Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 — mardi 5 novembre 2013, 14h-16h

1. Soit $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{Q})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 14 & 3 & -8 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbf{Q}$.

$\surd$ *Pour calculer le polynôme caractéristique χ_A, un calcul possible (parmi de nombreux autres) est*

$$\begin{vmatrix} X & 3 & 6 \\ -14 & X-3 & 8 \\ 7 & 3 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-7 & 0 & 7-X \\ -14 & X-3 & 8 \\ 7 & 3 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-7 & 0 & 0 \\ -14 & X-3 & -6 \\ 7 & 3 & X+6 \end{vmatrix}$$

$$= (X-7)\begin{vmatrix} X-3 & -6 \\ 3 & X+6 \end{vmatrix} = (X-7)\begin{vmatrix} X & X \\ 3 & X+6 \end{vmatrix} = X(X-7)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & X+6 \end{vmatrix} = X(X-7)(X+3).$$

Comme χ_A est scindé et à racines simples (0, 7, -3) sur $\mathbf{Q}$, la matrice A est diagonalisable.

b. Trouver $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{Q})$ tel que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

$\surd$ *Il suffit de trouver une matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres de A (alors $P^{-1}AP$ sera diagonale). Pour trouver des vecteurs propres pour $\lambda = 0, 7, -3$, il faut trouver des solutions non nulles pour les équations respectives $(A - \lambda I_3) \cdot v = 0$. On trouve par exemple $v = (1, -2, 1)$ pour $\lambda = 0$, $v = (0, -2, 1)$ pour $\lambda = 7$, et $v = (1, -1, 1)$ pour $\lambda = -3$. On trouve donc*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autres solutions existent, obtenues en multipliant les colonnes par des scalaires non nuls, et/ou en permutant les colonnes (si on avait pris les valeurs propres dans un autre ordre).

c. Donner une expression pour A^n, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *Il faut d'abord connaître la matrice P^{-1}, et la matrice diagonale $D = P^{-1}AP$ qui contient les valeurs propres:*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite en utilisant l'égalité $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & -x+z & -2x+2z \\ -2x+2y & 2x-z & 4x-2y-2z \\ x-y & -x+z & -2x+y+2z \end{pmatrix} \qquad \text{avec } x = 0^n,\ y = 7^n,\ z = (-3)^n.$$

C'est bien la matrice identité pour $n = 0$ (où $0^n = 1$), et pour $n > 0$ on a $0^n = 0$ et la matrice se simplifie :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & (-3)^n & 2 \times (-3)^n \\ 2 \times 7^n & -(-3)^n & -2 \times (7^n + (-3)^n) \\ -7^n & (-3)^n & 7^n + 2 \times (-3)^n \end{pmatrix} \qquad \text{pour } n > 0.$$

2. Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\lambda \in K$, et ϕ un endomorphisme de E. On pose $V = \operatorname{Ker}(\phi - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et $W = \operatorname{Im}(\phi - \lambda \operatorname{Id}_E)$ (des sous-espaces de E).

a. Que peut-on dire de V et de W si λ n'est pas valeur propre de ϕ ?

$\surd$ *Si λ n'est pas valeur propre, alors $\phi - \lambda \operatorname{Id}_E : E \to E$ est inversible, donc $V = \{0\}$ et $W = E$.*

b. Montrer rapidement qu'on a toujours $\dim(V) + \dim(W) = \dim(E)$.

$\surd$ *C'est ce qui dit le théorème du rang pour l'application linéaire $\phi - \lambda \operatorname{Id}_E : E \to E$.*

c. En déduire que $V + W = E$ si et seulement si la somme $V + W$ est directe.

$\surd$ *La somme est directe si et seulement si $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$ (théorème 1.3.3), ce qui veut dire en vue de la question précédente si et seulement si $\dim(V + W) = \dim(E)$, autrement dit (car E ne contient qu'un seul sous-espace de dimension $\dim(E)$) si $V + W = E$.*

d. Donner un exemple où $V + W \neq E$ (pour la simplicité vous pouvez prendre $\lambda = 0$).

$\surd$ *On cherche un exemple où V et W ne sont pas en somme directe, donc $V \cap W \neq \{0\}$. Le plus simple est de prendre $V = W \neq \{0\}$, ce qui demande que $\dim(E) = 2\dim(V)$; prenons $\dim(V) = 1$ et $\dim(E) = 2$, disons concrètement $E = K^2$ et $V = W = \operatorname{Vect}(\binom{1}{0})$. Une application avec $\operatorname{Ker}(\phi) = \operatorname{Im}(\phi) = \operatorname{Vect}(\binom{1}{0})$ est donné par ϕ dont la matrice dans la base canonique est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.*

e. Si λ est une valeur propre de ϕ, alors V est par définition l'espace propre correspondant. Si en plus ϕ est diagonalisable sur K, on peut aussi décrire W en termes des espaces propres de ϕ ; donner une telle description. [On pourra utiliser une base de vecteurs propres.]

$\surd$ *Sur une base de vecteurs propres, la matrice de ϕ est diagonale avec les valeurs propres comme coefficients diagonaux. La matrice de $\phi - \lambda \operatorname{Id}_E$ en est déduit par soustraction de λ de tous les coefficients diagonaux, ce qui rend nul les coefficients qui étaient λ, et non nul les autres. L'image d'une telle matrices diagonale est le sous-espace engendré par les vecteurs de la base dont la valeur propre n'est pas λ. Donc W est la somme (directe) de tous les espaces propres autres que V.*

f. Montrer que si ϕ est diagonalisable, alors $E = V \oplus W$.

