :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad \sin a \sin b = \frac{-1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Ces formules s'obtiennent, soit à partir des formules d'addition $\cos(a+b) = ...$ soit à partir des formules de Newton : $\cos a \cos b = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b})$

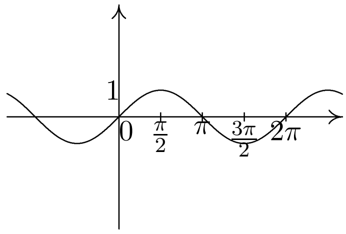
3.3 Fonctions trigonométriques

La fonction *sinus* est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, périodique de période 2π. Son graphe (appelé sinusoïde) admet la droite $y = x$ comme tangente à l'origine.

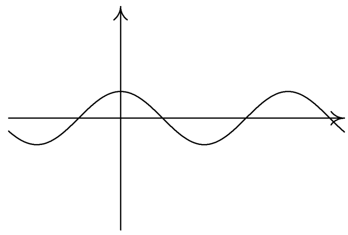
La fonction *cosinus* est définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π. Son graphe est également une sunsoïde car $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec : $\sin' x = \cos x$ et $\cos' x = -\sin x$ (attention aux signes, penser par exemple que sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, le sinus est croissant alors que le cosinus est décroissant...

On peut aussi remarquer que $\sin' x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ et $\cos' x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.



$y = \sin x$



$y = \cos x$

On pose : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. On obtient une fonction définie pour tout x vérifiant $\cos x \neq 0$ c-à-d pour tout x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Son domaine de définition est donc l'union des intervalles $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$ où k est un entier qui décrit $\mathbb{Z}$.

Cette fonction est périodique de période π, et est dérivable, avec

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Son graphe admet la droite $y = x$ comme tangente à l'origine.

En plus des formules : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ il est bon de connaître : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\, \tan b}$ valable si $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ sont bien définis et que si on pose $t = \tan\dfrac{x}{2}$ on a : $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (exercice : vérifier $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Remarque : On note parfois $\operatorname{cotan} x$ le rapport $\operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$.

On a : $\operatorname{cotan} x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$.

3.4 Fonction exponentielle complexe

La notation exponentielle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$ se généralise :

Définition 3.1 *On appelle exponentielle complexe, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z = x + \mathrm{i}y$ associe le complexe de module e^x et d'argument y, c'est à dire le nombre $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$.*

Cette notation se justifie par les propriétés ci-dessous qui généralisent celles de la fonction exponentielle (définie sur $\mathbb{R}$).

Théorème 3.2 *Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ et tout n de $\mathbb{Z}$, on a :*
1. $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$ *2.* $\mathrm{e}^{z-z'} = \mathrm{e}^z / \mathrm{e}^{z'}$ *3.* $\mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^z)^n$ *4.* $\mathrm{e}^z \neq 0$

Notons toutefois quelques différences :

Théorème 3.3 *Périodicité de l'exponentielle :*
1. La fonction exponentielle complexe est périodique de période $2\pi\mathrm{i}$.
2. L'égalité $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ est équivalente à $\exists k \in \mathbb{Z}$, $z = z' + 2\mathrm{i}k\pi$
3. Pour tout complexe non nul Z, il existe une infinité de nombres z tels que $Z = \mathrm{e}^z$

En particulier, la fonction exponentielle n'est pas bijective, et il n'y a pas de définition simple du logarithme d'un nombre complexe.

Enfin, on ne peut pas parler (à notre niveau) de la dérivée de la fonction exponentielle de variable z dans $\mathbb{C}$, mais on a :

Théorème 3.4 *Si φ est une application dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$ est dérivable, de dérivée $\varphi'(t)\mathrm{e}^{\varphi(t)}$.*

Rappelons, pour préciser ce théorème qu'une application φ de I dans $\mathbb{C} : t \to \varphi(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{i}\, \mathrm{y}(t)$ est dite dérivable si chacune des deux applications coordonnées : $t \to \mathrm{x}(t)$ et $t \to \mathrm{y}(t)$ le sont. Dans ce cas, on a : $\varphi'(t) = \mathrm{x'}(t) + \mathrm{i}\, \mathrm{y'}(t)$.

3.5 Références

Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Algèbre 1, VUIBERT 1997 <cote B.U. : 512 JER>, chapitre 1 (se limiter à la trigonométrie).

Pascal DUPONT Exercices de Mathématiques pour le 1er cycle, vol. 1 : Algèbre et Géométrie, De Boeck 2003 <cote B.U. 512/514 (076) DUP>, chap. 1, paragr. 5.

Chapitre 4

Equations différentielles

Les équations différentielles interviennent dans de nombreux domaines scientifiques : en mécanique, en électricité, en radioactivité, pour les réactions chimiques, l'évolution d'une population, la concentration d'un produit (glucose ou médicament) dans le sang, le refroidissement d'un objet, la diffusion à travers une membrane...

On pourra notamment consulter des livres de mathématiques pour biologistes : Vincent BLONDEL, Mathématiques, Analyse, cours et exercices corrigés. DEUG Sciences et Vie de la Terre. DUNOD, 2000 <cote B.U. 517 (076) BLO>).
Jean-Paul et Françoise BERTRANDIAS, Mathématiques pour les Sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé. Presses Universitaires de Grenoble, 1997 <57 :51 BER>.

4.1 Equations à variables séparées

Equation d'inconnue une fonction $y = y(t)$ qui s'écrit $y'f(y) = g(t)$.
Si F est une primitive de f et G une primitive de g, elle équivaut à $F(y) = G(t) + C$ où C est une constante. Reste à écrire si possible cette égalité sous la forme $y = \varphi(t)$ (ce qui peut obliger à réduire l'intervalle de définition).
Exemple : $y'e^y = t^2$ donne $e^y = \frac{1}{3}t^3 + \lambda$ d'où $y = \ln \dfrac{1}{3} t^3 + \lambda$ défini sur $]-\sqrt{-3\lambda}, +\infty[$

4.1.1 Fonction continue

Rappelons ici quelques définitions et propriétés :

Définition 4.1 *Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si elle est définie sur I et vérifie en tout point a de I : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Théorème 4.2 *Toute fonction dérivable est continue.*

La réciproque est fausse (exemples : la valeur absolue, la racine carrée en $a = 0$, sont continues bien que non dérivables).

Théorème 4.3 *Toute somme, produit, quotient, composée de fonctions continues est continue sur tout intervalle où elle est définie.*

Le théorème qui nous intéresse ici est :

Théorème 4.4 *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

4.1.2 Equations autonomes $x' = f(x)$

Il s'agit d'un cas particulier d'équation à variables séparées dans la mesure où elle peut s'écrire $\dfrac{x'}{f(x)} = 1$. On obtient $g(x) = t + C$ où g est une primitive de $1/f$. Mais il ne faut pas oublier les solutions contantes : $x = a$ où a est solution de $f(a) = 0$

Exemple : $x' = x^2$ donne la solution contante $x = 0$ et sinon, s'écrit $\dfrac{x'}{x^2} = 1$. On obtient $\dfrac{-1}{x} = t + C$, c-à-d $x = \dfrac{1}{\lambda - t}$, défini sur $]-\infty, \lambda[$ et sur $]\lambda, +\infty[$.

4.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

4.2.1 Equation différentielle linéaire homogène

On appelle équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre, une équation :

$$(H) : \qquad y' + a(t)y = 0$$

où a est une fonction définie sur un intervalle I.

Résoudre cette équation consiste à déterminer les fonctions dérivables φ, définies sur I, vérifiant en tout point t de I : $\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = 0$.

Si A est une primitive de a sur l'intervalle I, l'équation (H) est équivalente à :

$$(H_1) : \qquad \mathrm{e}^{A(t)}(y' + A'(t)y) = 0 \quad \text{c-à-d. :} \qquad \left(y\,\mathrm{e}^{A(t)}\right)' = 0$$

Une fonction φ est donc solution si et seulement si la fonction $t \rightarrow \varphi(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$ est égale à une constante λ sur l'intervalle I. [1] D'où le théorème :

Théorème 4.5 *Les solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle homogène (H) : $y' + a(t)y = 0$, sont, si A est une primitive de a, les fonctions φ définies par : $\varphi(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où λ est une constante arbitraire.*

N.B. : Ce théorème est valable avec des fonctions à valeurs complexes. Dans ce cas, on prend λ dans $\mathbb{C}$. Par contre, si la fonction a est à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si on ne cherche que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on prendra λ dans $\mathbb{R}$.

Un cas particulier important est celui où la fonction a est constante :

Théorème 4.6 *Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ s'écrivent $\varphi(t) = \lambda e^{at}$.*

---

[1] Certains résolvent l'équation en écrivant $\frac{y'}{y} = -a(t)$ d'où $\ln(|y|) = -A(t) + C$ où C est une constante d'où $y = \lambda\mathrm{e}^{-A(t)}$ où $\lambda = \pm\mathrm{e}^{C}$. Cette technique est très critiquable, donc est à éviter. Mais elle a le mérite de donner le bon résultat. Elle peut donc être utilisée au brouillon.

