Examen Géométrie Élémentaire (L2) jeudi 23 juin 2016

14h-16h

Les parties sont indépendantes. Pour les question où on ne demande pas de montrer/justifier/expliquer, une simple réponse peut suffire.

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (donc en particulier $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme une base *orthonormée* de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{P}}$). Pour les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point $P \in \mathcal{P}$ on écrit (x, y). Soit C le point de coordonnées $(-2, 3)$.

a. Donner une équation pour le cercle de centre C et de rayon 7.

b. Décrire l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x^2 - 10x + y^2 + 4y = 45$.

c. Soient A, B le point de coordonnées $(1, 2)$ respectivement $(7, 4)$. Donner une équation pour l'ensemble des points P tels que $\|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2$, et décrire l'ensemble de façon géométrique.

2. On considère un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point de coordonnées $(-3, 4)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et soient $\vec{u} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = 5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

a. Montrer que $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v})$ est un autre repère cartésien.

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(2, 2)$.

c. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(-1, 3)$.

d. On désigne par $x, y \in \mathbf{R}$ les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point P du plan, et par x', y' ses coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$. Soit $\mathcal{D}$ la droite donnée par rapport à $\mathcal{R}$ par l'équation $x + 3y + 5 = 0$. Donner une équation pour cette droite $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{R}'$, qui sera donc en termes des coordonnées x', y'. [Indication: la méthode des questions précédentes permet d'exprimer (x, y) en termes de (x', y') ; il suffit de substituer le résultat dans l'équation de $\mathcal{D}$.]

3. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. En termes des coordonnées (x, y) par rapport à $\mathcal{R}$, on définit une droite $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{P}$ par l'équation $5x + 12y = 28$.

a. Soit P l'image du point A de coordonnées $(4, 5)$ par la projection orthogonal sur la droite $\mathcal{D}_1$. Trouver le coordonnées de P.

b. Quelle est la distance du point A à la droite $\mathcal{D}_1$?

c. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $5x + 12y = 80$. Vérifier que $A \in \mathcal{D}_2$ et argumenter que la distance de tout point de $\mathcal{D}_2$ à la droite $\mathcal{D}_1$ est égale à celle pour A trouvée dans la question précédente.

d. Si l'on fixe $a \in \mathbf{R}$ quelconque, l'argument de la question précédente montre que tous les points de la droite d'équation $5x + 12y = a$ ont la même distance à la droite $\mathcal{D}_1$, laquelle distance ne dépend donc que de la valeur de a. Exprimer cette distance en fonction de a.

4. Si $\mathcal{P}$ est un plan affine, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors le triangle $\mathcal{S} = (\mathcal{O}+\vec{\imath}, \mathcal{O}+\vec{\jmath}, \mathcal{O})$ est une repère affine. Les coordonnées barycentriques (x, y, z) d'un point $P \in \mathcal{P}$ sont des nombres tels que $x + y = z = 1$ et $P = \operatorname{bar}((x, \mathcal{O} + \vec{\imath}), (y, \mathcal{O} + \vec{\jmath}), (z, \mathcal{O}))$ (donc P s'écrit comme barycentre des sommets du triangle avec poids respectifs (x, y, z) ; en fait (x, y) sont les coordonnées cartésiens de P par rapport à $\mathcal{R}$, auxquelles on a simplement rajouté la coordonnée $z = 1 - x - y$).

a. Montrer que pour $a, b, c \in \mathbf{R}$, pas tous égaux, l'équation $ax + by + cz = 0$ en termes des coordonnées barycentriques définit une droite du plan.

b. Montrer que toute droite du plan s'écrit sous cette forme.

c. Montrer que deux triples (a, b, c) et (a', b', c') déterminent la même droite si et seulement si l'un est multiple de l'autre : $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

d. On considère maintenant trois triples (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), déterminant chacun une droite. Montrer que si les trois droites sont concourantes (c'est-à-dire ont un point commun aux trois) alors

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

e.

 sujet continué au verso

Appelons (P_1, P_2, P_3) les sommets du triangle $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{D}_1$ une droite passant par P_1 et coupant le côté opposé du triangle $\mathcal{S}$ (la droite qui passe par P_2, P_3) en un point de coordonnées barycentriques $(0, \lambda, 1-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. De façon similaire soit $\mathcal{D}_2$ une droite passant par P_2 et coupant le côté opposé en un point de coordonnées barycentriques $(1-\mu, 0, \mu)$, et $\mathcal{D}_3$ une droite passant par P_3 et coupant le côté opposé en un point de coordonnées barycentriques $(\nu, 1-\nu, 0)$. On suppose qu'aucune des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ ne coïncide avec un côté du triangle $\mathcal{S}$. Montrer que si les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes, alors $\frac{\lambda}{1-\lambda} \times \frac{\mu}{1-\mu} \times \frac{\nu}{1-\nu} = 1$ (théorème de Ceva).

Fin.