

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, les documents ne le sont pas. Là où on demande une valeur, donner l'expression mathématique qui la décrit, ainsi que sa valeur numérique ; dans le cas des probabilités, cette dernière arrondie à 4 chiffres après la virgule.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y . Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :

A : $X = Y$,

B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),

C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),

D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à « on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$ ».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une seule option est fautive. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin(x) \geq \frac{1}{2}\}$ et $Y = [\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi]$ (un intervalle fermé de \mathbf{R}).

b. $X = \{ \{n, \frac{n^2-n}{2}\} \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \}$ et $Y = \{\{3\}, \{6, 4\}, \{0, 1\}, \{0\}, \{2, 1\}\}$

c. $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x < 6y + 3\}$, et $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\}$.

d. $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $Y = f^{-1}(A \cup B)$ (ici $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f), où $A = [0, 1]$ et $B = [3, 4]$ sont des intervalles de \mathbf{R} , et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$.

e. $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$.

2. Dans un jeu de 32 cartes, avec 4 « couleurs » et 8 « valeurs », on sélectionne une « main » de 5 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

b. Parmi ces mains, quel est le nombre de mains dont les cartes ont 5 valeurs distinctes ?

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard (avec probabilité uniforme) contienne 3 cartes d'une même valeur et 2 d'une autre valeur (appelée « main pleine » ou « full house ») ?

3. Pour deux événements A, B définis sur une espace probabilisé, il est donné que $\Pr(A) = 0,7 = \Pr(B)$, et que $\Pr(A \mid B) = 0,6$. Calculer la probabilité $\Pr(A^c \cap B^c)$ qui ni A ni B se produise (ici A^c désigne l'événement complémentaire de A). Est-ce que A et B sont des événements indépendants ?

4. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs/configurations/objets du type spécifié. Le terme « mot » signifie une chaîne finie de caractères (lettres).

a. Les mots de longueur 13 qui contiennent 9 lettres A et 4 lettres B.

b. Les monômes de degré 7 en les 6 variables u, v, w, x, y, z (par exemple uvw^2xyz ou v^5z^2).

c. Classements (c'est-à-dire listes ordonnées) de 5 noms, choisis parmi 12 candidats.

d. Les chemins de réseau menant du point $(1, 1)$ vers $(6, 11)$

e. Les nombres naturels $n < 10^7 = 10\,000\,000$ dont les chiffres de leur écriture décimale sont croissants au sens large, par exemple 1223339, 12458 ou 0 (on peut écrire chacun à 7 chiffres sans que cela ne change rien; les deux dernier deviennent alors 0012458 respectivement 0000000).

f. Façons de composer une glace à 3 boules, choisies parmi 16 parfums (on peut avoir plusieurs boules identiques).

5. On considère une variable aléatoire X dont la loi est la suivante ; elle prend l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, avec probabilités respectivement (0): 0,008, (1): 0,072, (2): 0,232, (3): 0,288, et (4): 0,400. Calculer pour X : son espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$, sa variance $\text{Var}(X)$, et son écart-type $\sigma(X)$.

6. On lance un dé équilibré plusieurs fois de rang, et on note a_1, a_2, a_3, \dots les résultats.

a. Quelle est la probabilité $\Pr(a_1 \leq a_2)$? [On peut évidemment ignorer les lancers après le second.]

b. Quelle est la probabilité $\Pr(a_1 \leq a_2 \leq a_3)$?

c. Donner une formule qui décrit en fonction de $n \in \mathbf{N}$ la probabilité $\Pr(a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n)$ que les n premiers résultats soient croissants au sens large.

Fin.