4.2.2 Equation avec second membre

Une équation différentielle linéaire avec second membre :

$$(L): \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I, s'écrit de même :

$$(L_1): \qquad \left(y\,\mathrm{e}^{A(t)}\right)' = b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$$

Ces solutions sont donc de la forme : $\varphi(t) = (\mathrm{F}(t) + \lambda)\mathrm{e}^{-A(t)}$ où F est une primitive sur I de la fonction $t \rightarrow b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$. On ne retient pas ce résultat, mais les théorèmes suivants :

Théorème 4.7 *Les solutions sur I de l'équation différentielle (L) : $y' + a(t)y = b(t)$, où a et b sont des fonctions continues sur l'intervalle I, sont les fonctions $t \rightarrow \lambda\varphi(t) + \psi(t)$ où ψ est solution particulière de (L) et φ est solution particulière non nulle de l'équation homogène associée (H) : $y' + a(t)y = 0$.*

Théorème 4.8 *Conditions initiales* réponse positive au "problème de Cauchy"
Soit t_0 dans I, et (L) : $y' + a(t)y = b(t)$, une équation différentielle linéaire du 1er ordre, dont les coefficients sont des fonctions continues sur I, alors pour tout nombre y_0, il existe une et une seule solution φ de (L) sur I vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$.

Méthode dite de *variation des constantes* : lorsque la multiplication de (L) par $\mathrm{e}^{A(t)}$ s'avère difficile, on peut poser un changement de fonction inconnue, en posant : $y = z\,\varphi_0(t)$ où φ_0 est une solution particulière de l'équation homogène (H). Les solutions de cette équation homogène étant les fonctions $\lambda\,\varphi_0(t)$ où λ est constante, ceci revient à prendre comme nouvelle fonction inconnue cette "constante" que l'on fait donc "varier"... On obtient alors rapidement la valeur de la dérivée $z'(t)$ et donc $z(t)$ par calcul de primitive.

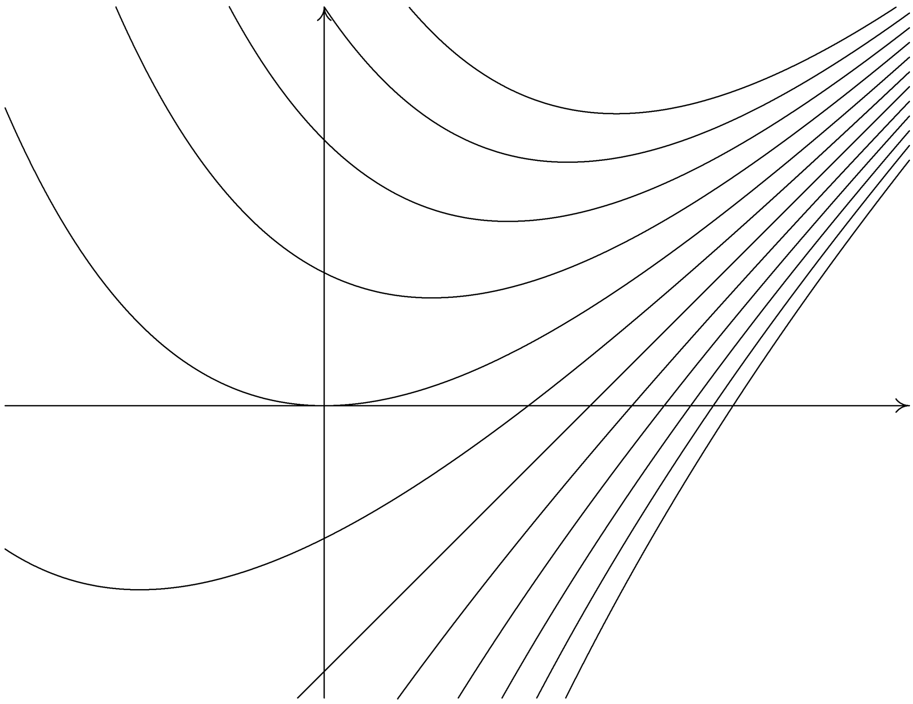
4.3 Références

D. GUININ, B. JOPPIN, Mathématiques Analyse MPSI (ou PCSI) Bréal 2003 <cote B.U. 517 GUI>, chapitre 2 (attention : édition 2003 et non 1999)

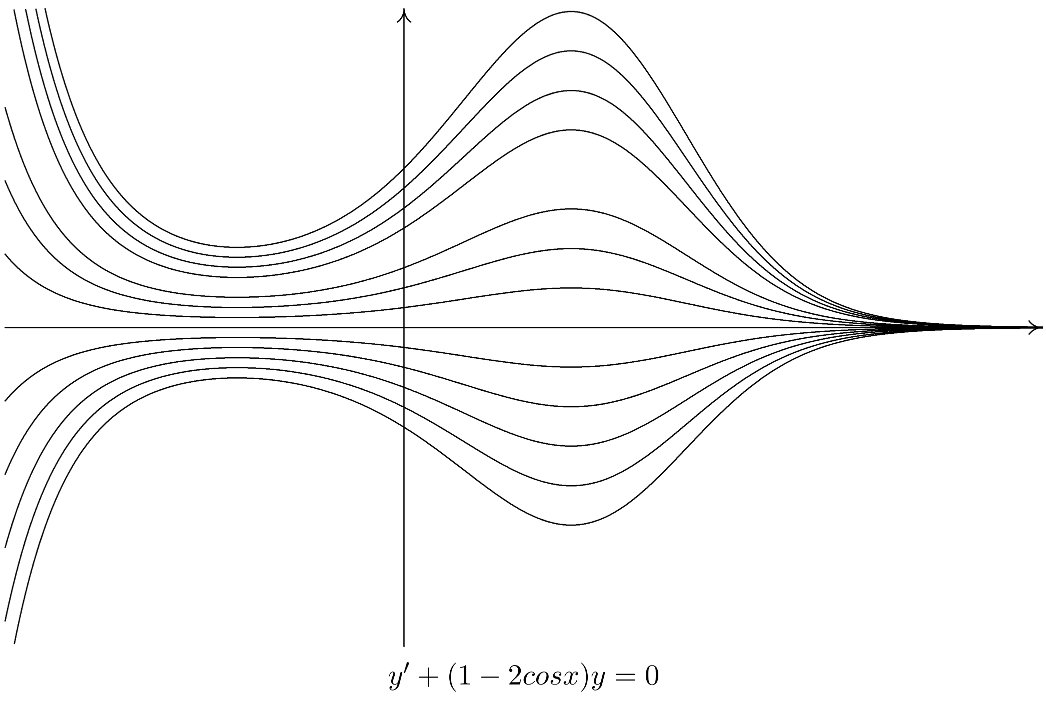
Vincent BLONDEL, Mathématiques, Analyse, cours et exercices corrigés. DEUG Sciences et Vie de la Terre. DUNOD, 2000 <cote B.U. 517 (076) BLO>, chapitre 7.

DEUG en ligne : http ://www.uel-pcsm.education.fr/consultation/reference rubrique Mathématiques puis Equations différentielles. On y trouve notamment de bonnes illustrations du problème de Cauchy.

Exemples de "courbes intégrales" c-à-d de graphes de solutions :



$y' + y = x$



$y' + (1 - 2cosx)y = 0$

Bien remarquer que par chaque point du plan passe une et une seule courbe intégrale...

4.4 Equations différentielles homogènes du second ordre.

En mécanique, on a des équations différentielles d'ordre 2, car l'accélération s'exprime comme une dérivée seconde. Nous ne considérerons que les équations linéaires homogènes à coefficients constants. On remarque que si $r \in \mathbb{C}$, l'application $t \to \mathrm{e}^{rt}$ est solution si et seulement si r est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.

