Contrôle continu L2, Combinatoire lundi 31 octobre 2016
14h00-15h00

L'utilisation d'une calculatrice (ou de tout appareil électronique) est interdite. Le barème donnera des poids égaux à chacune des deux parties (la question bonus qui est hors barème).

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$».

On remarque que ces possibilités sont mutuellement exclusives, donc toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est forcément fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{3, 1, 0, 3\}$, $Y = \{1, 1, 0, 3, 0\}$
b. $X = \{\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$, $Y = \{\{0, 1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$.
c. $X = \mathcal{P}(\{1, 2\})$, $Y = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$
d. $X = \{\, 2n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$, $Y = \{\, 6n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$
e. $X = \emptyset$ (l'ensemble vide), $Y = \{\emptyset\}$.
f. $X = \{\, \{n, -n\} \mid n \in \mathbf{N} \,\}$, $Y = \{\, \{\, n \in \mathbf{Z} \mid n^2 = a^2 \,\} \mid a \in \mathbf{Z} \,\}$.
g. $X = [-1, 3]$, $Y = f(f^{-1}(X))$ (image directe de l'image réciproque de X) où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donné par $f(x) = x^4 + x^2$.
h. $X = [-1, 3]$, $Y = f^{-1}(f(X))$ (image réciproque de l'image directe de X) où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donné par $f(x) = x^4 + x^2$.

2. Dans cet exercice on construit, à partir de l'ensemble $\mathbf{N}$ et son opération d'addition, un ensemble Z qui modélise $\mathbf{Z}$, avec son opération d'addition ; c'est analogue à la «construction de $\mathbf{Q}$ à partir de $\mathbf{Z}$» vue en cours, mais plus simple. On utilisera, comme dans cette autre construction, une relation d'équivalence sur un produit cartésien. Ici on prend $P = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, et on considère la relation $\sim$ sur P définie par $(a, b) \sim (c, d) \equiv a + d = b + c$. (L'idée est que la classe du couple $(a, b) \in P$ va correspondre à $a - b \in \mathbf{Z}$, en observant qu'on a $a - b = c - d$ dans $\mathbf{Z}$ si et seulement si $a + d = b + c$ dans $\mathbf{N}$. Mais si cette idée motive notre construction, elle est inutile pour répondre aux questions.)

a. Montrer que la relation $\sim$ est réflexive et symétrique.
b. Montrer que la relation $\sim$ est transitive : si $(a, b) \sim (c, d)$ et $(c, d) \sim (e, f)$, alors $(a, b) \sim (e, f)$.

On a montré que $\sim$ est une relation d'équivalence sur P, ce qui nous autorise à former l'ensemble quotient $Z = P/\sim$, dont les éléments sont les classes d'équivalence de $\sim$. On notera $\overline{(a, b)}$ la classe de $\sim$ qui contient l'élément $(a, b) \in P$.

c. Faire un dessin d'une portion de P, où chaque élément (a, b) est le point du plan avec coordonnées (a, b), et indiquer quelles sont les classes de $\sim$.
d. On veut définir une opération d'addition $+ : Z \times Z \to Z$ qui vérifie $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$. Argumenter l'existence d'une telle opération (ce qui revient à montrer que la définition donnée ne dépend pas du choix des représentants).
e. (bonus) Montrer que pour toute paire $p, q \in Z$ il existe $x \in Z$ tel que $x + p = q$ (ceci en contraste avec l'addition dans $\mathbf{N}$, où par exemple l'équation $x + 5 = 3$ n'a pas de solution).

Fin.