Corrigé Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 15 juin 2017
14h00-16h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \}$ et $Y = \{ (t, 3-2t) \mid t \in \mathbf{R} \}$.

$\surd$ *On a* $Y \subseteq Y$ *car* $t^2 + (3-2t)^2 - 1 = 5t^2 - 6t + 8 > 0$ *(par calcul du discriminant* $36 - 4 \times 5 \times 8 = -124 < 0$*) pour tout* $t \in \mathbf{R}$*, mais* $X \not\subseteq Y$*, par exemple* $(1,0) \in X \setminus Y$*. Donc C.*

b. $X = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x - 3y = 7 \}$, et $Y = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 5x + 2y = 8 \}$.

$\surd$ *Ce sont deux droites distinctes, donc pas d'inclusion d'une dans l'autre: D*

c. $X = \{ n \in \mathbf{N} \mid n \text{ divise } 21 \}$ et $Y = \{ n \in \mathbf{N} \mid n \text{ divise } 84 \}$.

$\surd$ *Y contient X (tout diviseur de* 21 *divise aussi* $84 = 4 \times 21$*) mais pas réciproquement: B.*

d. $X = f(A) \cap f(B)$ et $Y = f(A \cap B)$ (ici $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f), où $A = [0,3]$ et $B = [1,4]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto 3x + 7$.

$\surd$ *Ici* f *est une bijection (dont* $y \mapsto \frac{y-7}{3}$ *est la réciproque) et donc* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *(bien que en général on ne sait que* $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$*, notamment si* f *n'est pas injectif). Donc A.*

e. $X = g^{-1}(C) \cup g^{-1}(D)$ et $Y = g^{-1}(C \cup D)$ (ici $g^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par g), où $C = [0,1]$ et $D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \sin(x^2 - 4x + 3)$.

$\surd$ *On a toujours* $g^{-1}(C) \cup g^{-1}(D) = \{ x \mid g(x) \in C, g(x) \in D \} = g^{-1}(C \cup D)$*, donc A.*

2. On jette 5 fois un dé équilibré (à 6 faces). Quelle est la probabilité pour qu'apparaisse au moins une fois la face 3 ?

$\surd$ *L'évènement complémentaire est d'obtenir* 5 *fois de suite un résultat parmi* $1, 2, 4, 5, 6$*, pour lequel la probabilité est* $(5/6)^5 = \frac{5^5}{6^5}$*. La probabilité demandée est donc* $1 - \frac{5^5}{6^5} = \frac{4651}{7776} \approx 0{,}5981$.

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme "mot" signifie une chaîne quelconque de caractères (lettres).

a. Les évolutions du score (c'est-à-dire les suites des scores intermédiaires) possibles pour un match de foot, sachant que celui-ci se termine sur un score de 6–5.

$\surd$ *Le nombre de chemins de réseau do* $(0,0)$ *vers* $(6,5)$ *est* $\binom{6+5}{5} = \binom{11}{5} = 462$.

b. Les mots de longueur 13 qui contiennent 4 lettres A et 9 lettres B.

$\surd$ *Le nombre de choix pour les positions des «A» :* $\binom{13}{4} = 715$.

c. Les commandes de 5 pizzas *distinctes*, choisies parmi 14 types de pizza proposés.

$\surd$ *Le nombre de choix de* 5 *parmi* 14 *sans répétitions, soit* $\binom{14}{5} = 2002$.

d. Les monômes en x, y, z de degré 9 (par exemple x^3yz^5 ou x^2y^7).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 9 *parmi* 3 *avec répétitions, soit* $\binom{9+3-1}{9} = \binom{11}{9} = \binom{11}{2} = 55$.

e. Les applications injectives $\{1,2,3,4,5\} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$\surd$ *C'est le nombre des 5-arrangements dans un ensemble de* 10*, soit* $10^{\underline{5}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$.

f. Les suites $(a_1, \dots, a_7)$ avec $a_i \in \mathbf{N}$ pour tout i, qui vérifient $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_7 \leq 10$.

$\surd$ *C'est le nombre de choix de* 7 *parmi* 10 *avec répétitions (si l'on remet les éléments choisis en ordre faiblement croissant), soit* $\binom{10+7-1}{7} = \binom{16}{7} = 11440$.

4. Une expérience aléatoire consiste a tirer d'une urne, qui contient au départ 7 boules numérotées de 1 à 7, successivement toutes les boules, et d'obtenir ainsi une permutation de ces nombres ; on suppose l'équiprobabilité entre les 7! permutations. Soit A l'évènement «le nombre de la première boule tirée est pair», et B l'évènement «la boule numéro 3 est tirée avant la boule numéro 4».

a. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$ de ces évènements.