Définition 4.9 *On appelle polynôme caractéristique de l'équation différentielle homogène (H) : $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$.*

Théorème 4.10 *Solutions à valeurs complexes*
1. Si le polynôme caractéristique a deux racines distinctes r et s, les solutions de (H) sont les fonctions $t \to \lambda e^{rt} + \mu e^{st}$ avec λ et μ dans $\mathbb{C}$.
2. Si le polynôme caractéristique a une racine double r, les solutions sont les fonctions : $t \to (\lambda + \mu t)e^{rt}$

Démonstration : Soit r une racine du polynôme caractéristique. Posons $y = z\mathrm{e}^{rt}$, c-à-d. $z = y\mathrm{e}^{-rt}$. La fonction y est dérivable si et seulement z l'est. On a : $y' = (z' + rz)\mathrm{e}^{rt}$ et $y'' = (z'' + 2rz + r^2z)\mathrm{e}^{rt}$. Donc l'équation (H) s'écrit : $az'' + (2ar+b)z' + (ar^2+br+c)z = 0$. Le dernier terme est nul car r est racine du polynôme caractéristique. Si r est racine double, le terme (2 a r + b) est également nul, donc l'équation se réduit à $z'' = 0$ soit $z = \lambda + \mu t$. Sinon, on obtient une équation du 1er ordre en la fonction z'. On a alors : $z' = \alpha\mathrm{e}^{(-2r-(b/a))t}$. Or, la somme $r + s$ des deux racines est égale à $(-b/a)$, donc $-2r - (b/a) = s - r$. On obtient en posant $\mu = \alpha/(s - r)$ et en intégrant : $z = \mu\mathrm{e}^{(s-r)t} + \lambda$ c-à-d. $y = z\mathrm{e}^{rt} = \mu\mathrm{e}^{st} + \lambda e^{rt}$.

Théorème 4.11 *Conditions initiales (second ordre) :* réponse au "problème de Cauchy" *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et t_0 un élément de I. Pour tous y_0 et y'_0 de $\mathbb{C}$, il existe sur I une et une seule solution φ de l'équation différentielle (H) : $ay'' + by' + cy = 0$ où $a \neq 0$, vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = y'_0$*

Théorème 4.12 *Solutions à valeurs réelles*
Soit (H) une équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ avec a, b et c réels, et $a \neq 0$:
1. Si le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes r et s, les solutions réelles de (H) sont les fonctions $t \to \lambda e^{rt} + \mu e^{st}$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
2. Si le polynôme caractéristique a une racine double r, les solutions sont les fonctions : $t \to (\lambda + \mu t)e^{rt}$
3. Si le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha+i\omega$ et $\alpha-i\omega$, les solutions réelles de (H) sont les fonctions : $t \to \mathrm{e}^{\alpha t}(\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t)$

Démonstration : Pour les cas 1 et 2, les solutions complexes sont de cette forme avec λ et μ dans $\mathbb{C}$. Il suffit de montrer que pour les solutions réelles, ces constantes sont réelles. cela se voit à partir de conditions initiales (on calcule λ et μ à partir de $\varphi(t_0)$ et $\varphi'(t_0)$ en un point t_0 de I). Pour le cas 3., on remarque que les solutions complexes peuvent aussi s'écrire sous une forme analogue, et on montre de même que les coefficients qui apparaissent sont réels.

En particulier, les solutions de $y''+\omega^2 y = 0$ sont les fonctions : $t \to \lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t$

En physique on écrit souvent ces solutions sous une autre forme, liée à la propriété :

Théorème 4.13 *Si r est le module et φ un argument de $\lambda + i\mu$, alors on a :*
$\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t = r \cos(\omega t - \varphi)$

Il suffit de remarquer que $\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t$ est la partie réelle de $\mathrm{e}^{i\omega t}(\lambda - i\mu)$.

Remarque : Les théorèmes ci-dessus se généralisent aux équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants : $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$.

4.5 Equations avec second membre : $ay'' + by' + cy = f(t)$

Comme pour les équations différentielles du premier ordre, il suffit de trouver une solution particulière ψ. En effet, on a :

Théorème 4.14 *Si ψ est solution de l'équation différentielle (L) : $ay'' + by' + cy = f(t)$ alors les solutions de cette équation (L) sont les fonctions obtenues en ajoutant à ψ les solutions de l'équation homogène (H) : $ay'' + by' + cy = 0$.*
Les solutions de (L) sont donc de la forme : $\varphi = \psi + \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$

La recherche d'une solution particulière se fait souvent par "identification" : si $f(t)$ est une constante α on cherchera une fonction constante λ, si c'est un polynôme de degré n on cherchera une fonction polynôme : $\psi(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + ... + \lambda_n t^n$, si $f(t) = \alpha e^{\omega t}$ on cherchera $\psi(t) = \lambda \mathrm{e}^{\omega t}$ sauf si ω est racine du polynôme caractéristique (et dans ce cas, on prend $\psi(t) = \lambda t e^{\omega t}$ s'il s'agit d'une racine simple, et $\psi(t) = \lambda t^2 \mathrm{e}^{\omega t}$ si ω est racine double...)

Enfin si $f(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ on cherche une fonction ψ du même type : $\psi(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ (sauf si $i\omega$ est racine du polynôme caractéristique auquel cas on multiplie cette expression par t).

Dans les autres cas, il y a une méthode de "variation des constantes", mais c'est plus compliqué que pour les équations différentielles d'ordre 1, et nous ne l'étudierons pas.

Losque f est une somme ou une "combinaison linéaire" $f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ où α et β sont des constantes, on a :

Théorème 4.15 (Principe de superposition) *Si ψ_1 est solution de l'équation différentielle (L_1) : $ay'' + by' + cy = f_1(t)$ et ψ_2 de (L_2) : $ay'' + by' + cy = f_2(t)$, alors $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ est solution de (L) : $ay'' + by' + cy = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$*

Noter que ces deux théorèmes sont liés au fait que les équations différentielles considérées sont linéaires, et restent valables quand les coefficients a, b et c sont des fonctions, c-à-d pour les équations du type : (L) : $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)$

Chapitre 5

Compléments sur les fonctions

5.1 Notion d'application

Définition 5.1 *Une* application *f d'un ensemble E vers un ensemble F associe à tout élément x de E, un unique élément y de F. Cet élément y est alors noté $f(x)$ et est appelé image de x par f.*
On appelle graphe *de l'application f, l'ensemble des couples $(x, f(x))$ de $E \times F$ où x parcourt E.*

Une application peut être définie :
.à l'aide d'une formule composée de fonctions classiques,
.par morceaux : l'ensemble de définition est union de plusieurs intervalles, et on utilise une formule particulière sur chaque intervalle.
Exemple : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x > 0$, $f(0) = 1$ et $f(x) = 1 + x^2$ si $x < 0$.
.par disjonction de cas : exemple $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ fraction irréductible, et $f(x) = 0$ si x est irrationnel.
.par intégration : exemple $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt$
ou comme intégrale dépendant d'un paramètre : ex $f(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{x^2+t} dt$
.comme limite : exemple $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.
.de manière implicite : exemple $f(x) = y$ unique solution de l'équation (d'inconnue y) : $y^5 + 4x^2y^3 + x^6 = 0$.
.et de bien d'autres manières encore...

Si $f : E \to F$ est une application, l'ensemble E s'appelle la source (ou ensemble de départ) de f et l'ensemble F est le but (ou ensemble d'arrivée).

Dès qu'on change de source ou de but, on change d'application.

Définition 5.2 *On appelle restriction d'une application $f : E \to F$ à une partie A de E, l'application notée $f_{|A}$ de A dans F, qui à tout élément de A associe l'élément $f_{|A}(x) = f(x)$ de F.*

N.B. : Dans certains cas, on change aussi le but F de l'application.

Définition 5.3 *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications, on appelle composée de f et g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G qui à tout x de E, associe l'élément $g(f(x))$ de G.*

Attention à ne pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$...

Théorème 5.4 *Associativité de la loi $\circ$.*
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ sont des applications, alors on a : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

5.2 injection, surjection, bijection

Le problème de la recherche de $y = f(x)$ est (théoriquement) résolu si f est une application. Par contre, se pose le problème de la recherche de x vérifiant $f(x) = y$ où y est donné dans F. Quand il existe, un tel x est appelé *antécédent* de y. On distingue habituellement deux problèmes : celui de l'existence d'au moins un antécédent, et celui de l'unicité (cas où chaque y de F a 0 ou 1 antécédent).

Définition 5.5 *Si $f : E \to F$ est une application,*
On appelle image de f *et on note* $\operatorname{Im} f$ *l'ensemble des y de F qui admettent au moins un antécédent x par f.*
On dit que f est surjective *si on a : $\operatorname{Im} f = F$, c'est à dire si pour tout y de F il existe au moins un x de E vérifiant : $y = f(x)$.*
On dit que f est injective *si toute égalité $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.*
On dit que f est bijective *si elle est injective* et *surjective, c'est à dire si tout élément y de F admet un et un seul antécédent x par f. Dans ce cas, on appelle* application réciproque *de f et on note f^{-1} l'application de F dans E définie par : pour t dans F, $f^{-1}(t)$ est l'unique x de E tel que $f(x) = t$.*

Remarquons que si $x = x'$ alors l'égalité $f(x) = f(x')$ est évidente (c'est l'unicité de l'image de x par l'application f). Dire que f est injective, c'est affirmer que la réciproque est vraie. Rappelons qu'il s'agit d'une implication : "si par hasard $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$".
En passant à la contraposée, l'injectivité peut s'écrire : si $x \neq x'$ alors $f(x) \neq f(x')$.

