**Examen Algèbre Linéaire (L2)** mardi 5 janvier 2021
8h15–11h15

L'utilisation de tout document ou appareil électronique est interdite. Tout résultat vu en cours ou en TD peut être cité et utilisé.
Barème indicatif : $5+5+3+7$

**1.** Soit $\phi$ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

*a.* Argumenter que $\phi$ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour $\phi$.
*b.* Exprimer $A^n$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

**2.** On considère des paires $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de suites de nombres réels $a_n$ et $b_n$, qui vérifient les relations de récurrence mutuelles $a_{n+2} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n + a_{n+1} + b_n$, valables pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ces relations déterminent une unique paire de suites si en plus on donne les termes initiaux $a_0, a_1$ de la première suite et le terme initial $b_0$ de la seconde suite.

*a.* Pour la paires de suites vérifiant ces relations et avec les termes initiaux $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, et $b_0 = 1$, calculer les termes $a_0, \dots, a_9$ ainsi que $b_0, \dots, b_8$.

On associe à chaque paire $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la récurrence la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs $v_n = (a_n, a_{n+1}, b_n) \in \mathbf{R}^3$.

*b.* Trouver une matrice $M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ tel que $v_{n+1} = M \cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
*c.* Trouver une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de $M$.
*d.* Donner des expressions pour les termes $a_n$ respectivement $b_n$ des suites de la question *a*, valables pour tout $n \in \mathbf{N}$. [On pourra utiliser *c*, sans avoir besoin de calculer $M^n$.]

**3.** Considérons dans $\mathbf{Q}[X]$ les polynômes $A = 2X^4 - X^3 - 12X^2 - 8X - 3$ et $B = 2X^3 - 5X^2 - 3X$.

*a.* Trouver le quotient $Q_1$ et de reste $R_1$ dans la division euclidienne de $A$ par $B$.
*b.* Calculer ensuite $D = \mathrm{pgcd}(A, B)$.
*c.* Trouver des coefficients de Bézout $S, T \in \mathbf{Q}[X]$ tels que $D = SA + TB$.

**4.** On considère l'endomorphisme $\phi$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $E = \mathbf{C}^4$ de matrice, par rapport à la base canonique,

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

*a.* En utilisant la forme triangulaire en blocs de $M$, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.
*b.* Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de $\chi_\phi$. Vous verrez que $\chi_\phi$ possède une racine simple, qu'on appellera $\lambda$, et une racine triple $\nu$.
*c.* Quelles sont les dimensions des sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de $\phi$ ?
*d.* Déterminer si $\phi$ est diagonalisable (de préférence en limitant au nécessaire les calculs).
*e.* Déterminer la valeur minimale $k$ pour laquelle $\widetilde{E}_\nu = \ker((\phi - \nu I)^k)$. En fonction de ce $k$, quel est le polynôme minimal $\mu_\phi$ de $\phi$ ?
*f.* Trouver une base $\mathcal{B}$, adaptée à la décomposition $E = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$, et telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit triangulaire supérieure.
*g.* Déterminer cette matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

**Fin.**