$\surd$ *On sait que si ϕ est diagonalisable, alors E est la somme de tous les espaces propres. Comme W est la somme de tous ces espaces sauf V, on a en effet $E = V \oplus W$.*

g. Conclure que dans votre exemple de la question *d*, l'endomorphisme ϕ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *Dans l'exemple l'égalité $E = V \oplus W$ faisait doublement défaut : la somme n'est pas directe, et ne vaut pas E. Donc par la contraposée de la question précédente, ϕ ne peut pas être diagonalisable.*

3. Soit K l'un des corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ une matrice vérifiant $A^2 = I_n$.

a. Montrer que si $\lambda \in K$ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \{1, -1\}$.

$\surd$ *D'après la proposition 2.1.4 du cours, si A vérifie $A^2 - I_n = 0$, alors ses valeurs propres λ doivent vérifier $\lambda^2 - 1 = 0$, et donc $\lambda \in \{1, -1\}$. On peut aussi raisonner directement ; si v est un valeur propre de A, alors $v = A^2 \cdot v = A \cdot \lambda v = \lambda A \cdot v = \lambda^2 v$, et comme $v \neq 0$ on en déduit $\lambda^2 = 1$.*

b. Soit $V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{\, v \in K^n \mid A \cdot v = \lambda v \,\}$ pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = -1$, et soit $v \in K^n$ quelconque. Trouver une combinaison linéaire non triviale de v et de $A \cdot v$ qui est dans V_1 (quel que soit le vecteur v choisi), et une autre telle combinaison linéaire non triviale qui est de façon certaine dans V_{-1}.

$\surd$ *Une telle combinaison linéaire est de la forme $\mu v + \nu A \cdot v$, et si l'on applique l'équation qui définit V_1 à cette combinaison, on obtient $A \cdot (\mu v + \nu A \cdot v) = \mu v + \nu A \cdot v$ ce qui donne après évaluation et simplification $(\nu - \mu)v + (\mu - \nu)A \cdot v = 0$. Quel que soit le vecteur v cette équation est vérifié pour $\mu = \nu = 1$, et donc $v + A \cdot v \in V_1$ toujours. Pareillement on a $v - A \cdot v \in V_{-1}$ pour tout v.*

c. Montrer que $V_1 + V_{-1} = K^n$ [indication : écrire dans la situation de la question précédente v à son tour en termes des combinaisons linéaires trouvées.]

$\surd$ *On a $v = \frac{1}{2}(v + A \cdot v) + \frac{1}{2}(v - A \cdot v) \in V_1 + V_{-1}$. Comme le vecteur v était choisi librement, on a montré que $V_1 + V_{-1} = K^n$.*

d. Montrer que A est diagonalisable (sur K).

$\surd$ *La somme de V_1 et V_{-1} (qui sont des espaces propres, ou peut-être $\{0\}$) est toujours directe, donc la réunion d'une base de V_1 et une base de V_{-1} est une base de $V_1 \oplus V_{-1} = E$, constituée de vecteurs propres, ce qui montre que A est diagonalisable sur K.*

e. Si la valeur -1 *n'est pas* valeur propre de A, que peut-on dire de A ?

$\surd$ *Si -1 n'est pas valeur propre de A on a $V_{-1} = \{0\}$ et donc $V_1 = K^n$, autrement dit $A = I_n$.*

f. On suppose maintenant $n = 2$. Montrer qu'on est dans l'un des trois cas suivants: (1) $A = I_2$, (2) $A = -I_2$, (3) A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\surd$ *On vient de voire que le cas (1) se produit lorsque -1 n'est pas valeur propre. De façon similaire si 1 n'est pas valeur propre on a $A = -I_n$, le cas (2). Dans les cas restants la matrice A possède deux valeurs propres $1, -1$, et les conditions $\dim(V_1) \geq 1$ et $\dim(V_{-1}) \geq 1$ forcent, en vue de $\dim(V_1)+\dim(V_{-1}) = 2$ (question d), que $\dim(V_1) = \dim(V_{-1}) = 1$. Par rapport à une base formée d'un vecteur propre pour chacune des valeurs propres $1, -1$, l'endomorphisme correspondant à A aura donc la matrice diagonale mentionnée dans le cas (3), à laquelle A est alors semblable.*

g. Montrer que dans le cas (3) on peut écrire $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in K$ tels que $a^2 + bc = 1$. [On pourra calculer explicitement $P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec P une matrice inversible.]

$\surd$ *Si $P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ est inversible, son déterminant $d = ps - qr$ est non nul, et on a $P^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix}$ (par la formule de la comatrice transposée). En prenant pour P la matrice dont les colonnes respectives sont les vecteurs propres de A choisis dans la question précédente, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc*

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{d} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} ps + qr & -2pr \\ 2qs & -ps - qr \end{pmatrix},$$

ce qui est bien de la forme cherchée, avec $a = \frac{ps+qr}{d}$, $b = \frac{-2pr}{d}$, et $c = \frac{2qs}{d}$; pour ces valeurs on calcule qu'en effet $a^2 + bc = \frac{1}{d^2}((ps + qr)^2 - 4pqrs) = \frac{(ps-qr)^2}{d^2} = 1$. (On calcule également facilement que toute matrice A de cette forme vérifie $A^2 = I_2$, et comme $A \neq \pm I_2$ une telle matrice est bien dans le cas (3) de la question f. Mais l'argument dans cette direction n'était pas demandé.)

Fin.