Remarquons enfin qu'une application injective f de E dans F induit une bijection $\overline{f}$ de E sur l'ensemble $\operatorname{Im} f$.

Définition 5.6 *Si A est une partie de E, on appelle image de A par f, et on note $f(A)$ l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in A$. Autrement dit, un élément y de F appartient à $f(A)$ si et seulement s'il existe au moins un x de A tel que $y = f(x)$.*

Remarquons qu'on a : $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Définition 5.7 *Si B est une partie de F, on appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des x de E vérifiant : $f(x) \in B$.*

5.3 Fonctions

Définition 5.8 *On appelle fonction numérique, toute application d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble D est appelé domaine de définition de la fonction.*

Dans de nombreux cas (fonction définie par une formule), le domaine de définition n'est pas précisé. Toute étude de la fonction f doit commencer par la recherche de ce domaine D.

5.3.1 Fonction réciproque

Une fonction est *bijective* d'un intervalle I sur un intervalle J, si
d'une part, elle est définie sur I, avec pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$
d'autre part, tout y de J est image par f d'un et un seul x de I.

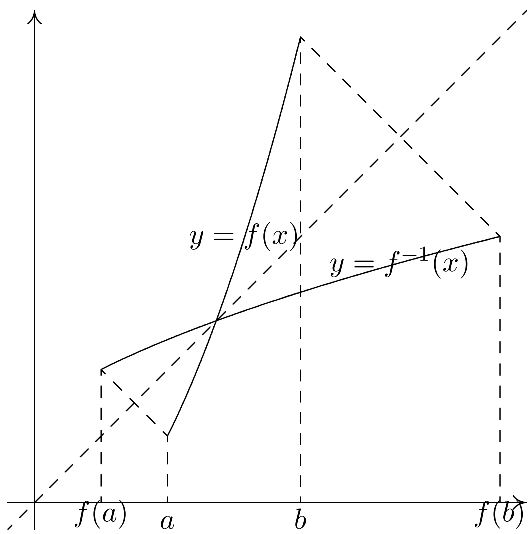
On peut alors parler de la fonction réciproque g, définie sur J, à valeurs dans I et définie par : si $x \in J$, $y = g(x)$ est l'unique $y \in I$ vérifiant $f(y) = x$.

Nous aurons besoin des deux théorèmes suivants :

Théorème 5.9 *Théorème de bijection :*
Si f est continue, strictement monotone sur un intervalle I, alors $f(I)$ est l'intervalle donné dans le tableau ci-dessous, et f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $f(I)$. De plus la fonction réciproque $g = \tilde{f}^{-1}$ est continue, et strictement monotone de même sens que f.

I	$[a, b]$	$]a, b[$	$[a, b[$	$]a, b]$
Si f continue strict. $\nearrow$ $f(I) =$	$[f(a), f(b)]$	$]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f[$	$[f(a), \lim\limits_{b^-} f[$	$]\lim\limits_{a^+} f, f(b)]$
Si f continue strict. $\searrow$ $f(I) =$	$[f(b), f(a)]$	$]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f[$	$]\lim\limits_{b^-} f, f(a)]$	$[f(b), \lim\limits_{a^+} f[$

Dans un repère orthonormé, le graphe de la fonction réciproque g est le symétrique du graphe de la fonction f par rapport à la droite $y = x$ (appelée première bissectrice).



Exemple : la fonction "carré" $x \to x^2$ n'est pas bijective si on la prend sur
$]-\infty, +\infty[$. On commence par la restreindre à $[0, +\infty[$, intervalle sur lequel elle est continue et strictement croissante. On a alors une bijection $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$. Et donc une fonction réciproque, la fonction "racine carrée".
Attention : écrire $y = f(x)$ exige d'avoir $x \geqslant 0$ puisqu'on a restreint f à $[0, +\infty[$.

Donc, l'égalité : $y = \sqrt{x}$ équivaut aux deux conditions :

$$y^2 = x \quad \text{et} \quad y \geqslant 0.$$

On peut y rajouter la condition $x \geqslant 0$, mais celle-ci est implicite, à la fois dans l'écriture $y = \sqrt{x}$ et dans $y^2 = x$.

Théorème 5.10 Dérivée d'une fonction réciproque *: Si f est continue, strictement monotone sur l'intervalle I, est dérivable au point $a \in I$, l'application réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas, on a :* $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(g(b))}$.

Exemple : f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$ est dérivable avec $f'(x) = 2x$.
Sa dérivée est nulle pour $x = 0$. Donc la fonction racine carrée, n'est pas dérivable en $f(0)$ c-à-d en 0. Par contre, sur $]0, +\infty[$ cette fonction est dérivable avec $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{2g(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

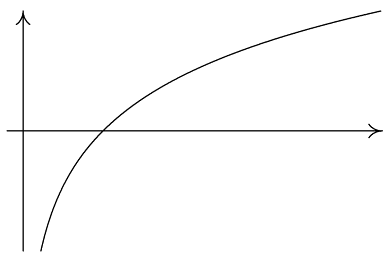
De même, f définie par $f(x) = \ln x$ est dérivable avec $f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$. Sa fonction réciproque (exponentielle) est donc dérivable de dérivée : $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}} = g(x)$

5.3.2 Fonctions logarithme et exponentielle

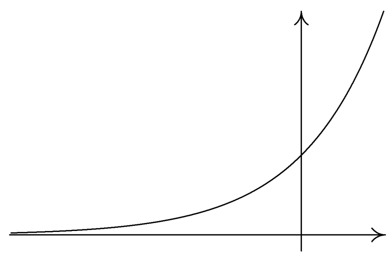
La fonction exponentielle peut être définie comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. En effet, la fonction ln est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ de limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$ donc induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. La fonction réciproque (notée exp) est continue, stictement monotone, de limites en $-\infty$ et $+\infty$ données par les bornes de son intervalle image : d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$. On a pour $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(\dfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ et pour $r \in \mathbb{R}$: $\ln(a^r) = r \ln(a)$.

Inversement on a pour x et y réels : $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^y$ $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ et $\mathrm{e}^{x\,y} = (\mathrm{e}^x)^y$

Ce sont les propriétés des puissances $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ défini pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ (et même $x \in \mathbb{C}$). On a pour a et b positifs, et x et y réels (ou complexes) :
$a^{x+y} = a^x \, a^y$ $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $a^{x\,y} = (a^x)^y$ $(a\,b)^x = a^x \, b^x$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.



Fonction logarithme $y = \ln x$



Fonction exponentielle $y = \mathrm{e}^x$

Référence : D. GUININ, B. JOPPIN, Mathématiques Analyse MPSI (ou PCSI) Bréal 2003 <cote B.U. 517 GUI>, chapitre 1 A.

Pascal DUPONT Exercices de Mathématiques pour le 1er cycle, vol. 1 : Algèbre et Géométrie, De Boeck 2003 <cote B.U. 512/514 (076) DUP>, chap. 1, paragr. 3.

Chapitre 6

Fonctions circulaires réciproques

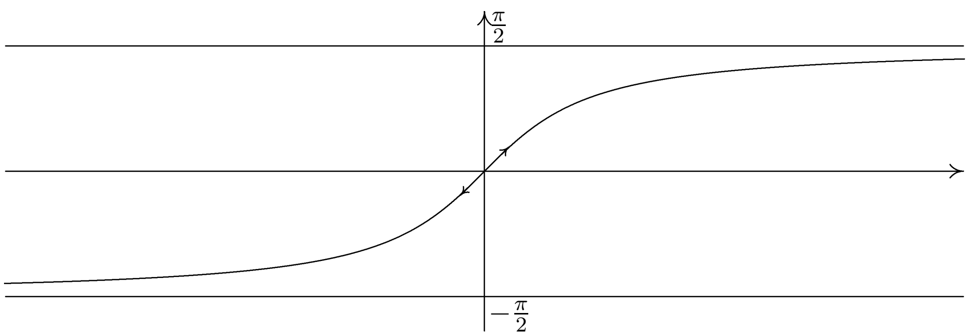
6.1 La fonction Arctangente

La fonction tan étant périodique n'est pas injective, mais sa restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante, de limites $-\infty$ en $(-\pi/2)^+$ et $+\infty$ en $(+\pi/2)^-$.

On appelle fonction Arctangente l'application réciproque (certains l'écrivent avec un espace Arc tangente, mais il faut prendre garde qu'il s'agit d'un seul mot).

$$\boxed{\text{A retenir :} \qquad y = \arctan x \quad \text{signifie} \begin{cases} x = \tan y \\ \text{et} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$. Elle est impaire , de graphe ci-dessous.



Fonction Arctangente $y = \arctan x$

Proposition 6.1 *On a* $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ *si* $x > 0$ *et* $= \dfrac{-\pi}{2}$ *si* $x < 0$.

