

L'utilisation des calculatrices (ou de tout appareil électronique) est interdite. Toutefois si dans votre réponse vous obtenez une expression arithmétique difficile à évaluer sans calculatrice, vous pouvez donner cette expression comme réponse.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y . Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit : A : $X = Y$, B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$), C : $Y \subset X$, D : aucun des trois précédents, c'est-à-dire on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$.
 - a. $X = \{0, 1, 0, 2\}, Y = \{1, 1, 0, 2, 2\}$
 - b. $X = \{\{0, 1, 2\}, \{10, 11\}\}, Y = \{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{10, 11, 12, 13, 14\}\}$
 - c. $X = \{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ est impair}\}, Y = \{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ est un nombre premier}\}$.
 - d. $X = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin(x) = \frac{1}{2}\}, Y = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$
 - e. $X = \emptyset$ (l'ensemble vide), $Y = \mathcal{P}(\emptyset)$ (l'ensemble de ses parties)
 - f. $X = \{-3, 0, 2, 3, 7\}, Y = f^{-1}(f(X))$ (image réciproque de l'image directe de X) où $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ est donné par $f(x) = x^2$.
 - g. $X = \{-9, -5, 0, 1, 3, 4, 9\}, Y = f(f^{-1}(X))$ (image directe de l'image réciproque de X) où $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ est donné par $f(x) = x^2$.
 - h. $X = \{\{n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ est pair}\}, \{n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ est impair}\}\}, Y = \{\{k + 2n \mid n \in \mathbf{Z}\} \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

2. On pose $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ensemble des chiffres décimaux. La représentation décimale des nombres dans l'ensemble $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n < 10000\}$ associe à chaque $n \in S$ une suite $d(n) \in C^4$ de 4 chiffres (qui commencera avec des chiffres '0' si nécessaire ; par exemple $d(31) = (0, 0, 3, 1) \in C^4$).
 - a. Décrire une bijection entre S et l'ensemble $C^{\{1,2,3,4\}}$ des 10000 applications $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow C$ (une description informelle suffit ; on ne demande pas de démontrer qu'il s'agit d'une bijection).
 - b. Soit $P \subset S$ l'ensemble des nombres pour lesquels $d(n)$ contient 4 chiffres différents (par exemple $376 \in P$ car $d(376) = (0, 3, 7, 6)$, et ces 4 chiffres sont différents). Quel est le cardinal $\#P$ de cet ensemble ?
 - c. On définit sur P une relation ' \sim ' où $m \sim n$ veut dire que $d(m)$ et $d(n)$ contiennent les mêmes 4 chiffres, peut-être dans un ordre différent (par exemple $3618 \sim 8136$). On admet que cette relation est une relation d'équivalence. On fixe $n_0 \in P$ (prenez $n_0 = 3618$ pour être concret, mais ce choix n'a aucune importance), alors $\{m \in P \mid m \sim n_0\}$ est la classe d'équivalence de n_0 . Quel est le cardinal de cette classe ?
 - d. La relation ' \sim ' définit une partition de P en classes d'équivalence. Quel est le nombre de classes d'équivalences dans cette partition ?