Corrigé Contr. cont. 4 (combinatoire) Combinatoire et Géométrie (L2) vendredi 8 janvier 2021
14h-16h

1. Pour chaque point ci-dessous répondre par A, B, C, ou D. Une motivation n'est pas demandée ; une bonne réponse contient une et une seule de ces lettres.

Pour les points a à e cette lettre signifie que, pour les ensembles X, Y mentionnés
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucune de ces trois possibilités s'applique, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$ ».

a. $X = \{\, n^2 \mid n \in \mathbf{Z}, -2 \leq n \leq 2 \,\}$, et $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1 $\surd$ *B: car* $X = \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}$

b. $X = \{\, A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \mid 2 \notin A \,\}$, et $Y = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.

$\surd$ *C. Car* $X = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ *(n'oubliez pas l'ensemble vide!).*

c. $X = \{\{0, 3, 6\}, \{1\}, \{2, 5, 7\}, \{4\}\}$ et $Y = \{\{0, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 7\}\}$.

1 $\surd$ *D. Deux partitions différentes du même ensemble* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *mais visiblement aucune inclusion entre les deux (les inclusions entre des éléments de X et Y n'ont pas d'importance).*

d. $X = \{\, P \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid \#P = 3 \,\}$, et $Y = \{\, \{a, b, c\} \mid a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}, c \in \mathbf{N} \,\}$.

$\surd$ *B. X est l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ de cardinal 3, et X est l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ de cardinal 3, 2, ou 1, car a, b, c ne sont pas forcément distincts.*

e. $X = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \,\}$, et $Y = \{\, (2a + 3b, -a, -b) \mid a, b \in \mathbf{R} \,\}$.

1 $\surd$ *A. Ce sont deux descriptions du même plan.*

Pour les points f et g, on décrit chaque fois une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{N}^2$; indiquer si cette relation est
A : symétrique et transitive,
B : symétrique mais pas transitive,
C : anti-symetrique et transitive,
D : aucune de ces trois possibilités s'applique

f. $(i, j)\mathcal{R}(k, l)$ si $k = i + 1$ et $l = j + 1$.

1 $\surd$ *D. Cette relation n'est clairement ni symétrique ni transitive.*

g. $(i, j)\mathcal{R}(k, l)$ si $2i - j = 2k - l$.

1 $\surd$ *A. La symétrie et la transitivité sont évidentes.*

2. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs/objets du type spécifié.

a. Évolutions de score dans un match de foot menant au score final 7–4.

1 $\surd$ *Le nombre est* $\binom{7+4}{4} = \binom{11}{4} = 330$. *(interprétation A vue en TD, avec $k = 7, l = 4$)*

b. Manières de distribuer 11 bonbons à 4 enfants (pour chaque enfant compte seulement le nombre de bonbons qu'il reçoit, car tous les bonbons sont pareils).

1 $\surd$ *En nommant les nombres reçu par les enfant respectifs $c_1, \ldots, c_4$, le nombre cherché est le cardinal de* $\{\, (c_1, \ldots, c_4) \in \mathbf{N}^4 \mid c_1 + \cdots + c_4 = 11 \,\} = \binom{4-1+11}{11} = \binom{14}{11} = \binom{14}{3} = 364$. *(interprétation G avec $m = 4, l = 11$)*

c. Des parties de l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ des diviseurs positifs de 30 (c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\})$).

1 $\surd$ *Le nombre est* $\#\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}) = 2^{\#\{1,2,3,5,6,10,15,30\}} = 2^8 = 256$. *(J avec $n = 8$)*

d. Les suites faiblement croissantes $a_1 \leq \cdots \leq a_7$ avec $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ pour tout i.

1 $\surd$ *Le nombre est* $\binom{10-1+7}{7} = \binom{16}{7} = 11440$ *(H avec $l = 7, m = 10$)*

e. Commandes de 7 pizzas, choisies dans un menu qui compte 12 différents types de pizza.

1 $\surd$ *Le nombre est* $\binom{12-1+7}{7} = \binom{18}{7} = 31824$. *(F avec $l = 7, m = 12$)*

f. Mots formés en utilisant (seulement) 9 lettres "A" et 6 lettres "B".