Démonstration par la méthode analytique : Posons $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ de dérivée : $f'(x) =$

$\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{\frac{-1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2} = 0$. Cette fonction est donc constante sur chacun des deux intervalles de son domaine de définition. La constante sur $]0,+\infty[$ se calcule par une valeur particulière ($x=1$) ou par une limite (en 0^+ ou en $+\infty$).
Celle sur $]-\infty,0[$ s'obtient de même ou encore en remarquant que f est impaire.

Démonstration par la méthode trigonométrique. Posons $\alpha = \arctan 1/x$.
On a : $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ et $\tan\alpha = 1/x$. D'où $x = 1/\tan\alpha = \tan(\pi/2-\alpha)$.
Si $x>0$, on a : $0<\alpha<\pi/2$ d'où $0<\pi/2-\alpha<\pi/2$. Les deux conditions étant remplies, on a : $\pi/2-\alpha = \arctan x$.
Par contre, si $x<0$, $\pi/2-\alpha$ n'est pas dans l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$. On lui enlève π pour le ramener dans cet intervalle sans changer la valeur de la tangente. On a alors : $x = \tan(-\pi/2-\alpha)$ avec $-\pi/2 < -\pi/2-\alpha < 0$, d'où $\arctan x = -\pi/2-\alpha$.

6.2 Fonctions Arcsinus et Arccosinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2,\pi/2]$. Elle induit donc une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ sur $[-1,1]$, dont l'application réciproque est notée arcsin.

A retenir : Si $x\in[-1,1]$, on a : $y=\arcsin x$ si et seulement si $\begin{cases} x=\sin y \\ \text{et} \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Remarquons que si $y=\arcsin x$, on a $\cos y\geqslant 0$ donc $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

Théorème 6.2 *La fonction arcsinus est continue sur* $[-1,1]$*, dérivable sur* $]-1,1[$*, avec si* $|x|<1$*,* $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

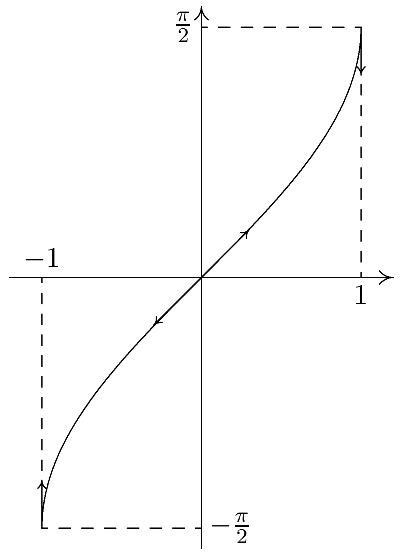
De même, la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Elle induit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque est notée arccos.

A retenir : Si $x\in[-1,1]$, on a : $y=\arccos x$ si et seulement si $\begin{cases} x=\cos y \\ \text{et} \\ 0\leqslant y\leqslant\pi\end{cases}$

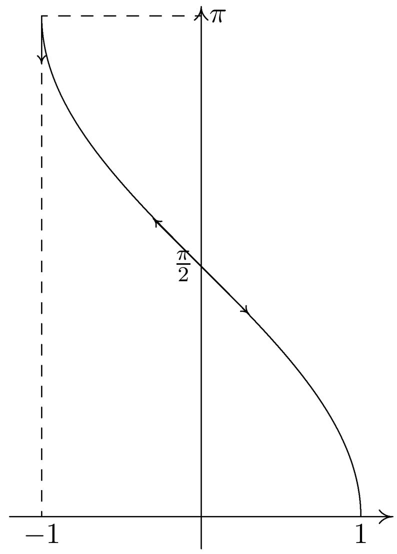
Théorème 6.3 *La fonction arccosinus est continue sur* $[-1,1]$*, dérivable sur* $]-1,1[$*, avec si* $|x|<1$*,* $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Proposition 6.4 *On a pour tout* x *de* $[-1,1]$ *:* $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

N.B. : Nous avons donc 4 fonctions usuelles qui sont continues mais non dérivables : la valeur absolue (en 0), la racine carrée (en 0), les fonctions arcsin et arccos (en -1 et en 1). On prendra garde dans les calculs à ces points de non-dérivabilité, ainsi qu'au fait que la racine carrée d'un carré est une valeur absolue : $\sqrt{u^2}=|u|$



Fonction Arcsinus : $y = \arcsin x$



Fonction Arccosinus : $y = \arccos x$

6.3 Références

Pascal DUPONT Exercices de Mathématiques pour le 1er cycle, vol. 1 : Algèbre et Géométrie, De Boeck 2003 <cote B.U. 512/514 (076) DUP>, chap. 1, par. 5-4.

Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Analyse 1, VUIBERT 1997 <cote B.U. 517.5 JER>, chapitre 5.

D. GUININ, B. JOPPIN, Mathématiques Analyse MPSI (ou PCSI) Bréal 2003 <cote B.U. 517 GUI>, chapitre 1 E

Chapitre 7

Polynômes

7.1 Fonctions polynômes

Définition 7.1 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle fonction polynôme toute application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ qui s'écrit sous la forme : $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_p x^p$ où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés coefficients du polynôme et p est un entier. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes.*

Pour $k > p$ on pose $a_k = 0$, ce qui permet de parler de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des coefficients.

Ci-dessus x (minuscule) désigne la variable de la fonction. Pour nommer les fonctions polynômes on utilise la lettre majuscule X comme ceci :

on note X la fonction polynôme $x \mapsto x$ et plus généralement X^p l'application $x \mapsto x^p$. Si bien qu'on a : $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_p X^p$.

Proposition 7.2 *Si $P(x) = 0$ pour tout x de $\mathbb{K}$ alors tous les coefficients a_k sont nuls. En conséquence, les coefficients d'une fonction polynôme donnée sont uniques.*

Définition 7.3 *On appelle degré d'un polynôme P non nul le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$. On le note deg(P). Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.*

Théorème 7.4
La somme de deux polynômes est un polynôme avec deg$(P + Q) \leqslant$ Max(deg(P), deg(Q)).
Le produit PQ de deux polynômes est un polynôme avec deg(PQ) = deg(P) + deg(Q).
La composée $P(Q)$ de deux polynômes non nuls est un polynôme de degré deg(P) deg(Q).

N.B. : Si $P = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ et $Q = b_0 + b_1 X + ... + a_q X^q$ on a $P\,Q = c_0 + c_1 X + ... + c_{p+q} X^{p+q}$ de coefficients c_m égaux à la somme des produits $a_k\, b_{m-k}$ pour k allant de $\mathrm{Max}(0, m - q)$ à $\mathrm{Min}(p, m)$.

Si on pose $Q = X$ on a $P(Q) = P$. On préfère souvent noter $P(X)$ le polynôme P.

Proposition 7.5 *Règle de simplification :*

Si un produit $P(X)\,Q(X)$ est le polynôme nul, alors l'un des deux polynômes $P(X)$ ou $Q(X)$ est le polynôme nul.

Si $A(X)$, $B(X)$ et $P(X)$ sont des polynômes avec $P(X)$ non nul, toute égalité : $P(X)\,A(X) = P(X)\,B(X)$ implique l'égalité $A(X) = B(X)$.

Bien noter que ceci est spécifique aux fonctions polynômes : ce n'est pas vrai avec des fonctions ordinaires : si on considère f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| - x$ et $g(x) = |x| + x$ le produit fg est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ mais ni f ni g n'est la fonction nulle.

7.2 Divisions de polynômes

Théorème 7.6 *Si A et B sont des polynômes avec B non nul, il existe un et un seul couple (Q,R) de polynômes tels que $A = B\,Q + R$ avec deg(R) $<$ deg(B). Q est appelé quotient, et R reste de la division euclidienne de A par B.*

Il suffit de poser la division de A par B en les écrivant selon les puissances décroissantes : $A = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_1X + a_0$ et $B = b_qX^q + b_{q-1}X^{q-1} + ... + b_1X + b_0$.

Si R est le polynôme nul, on dit que B divise A (ou que A est multiple de B). Un cas important est celui de la division par un polynôme $X - a$ de degré 1 :

Proposition 7.7 *Le reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $X - a$ est le polynôme constant $P(a)$.*
En conséquence, $X - a$ divise le polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$.

Par contre, si on pose la division de $A(X)$ par $B(X)$ en écrivant les deux polynômes par puissances croissantes : $A(X) = a_0 + a_1X + ... + a_pX^p$ et $B(X) = b_0 + b_1X + ... + b_qX^q$, ce qui est possible si $b_0 \neq 0$, on obtient une suite (infinie) de restes où on peut mettre des puissances de X de plus en plus grandes en facteur.

