Examen Algèbre Linéaire (L2) vendredi 11 janvier 2018
9h–12h

La consultation du cours écrit, ainsi que de vos notes personnelles, est autorisée. L'utilisation d'une calculatrice, ou de tout autre appareil électronique, n'est pas autorisée.
Les exercices sont indépendants.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.
c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.
d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. En utilisant la forme triangulaire en blocs de M, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.
b. Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de χ_ϕ. Vous verrez que χ_ϕ possède une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.
c. Donner les dimensions des sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ, sans pour le moment calculer explicitement ces sous-espaces (dont la théorie dit que $\widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu = \mathbf{C}^4$).
d. Déterminer l'espace propre E_ν pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?
e. En considérant les dimensions $\dim(\ker((\phi - \nu I)^k))$ pour $k = 1, 2, 3$ (dont celle pour $k = 1$ est déjà déterminée dans la question précédente), déduire la multiplicité m de ν comme racine du polynôme minimal μ_ϕ, et donner ensuite explicitement μ_ϕ.
f. Vérifier en calculant $(M - \nu I)^m$ que son noyau est de dimension 3.
g. Décrire maintenant explicitement les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$.
h. Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

3. *a.* Dans $\mathbf{Z}$, calculer $\mathrm{pgcd}(10043, 3984)$.
b. Dans $\mathbf{Z}$, calculer $d = \mathrm{pgcd}(203, 144)$ et trouver $s, t \in \mathbf{Z}$ tels que $d = 203s + 144t$.
c. Dans $\mathbf{Q}[X]$, calculer $\mathrm{pgcd}(X^3 - 2X^2 + X - 2, 2X^3 + X^2 + 2X + 1)$.

4. Soit ϕ un endomorphisme d'un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel E, dont le polynôme caractéristique χ_ϕ et le polynôme minimal μ_ϕ sont tous deux égaux à $X^4 + X^3 - X^2 + 1 = (X + 1)(X^3 - X + 1)$.
a. Argumenter que $E = E_{-1} \oplus \ker(\phi^3 - \phi + I)$ où E_{-1} est le sous-espace propre pour $\lambda = -1$.
b. Trouver un polynôme P tel que $P[\phi]$ soit la projection sur E_{-1} parallèle à $\ker(\phi^3 - \phi + I)$.

Fin.