1 $\surd$ *Le nombre est* $\binom{9+6}{6} = \binom{15}{6} = 5005$. *(B avec $k = 9, l = 6$)*

g. Chemins de réseau de $(-3,-4)$ vers $(4,7)$ qui passent par l'origine $(0,0)$.

1 $\surd$ *Un tel chemin est composé d'un chemin de* $(0,0)$ *vers* $(4,7)$ *suivi d'une chemin de* $(4,7)$ *vers* $(6,11)$, *qui peuvent être indépendamment choisis, d'où le nombre est le produit des nombres pour les deux parties, soit* $\binom{3+4}{4}\binom{4+7}{4}=\binom{7}{4}\binom{11}{4}=35\times 330=11550$. *(A deux fois de suite)*

h. Les classements des trois gagnants (première, seconde, troisième place ; aucun "ex aequo" n'est possible) dans une compétition avec 22 participants.

1 $\surd$ *Le nombre est* $22^{\underline{3}}=22\times 21\times 20=9240$ *(K avec* $k=3$, $n=22$*)*

3. Une association sportive propose 3 activités : le tennis, l'escalade, et la voile. Il y a 143 personnes qui sont inscrites pour le tennis, 78 pour l'escalade et 105 pour la voile. Mais les listes d'inscription du tennis et de l'escalade ont 27 noms en commun, celles du tennis et de la voile 45 noms en commun, et celles de l'escalade et la voile 20 noms en commun ; finalement 8 personnes sont inscrites aux 3 activités à la fois. Combien de personnes sont inscrites à au moins une de ces activités ?

2 $\surd$ *La formule d'inclusion/exclusion donne* $143+78+105-27-45-20+8=242$ *personnes inscrites à au moins une de ces activités.*

4. Dans un jeu de 32 cartes, formé de 4 couleurs contenant chacune 8 cartes numérotées, on considère des "mains" (c'est-à-dire sous-ensembles) de 5 cartes. Parmi les $\binom{32}{5}$ mains possible, combien contiennent une carte au moins de chacune des 4 couleurs ? [Indication : l'ensemble des mains à exclure est la réunion de 4 ensembles de mains, chacun défini par l'absence dans la main d'une couleur C.]

3 $\surd$ *Si* A_i *désigne le sous-ensembles des mains où la couleur* i *est exclue, il s'agit de calculer le cardinal de* $E\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$. *Pour calculer cela à l'aide de la formule d'inclusion/exclusion, il faut connaître pas seulement chaque* $\#A_i$, *mais plus généralement* $\#(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ *pour toute collection de couleurs distinctes* $i_1,\ldots,i_k$, *c'est-à-dire le nombre de mains possibles si ces* k *couleurs sont simultanément exclues. Comme il reste* $4-k$ *couleurs de 8 cartes chacune, ce cardinal (qui dépend donc uniquement du nombre* k *des couleurs interdites, pas du choix de* $i_1,\ldots,i_k$*) est* $\binom{8*(4-k)}{5}$, *dont les valeurs sont respectivement* $42504, 4368, 56, 0$ *pour* $k=1,2,3,4$. *En tenant compte que pour un tel* k *on a* $\binom{4}{k}$ *manières des choisir* $i_1,\ldots,i_k$, *et donc autant de termes identiques* $\binom{8*(4-k)}{5}$ *à soustraire/additionner, on trouve la formule* $\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\binom{8*(4-k)}{5}$ *(le terme pour* $k=0$ *donne le terme de départ* $\#E=\binom{32}{5}$*). Concrètement cela donne* $\binom{32}{5}-4\binom{24}{5}+6\binom{16}{5}-4\binom{8}{5}+0=201376-4\times 42504+6\times 4368-4\times 56$, *dont l'évaluation numérique est* $201376-170016+26208-224=57344$.

Ce nombre peut aussi être trouvé d'une autre façon : comme il y aura forcément une couleur avec 2 cartes dans la main et les trois autres couleurs avec une seul carte, on peut compter le nombre de manières de choisir une couleur parmi les 4, puis deux cartes parmi les 8 cartes de cette couleur, puis trois fois de rang une carte parmi les 8 cartes de chacune des trois autres couleurs ; on obtient ainsi $\binom{4}{1}\binom{8}{2}\binom{8}{1}^3=4\times 56\times 8^3=57344$.