Théorème 7.8 *Si A et B sont deux polynômes avec $B(0) \neq 0$, et n est un entier, il existe un et un seul couple (Q,R) de polynômes tels que : $A = B\,Q + X^{n+1}R$ et deg(Q) $\leqslant n$.*
Q et R sont appelés quotient et reste de la division à l'ordre n de A par B selon les puissances croissantes.

7.3 Racines d'un polynôme

Proposition 7.9 *Formule de Taylor pour un polynôme*
Si P est un polynôme de degré $\leqslant n$, et a un élément de $\mathbb{K}$, on a

$$P(X) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

En effet, $R(X) = P(X) - (P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, dont toutes les dérivées d'ordre $k \leqslant n$ au point a sont nulles. C'est le polynôme nul, car sinon, il aurait un terme de plus haut degré c_dX^d avec $d \leqslant n$ et $c_d \neq 0$, et sa dérivée d'ordre d, qui est la constante $d!\,c_d$ serait non nulle.

Définition 7.10 *Un nombre a de $\mathbb{K}$ est dit racine du polynôme P si $P(a) = 0$.*
On appelle ordre de multiplicité d'une racine a d'un polynôme non nul P, le plus grand entier r tel que $(X - a)^r$ divise $P(X)$.

Théorème 7.11 *Le nombre a est racine d'ordre r de P si et seulement si on a :*
$P(a) = P'(a) = P^{(r-1)}(a) = 0$ *et* $P^{(r)}(a) \neq 0$.

Ainsi, on a une racine simple si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$.
On a une racine multiple si $P(a) = P'(a) = 0$.

Théorème 7.12 *Si* $a_1, a_2, ..., a_s$ *sont des racines* distinctes *d'un polynôme non nul* P, *de multiplicités* $r_1, r_2, ..., r_s$, *alors le polynôme* $(X - a_1)^{r_1} (X - a_2)^{r_2}...(X - a_s)^{r_s}$ *divise* $P(X)$. *En particulier, on a :* $r_1 + r_2 + ... + r_s \leqslant deg(P)$.

On traduit la dernière propriété en disant que le nombre de racines (comptées avec leurs multipicités) du polynôme P est inférieur ou égal au degré de ce polynôme.

Théorème 7.13 *Tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.*

Ce dernier théorème est important. Il permet de prolonger des égalités, et d'identifier les coefficients : si P et Q sont des polynômes tels qu'il existe un ensemble infini E, par exemple un intervalle de longueur non nulle, tel qu'on ait pour tout x de E, $P(x) = Q(x)$, alors les polynômes P et Q sont égaux. L'égalité $P(x) = Q(x)$, déjà valable pour les x de E, est en fait vérifiée par tout x de $\mathbb{C}$, et les coefficients de ces polynômes sont égaux deux à deux.

7.4 Factorisation d'un polynôme

Ce paragraphe repose sur un théorème que nous admettrons, appelé aussi à cause de son importance : "théorème fondamental de l'algèbre".[1]

Théorème 7.14 *Théorème de D'Alembert.*
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ *admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

Par récurrence sur le degré du polynôme, on en déduit :

Théorème 7.15 *Factorisation dans* $\mathbb{C}[X]$.
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ *s'écrit :* $P(X) = \lambda\,(X - a_1)^{r_1} (X - a_2)^{r_2}...(X - a_s)^{r_s}$.
Les a_k *sont les racines de* P, r_k *leurs ordres de multiplicité, et* λ *est une constante non nulle (c'est le coefficient du terme de plus haut degré de* P*).*
En particulier, le nombre total de racines (comptées avec multiplicités) du polynôme P *est égal au degré de ce polynôme.*

Pour factoriser un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on commence par considérer ce polynôme comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$ pour appliquer le théorème ci-dessus.

Proposition 7.16 *Si* P, *polynôme à coefficients réels, admet une racine complexe* a *d'ordre de multiplicité* r, *alors le complexe conjugué* $\overline{a}$ *est racine de* P *avec même multiplicité.*

On peut alors regrouper deux à deux les racines complexes non réelles de P.

[1]Jean le Rond d'Alembert, (1717-1783) en donne une 1re démonstration en 1743, Gauss dans sa thèse en 1799 (il a 22 ans) en montre les lacunes, et donne la 1re démonstration complète.

Théorème 7.17 *Tout polynôme P non constant à coefficients réels s'écrit comme produit d'une constante réelle λ, de facteurs $(X-a_k)^{r_k}$ correspondant aux racines de P dans $\mathbb{R}$, et de facteurs $(X^2+b_kX+c_k)^{r_k}$ où b_k et c_k sont réels et le discriminant $b_k^2-4c_k$ est négatif.*

Définition 7.18 *Un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible, s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degré strictement plus petits.*
D'après le théorème de D'Alembert :
les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ou de degré 2 avec discriminant strictement négatif.

On peut résumer les théorèmes en disant que tout polynôme se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ comme produit de polynômes irréductibles.
Exemple : $X^4+1=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

Remarquons enfin que la factorisation d'un polynôme en facteurs irréductibles étant donnée par ses racines dans $\mathbb{C}$ est unique (à l'ordre près des facteurs).

De plus, pour qu'un polynôme P divise un polynôme Q, il faut que toute racine de P d'ordre r soit racine de Q d'ordre de multiplicité $\geqslant r$.

Deux polynômes P et Q sont dits sans facteur commun [2] s'il n'existe aucun polynôme non constant qui divise P et qui divise Q. Ceci est équivalent à dire que P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.

7.5 Références

Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Algèbre 1, VUIBERT 1997 <cote B.U. 512 JER>, chapitre 2.

Philippe PILIBOSSIAN, J-Pierre LECOUTRE, Algèbre, rappel de cours, exercices et problèmes résolus, DUNOD 1998 <cote B.U. 512 (076) PIL> chapitre 4

Dominique PROCHASSON, Algèbre 1re année, exercices corrigés. DUNOD 1999 <cote B.U. 512 (076) PRO> chapitre 9.

[2] ou premiers entre eux. On peut en effet faire de l'arithmétique sur les polynômes, parler de PGCD, PPCM, etc.

Chapitre 8

Fractions rationnelles

8.1 Définitions

Définition 8.1 *Une fraction rationnelle* $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ *où* P *et* Q *sont des polynômes, avec* Q *non nul, est la fonction de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *définie par :* $f(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ *où* P_1 *et* Q_1 *sont obtenus à partir de* P *et* Q *par "simplification par les facteurs communs".*

Les racines du polynôme Q_1 *sont appelés* pôles *de la fraction rationnelle.*

Si Z *est l'ensemble des pôles, la fonction* f *est définie sur* $\mathbb{K} \setminus Z$.

Ainsi, on ne fait pas de différence entre $\dfrac{X-1}{X^2-1}$ et $\dfrac{1}{X+1}$, notamment le nombre 1 n'est pas un pôle de cette fraction.

On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$, de même $\mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$.

Notons que le théorème de prolongement des égalités reste valable dans $\mathbb{K}(X)$:

Proposition 8.2 *Si* P, Q, R, S *sont des polynômes vérifiant pour tout* x *d'un ensemble infini* E *de* $\mathbb{K}$ *l'égalité* $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{R(x)}{S(x)}$*, alors il y a égalité des fractions rationnelles* $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{R(X)}{S(X)}$

8.2 Décomposition en éléments simples

Si $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ est une fraction rationnelle, la division euclidienne du polynôme $A(X)$ par $B(X)$ permet d'écrire $A(X) = B(X)\,Q(X) + R(X)$ d'où $\dfrac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \dfrac{R(X)}{B(X)}$.

Le quotient $Q(X)$ s'appelle la *partie entière* de la fraction rationnelle.

Notons que dans la fraction $\dfrac{R(X)}{B(X)}$ le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Définition 8.3
Dans $\mathbb{C}(X)$ on appelle élément simple toute fraction rationnelle qui s'écrit $\dfrac{\alpha}{(X-a)^k}$ *où α et a sont dans $\mathbb{C}$ et k dans $\mathbb{N}^*$.*

Dans $\mathbb{R}(X)$ on appelle :
élément simple de première espèce, toute fraction $\dfrac{\alpha}{(X-a)^k}$ *où $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$*
et élément simple de seconde espèce toute fraction $\dfrac{\lambda X+\mu}{(aX^2+bX+c)^k}$ *où le trinôme aX^2+bX+c est irréductible, c-à-d où on a : $b^2-4ac<0$.*

On admettra [1] le théorème :

Théorème 8.4 Décomposition en éléments simples
Toute fraction rationnelle $\dfrac{A(X)}{D(X)}$ *de $\mathbb{K}(X)$ où le degré du numérateur $A(X)$ est strictement inférieur à celui du dénominateur $D(X)$ s'écrit d'une et une seule manière, comme somme d'éléments simples. Les dénominateurs des éléments simples qui interviennent divisent le dénominateur $D(X)$.*

Enfin, toute fraction rationnelle $\dfrac{N(X)}{D(X)}$ *de $\mathbb{K}(X)$ s'écrit d'une et une seule manière, comme somme d'un polynôme (sa partie entière) et d'éléments simples.*

Exemple : $\dfrac{2(X^5+1)}{(X-1)^2(X^2+1)} = 2X+4+\dfrac{2}{(X-1)^2}+\dfrac{3}{X-1}+\dfrac{X-1}{X^2+1}.$

Notons que la décomposition en éléments simples est fondamentale pour le calcul de primitives des fractions rationnelles. Par exemple grâce à celle ci-dessus, nous avons facilement qu'une primitive de $\dfrac{2(x^5+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}$ est

$$x^2+4x+\frac{-2}{x-1}+3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan(x)+C$$

N.B. : le théorème donne une "décomposition a priori", où figurent des coefficients constants qu'il faut ensuite calculer. Exemple : $F(X)=\dfrac{X^2+2X+3}{(X+5)^3(X+7)(X^2-3X+8)^2}$

$$F(X)=\frac{a}{X+5}+\frac{b}{(X+5)^2}+\frac{c}{(X+5)^3}+\frac{d}{X+7}+\frac{eX+f}{X^2-3X+8}+\frac{gX+h}{(X^2-3X+8)^2}$$

où a, b, c, d, e, f, g et h sont des constantes.