$\surd$ *Chaque boule a la même probabilité d'être tirée en premier, et* 3 *parmi les* 7 *boules ont un numéro pair, donc* $\mathbf{P}(A) = 3/7$. *On a* $\mathbf{P}(B) = 1/2$ *par symétrie ; pour chaque tirage ou* 3 *est tiré avant* 4 *on en obtient un ou* 3 *est tiré après* 4 *in permutant* 3 *et* 4*, et vice versa, ce qui établit un bijection entre les tirages qui relèvent de* b *et de son complémentaire.*

b. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(A \cap B)$, et en déduire la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A \mid B)$. [Indication: on pourrait considérer séparément les 7 possibilités pour la première boule tirée.]

$\surd$ *Les* 4 *résultats pour la première boule où son numéro est impair ne contribuent pas à l'évènement* A*, et donc pas à* $A \cap B$ *non plus. La possibilité où la première boule est le* 4 *ne contribuent pas à l'évènement* B *(car* 3 *ne peut alors pas être tiré avant* 4*) et donc pas à* $A \cap B$ *non plus. Restent les possibilité d'un premier tirage de* 2 *ou de* 6*, chacune avec probabilité* $1/7$*, dont chaque fois la moitié contribue à l'évènement* $A \cap B$ *(car ni* 3 *ni* 4 *étant tiré, la probabilité conditionnelle pour* B *reste* $1/2$ *par le même argument de symétrie. Au total* $\mathbf{P}(A \cap B) = 2 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{7}$. *Alors* $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{1/7}{3/7} = \frac{1}{3}$

c. Est-ce que A et B sont des évènements indépendants ?

$\surd$ *Puisque* $\mathbf{P}(A \mid B) \neq \mathbf{P}(A)$*, les deux ne sont pas indépendants.*

5. Dans un jeu de 52 cartes (avec 4 «couleurs» et 13 «valeurs») on sélectionne une «main» de 5 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

$\surd$ $\binom{52}{5}$*, qui vaut* 2598960

b. Combien parmi ces mains contiennent une carte de chacune des 4 couleurs ?

$\surd$ *Une telle main contient une seule couleur* C *deux fois, et les autres une fois, et pour spécifier la main entièrement il faut donner* C *(4 choix), deux cartes parmi les 13 de couleur* C *(*$\binom{13}{2}$ *choix), et pour chacune des 3 couleurs restantes une cartes parmi les 13 de cette couleur (*13^3 *choix). Au total* $4 \times \binom{13}{2} \times 13^3 = 4 \times 78 \times 2197 = 685464$.

c. Quelle est la probabilité pour qu'une main choisie au hasard contienne au moins une carte de chacune des 4 couleurs ?

$\surd$ *C'est* $685464/\binom{52}{5} = 685464/2598960 = 2197/8330 \approx 0{,}2637$.

d. Quelle est la probabilité pour qu'une main choisie au hasard contienne 5 *valeurs* distinctes ?

$\surd$ *Ici le nombre de cas favorables peut être calculé comme le produit du nombre* $\binom{13}{5}$ *de sous-ensembles de* 5 *valeurs parmi les* 13 *et le nombre* 4^5 *de façon d'associer à chaque valeur une couleur. Au total on obtient* $\binom{13}{5} \times 4^5/\binom{52}{5} = \frac{13\times12\times11\times10\times9}{5!} \times 4^5 \times \frac{5!}{52\times51\times50\times49\times48} = \frac{44\times40\times36}{51\times50\times49} = \frac{2112}{4165} \approx 0{,}5071$.

6. On fait une expérience aléatoire qui consiste a lancer une pièce équilibrée 3 fois. La variable aléatoire X compte le nombre de fois qu'on obtient «pile». Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart type σ_X de X.

$\surd$ *Les probabilités des valeurs de* X *sont* $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$ *et* $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$. *On a alors* $\mathbf{E}(X) = 0\mathbf{P}(X = 0) + 1\mathbf{P}(X = 1) + 2\mathbf{P}(X = 2) + 3\mathbf{P}(X = 3) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5000$. *La variance est* $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}((X - \frac{3}{2})^2) = (-\frac{3}{2})^2\frac{1}{8} + (-\frac{1}{2})^2\frac{3}{8} + (\frac{1}{2})^2\frac{3}{8} + (\frac{3}{2})^2\frac{1}{8} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$. *L'écart type* σ_X *est* $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$.

Fin.