8.3 Méthode(s) de décomposition en éléments simples

Soit $\dfrac{N(X)}{D(X)}$ une fraction rationnelle donnée. On se place dans $\mathbb{R}(X)$, la méthode sur $\mathbb{C}$ est identique, sauf qu'il n'y a pas d'éléments simples de seconde espèce.

[1] ce théorème se démontre soit à l'aide de techniques d'algèbre linéaire (voir module Math2L02 du 2e semestre), soit par des techniques d'arithmétique sur les polynômes

1re étape : je calcule la partie entière en effectuant la division euclidienne de $N(X)$ par $D(X)$. Le quotient est la partie entière $E(X)$. Pour la suite, on peut (mais ce n'est pas obligatoire) remplacer le numérateur $N(X)$ par le reste de la division.

2e étape : je factorise le dénominateur :
par exemple $D(X) = (X-a)^p(X-b)^q(X^2+cX+d)^r$ où $a \neq b$ et $c^2-4d<0$.
On notera z l'une des deux racines complexes de X^2+cX+d.

3e étape : je vérifie que la fraction ne peut pas être simplifiée, c-à-d que les nombres $N(a)$, $N(b)$ et $N(z)$ sont non nuls.

4e étape : j'écris la décomposition a priori de ma fraction rationnelle :

$$\frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(X-a)^p} + \frac{\beta_1}{X-b} + \dots$$
$$\dots + \frac{\beta_q}{(X-b)^q} + \frac{\lambda_1 X + \mu_1}{X^2+cX+d} + \dots + \frac{\lambda_r X + \mu_r}{(X^2+cX+d)^r}$$

5e étape : si la fraction rationnelle est paire ou impaire, j'en déduis (grâce à l'unicité de la décomposition) des relations simples entre les coefficients.

6e étape : je calcule un maximum de coefficients par des techniques diverses :

coefficients de plus haut degré : α_p est la valeur pour $x=a$ de $(X-a)^p\dfrac{N(X)}{D(X)}$ simplifiée par $(X-a)^p$ c-à-d $a_p = \dfrac{N(a)}{(a-b)^q(a^2+ca+d)^r}$

de même la valeur pour $x=z$ de $(X^2+cX+d)^r\dfrac{N(X)}{D(X)}$ donne :
$\lambda_r z + \mu_r = \dfrac{N(z)}{(z-a)^p(z-b)^q}$ d'où λ_r et μ_r.

coefficient dans le cas d'un pôle simple a : $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{\alpha}{X-a} + \dots$ où $\alpha = \dfrac{N(a)}{D'(a)}$

utilisation de la limite en $+\infty$ de $x\dfrac{N(x)}{D(x)}$

utilisation d'une valeur particulière de la variable (par exemple $x=0$).

dans le cas d'un grand ($\geqslant 3$) exposant p, faire le changement de variable $T = X-a$ ainsi $\dfrac{N(X)}{D(X)} = \dfrac{A(T)}{T^p B(T)}$ où A et B sont des polynômes avec $B(0) \neq 0$.
On divise $A(T)$ par $B(T)$ selon les puissances croissantes à l'ordre $p-1$ pour écrire :
$A(T) = B(T)Q(T) + T^p R(T)$ d'où si $Q(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_{p-1}T^{p-1}$, l'égalité :

$$\frac{A(T)}{T^p B(T)} = \frac{\alpha_0}{T^p} + \frac{\alpha_1}{T^{p-1}} + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{T} + \frac{R(T)}{B(T)}.$$

Reste alors à décomposer cette dernière fraction $\dfrac{R(T)}{B(T)}$.

7e étape : s'il me reste des coefficients à calculer, je développe tout et j'identifie les fractions rationnelles.

8e étape : vu la longueur du calcul, il est judicieux de faire une "vérification" (par exemple en prenant une valeur particulière de x).

8.4 Primitives de fractions rationnelles

A l'exception des cas particuliers où une fraction s'écrit $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, $\dfrac{u'(x)}{u^n(x)}$ ou $\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$, il faut d'abord la décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Chaque élément simple s'intègre ensuite facilement :

a) $\displaystyle\int \frac{\lambda}{x-a}\,dx = \lambda \ln|x-a| + C$ ne pas oublier la valeur absolue, et bien faire attention que a doit être réel (le logarithme du module ne convient pas dans $\mathbb{C}$).

b) $\displaystyle\int \frac{\lambda}{(x-a)^p}\,dx = \frac{-\lambda}{p-1}\,\frac{1}{(x-a)^{p-1}} + C$ si $p \neq 1$.

c) pour un élément simple de deuxième espèce, de la forme $\dfrac{\lambda x+\mu}{u(x)}$ où $u(x) = ax^2+bx+c$ avec $b^2-4ac<0$, on écrit d'abord le numérateur sous la forme $\alpha u'(x)+\beta$.
On intègre alors facilement $\displaystyle\int \frac{\alpha u'(x)}{u(x)}\,dx = \alpha \ln|u(x)| + C$
Reste alors le terme $\displaystyle\int \frac{\beta}{ax^2+bx+c}\,dx$. On met le dénominateur sous forme canonique : $u(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2+d^2)$ où $d^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$.
On a alors : $\displaystyle\int \frac{\beta}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{\beta}{a}\int \frac{1}{(x+\frac{b}{2a})^2+d^2}\,dx = \frac{\beta}{a\,d}\arctan(\frac{1}{d}(x+\frac{b}{2a})) + C.$

d) pour un élément simple de seconde espèce avec puissance, $\dfrac{\lambda x+\mu}{(u(x))^p}$ on commence de même par transformer le numérateur en $\alpha u'(x)+\beta$.
D'autre part, par des intégrations par parties successives, à partir de $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, on obtient [2] pour $p = 2, 3, \ldots$ le calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^p}\,dx$

8.5 Références :

Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Algèbre 1, VUIBERT 1997 <cote B.U. 512 JER>, chapitre 3.

Philippe PILIBOSSIAN, J-Pierre LECOUTRE, Algèbre, rappel de cours, exercices et problèmes résolus, DUNOD 1998 <cote B.U. 512 (076) PIL> chapitre 5

Dominique PROCHASSON, Algèbre 1re année, exercices corrigés. DUNOD 1999 <cote B.U. 512 (076) PRO> chapitre 9.

[2] c'est assez technique, on retiendra surtout que c'est toujours possible...

Chapitre 9

Intégrales et primitives

Rappel : si f est continue sur un intervalle I et si a et b sont deux réels appartenant à I, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est le nombre $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I. Notation : le nombre $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.

On note $\displaystyle\int f(x)dx$ ou encore $\displaystyle\int^x f(t)dt$ une primitive de la fonction f. On sait que deux primitives sur un même intervalle diffèrent d'une constante.

Donc si F est une primitive particulière de f, on écrira $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ où C désigne une fonction constante sur chacun des intervalles de définition de f.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ où C désigne en fait deux constantes, l'une pour x dans $]-\infty, 0[$, l'autre pour x dans $]0, +\infty[$.

Remarque : on n'ajoute C que lorsqu'il n'y a plus de signe $\int$ c-à-d de primitive à calculer (et il n'y a jamais de constante C dans le calcul d'une intégrale).

9.1 Propriétés de base

Théorème 9.1 *Linéarité de l'intégrale :*
Si f et g sont continues sur I, $a \in I$ et $b \in I$, λ et μ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b (\lambda\, f(x) + \mu\, g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \;+\; \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

et en termes de primitives : $\int (\lambda\, f(x) + \mu\, g(x))\, dx \;=\; \lambda \int f(x)\, dx \;+\; \mu \int g(x)\, dx$

Théorème 9.2 *Intégration par parties :*
Si u et v sont dérivables de dérivées continues sur I, alors pour $a \in I$ et $b \in I$, on a :

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx \;=\; \big[u(x)\, v(x)\big]_a^b \;-\; \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx$$

Pour les primitives : $\int u'(x)\, v(x)\, dx = [u(x)\, v(x)] - \int u(x)\, v'(x)\, dx$.

Bien remarquer l'hypothèse : u et v dérivables de dérivée continue, ce qu'on exprime en disant que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$. Il est d'usage de noter du l'élément différentiel $u'(x)dx$, et de même dv le terme $v'(x)\,dx$. La formule s'écrit alors : $\displaystyle\int_a^b v\,du = \big[u\,v\big]_a^b - \int_a^b u\,dv$.

Théorème 9.3 *Changement de variables :*
Si u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans un intervalle J, et si f est continue sur J, alors : $\displaystyle\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx \;=\; \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

pour les primitives : $\displaystyle\int^x f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int^{u(x)} f(u)\,du$

Exemples :

1. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\cos(x)}\sin x\;dx = \int_1^{-1} -\mathrm{e}^u du = [-\mathrm{e}^u]_1^{-1} = e - \frac{1}{e}$ (on a posé $u = \cos x$)
2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\;dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\;dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\;dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$
(on a posé $x = \sin t$)
3. $\displaystyle\int^x \frac{\sin x}{1+9\cos^2 x}\,dx = \int^{\cos x} \frac{-du}{1+9u^2} = \left[\frac{1}{3}\arctan(3u)\right]^{\cos x} = \frac{1}{3}\arctan(3\cos x)$
où on a posé : $u = \cos x$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\ln x}\,dx = \int^{\ln x} \frac{e^u}{u}\,du$ où $u = \ln x$, c-à-d $x = \mathrm{e}^u$.

En pratique, dès qu'on a défini la nouvelle variable (exemple : $u = \sin x$) on justifie la validité et on "différencie" c-à-d on écrit la relation entre dx et du ce qui permet d'écrire sans difficulté la formule du changement de variable. Par exemple : posons $u = \sin x$, cette expression est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $du = \cos x\,dx$ d'où ...

Dans le cas d'une primitive, on se souvient de la relation (par exemple $u = \sin x$) qui donne la nouvelle variable en fonction de l'ancienne, dans le cas d'une intégrale par contre, la variable d'intégration étant muette, on oublie cette relation.

Exemple : Pour $a > 1$, posons $I = \displaystyle\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ donne (après calcul) : $I = \displaystyle\int_{1/a}^a \frac{-\ln t}{1+t^2}\,dt$ c-à-d $I = -I$. On en déduit $I = 0$.

Faire attention que le changement de variable soit valide sur l'intervalle considéré.

Exemple : il est correct d'écrire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\sin^7 x}\,dx = \int_0^0 \frac{du}{1+u^7} = 0$ mais il serait faux de poser de même $u = \sin x$ pour $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^7 x}\,dx$.

9.2 Formulaire

Il est important de connaître un bon formulaire de primitives. Un bon formulaire, c'est celui qu'on se fait soi-même, à partir de ce qu'on trouve dans les livres, et de sa propre pratique. Il faut le refaire régulièrement, ce qui permet de mieux le connaître. C'est pourquoi, aucun formulaire n'est proposé ici.

N.B. : Certaines primitives de fonctions continues ne peuvent pas s'écrire à l'aide des fonctions classiques. C'est le cas par exemple de la fonction de Gauss (courbe en cloche) utilisée en probabilités (loi normale) $x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ ou plus simplement de la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. Une primitive F de cette fonction, permet d'exprimer bien d'autres primitives, comme celles de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$ (changement de variable $u = x^2$). De même, une primitive G de $x \to \dfrac{1}{\ln x}$ permet par $t = \ln x$ d'obtenir celle de $x \to \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ puis celle de $x \to \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$ (intégration par parties). Mais aucune de ces primitives ne peut s'écrire à l'aide des fonctions à notre programme.

9.3 Primitives des fractions trigonométriques

Supposons que $f(x)$ s'écrive sous la forme d'une fraction comportant uniquement des expressions comme $\cos x$, $\sin x$ ou $\tan x$. Alors l'un des quatre changements de variables suivants permet de se ramener à intégrer une fraction rationnelle.

1. $u = \cos x$ si on peut écrire $f(x) = \sin x \, g(\cos x)$.
2. $u = \sin x$ si on peut écrire $f(x) = \cos x \, g(\sin x)$.
3. $u = \tan x$ si on peut écrire $f(x) = g(\tan x)$.
4. $t = \tan \dfrac{x}{2}$ est toujours possible, mais pose problème car $\tan \frac{x}{2}$ n'est pas défini pour $x = \pi + 2k\pi$ et donne souvent un calcul fastidieux... Il utilise les formules de trigonométrie à bien connaître :
   $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ $\qquad \sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ $\qquad$ où $t = \tan \dfrac{x}{2}$

Pour les trois premiers changements de variable, il faut se rappeler que $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\tan^2 x$ sont liés par des formules très simples comme

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \qquad \text{et} \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

On peut aussi appliquer la règle suivante : on pose

1. $u = \cos x$ si l'élément différentiel $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par $-x$.
2. $u = \sin x$ si l'élément différentiel $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par $\pi - x$.
3. $u = \tan x$ si l'élément différentiel $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par $\pi + x$.

Exemple Pour $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \, (3 + \cos x)} \, dx$ on pose $u = \cos x$.

Mais pour $\displaystyle\int \frac{1}{3 + \cos x} \, dx$ on pose $t = \tan(\frac{x}{2})$.

Attention, pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos x}\,dx$, je ne peux pas poser directement $t = \tan(\frac{x}{2})$ qui n'est pas défini pour $x = \pi$. Le calcul de primitive donne $F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ qui est définie sur $[0,\pi[\cup]\pi,2\pi]$ et a des limites différentes à droite et à gauche de π... Le résultat est : $I = F(2\pi) - F(\pi^+) + F(\pi^-) - F(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

9.4 Méthodes diverses :

1. Pour $\displaystyle\int f(x)\ln x\;dx$, on fait disparaître le logarithme par une intégration par parties (poser $du = f(x)\,dx$ et $v = \ln x$).
2. de même pour $\displaystyle\int f(x)\arctan x\;dx$, on intègre par parties pour faire disparaître le terme $\arctan x$
3. pour $\displaystyle\int P(x)\mathrm{e}^x dx$, où P est un polynôme, on peut faire plusieurs intégrations par parties successives de manière à dériver le polynôme donc à faire baisser son degré. Mais, il est plus simple de chercher directement une primitive de la forme $Q(x)\mathrm{e}^x$ où Q est un polynôme de degré égal à celui de P.
4. de même pour $\displaystyle\int P(x)\cos x\;dx$ et $\displaystyle\int P(x)\sin x\;dx$ en cherchant une primitive de la forme : $Q_1(x)\cos x + Q_2(x)\sin x$.
5. pour $\cos(\omega x)\,\mathrm{e}^{ax}$ ou $\sin(\omega x)\,\mathrm{e}^{ax}$ il est intéressant de considérer la partie réelle ou la partie imaginaire de l'exponentielle complexe $\mathrm{e}^{(a+i\omega)\,x}$
6. polynômes trigonométriques : $\int \sin^p x\cos^q x\;dx$ s'écrit
   si p est impair $\int \sin x\;\varphi(\cos x)\;dx$ et s'intègre en posant $u = \cos x$,
   si q est impair, $\int \varphi(\sin x)\cos x\;dx$ et on pose $v = \sin x$.
   Dans le cas où p et q sont pairs, on linéarise l'expression $\sin^p x\cos^q x$.
7. fonctions en $\mathrm{e}^{\omega x}$ et $\mathrm{e}^{-\omega x}$: poser $u = \mathrm{e}^{\omega x}$
8. fonctions en x et $\sqrt{ax+b}$: poser $u = \sqrt{ax+b}$
9. fonctions en x et $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$: poser $u = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Références : Pascal DUPONT Exercices de Mathématiques pour le 1er cycle, vol. 2 : Analyse, De Boeck 2003 <cote B.U. 512/514 (076) DUP>, chap. 10, par. 1

Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Analyse 2, VUIBERT 1997 <cote B.U. 517.5 JER>, chapitre 3.

D. GUININ, B. JOPPIN, Mathématiques Analyse MPSI (ou PCSI) Bréal 2003 <cote B.U. 517 GUI>, chapitre 10

Vincent BLONDEL, Mathématiques, Analyse, cours et exercices corrigés. DEUG Sciences et Vie de la Terre. DUNOD, 2000 <cote B.U. 517 (076) BLO>, chapitre 5.