Corrigé Travaux dirigés 6L19 Géométrie, Feuille 6 2 avril 2009

1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et f une application $E \to E$. On appelle f une isométrie linéaire si $f \in \mathcal{L}(E)$ (c'est-à-dire f est linéaire) et pour toute paire de vecteurs $v, w \in E$ on a $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

a. Montrer que si f est une isométrie linéaire, alors $f(0) = 0$, et $\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$ pour tout $v, w \in E$.

$\surd$ *Toute application linéaire vérifie $f(0) = 0$. Or pour $v, w \in E$ on a*

$$\begin{aligned}\|f(v) - f(w)\|^2 &= \langle f(v) - f(w), f(v) - f(w)\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle - 2\langle f(v), f(w)\rangle + \langle f(w), f(w)\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v - w, v - w\rangle = \|v - w\|^2\end{aligned}$$

et donc $\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$.

b. Supposons réciproquement (seulement) que f vérifie $f(0) = 0$, et $\|f(v)-f(w)\| = \|v-w\|$ pour tout $v, w \in E$. Constater d'abord que f conserve alors la norme: $\|f(v)\| = \|v\|$. Développer ensuite $\|v - w\|^2$ et $\|f(v) - f(w)\|^2$, et en déduire que $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ pour tout $v, w \in E$. Pour conclure finalement que f est une isométrie linéaire, montrer que f est linéaire : pour tout $v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ on a $f(\lambda v+\mu w) = \lambda f(v)+\mu f(w)$ (calculer $\|f(\lambda v+\mu w)-\lambda f(v)-\mu f(w)\|^2$).

$\surd$ *On a $\|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$. Pour le point suivant on calcule $\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle = \langle v, v\rangle - 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$, et de manière similaire $\|f(v) - f(w)\|^2 = \|f(v)\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle + \|f(w)\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle + \|w\|^2$, et donc en identifiant les deux $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$. Pour la linéarité, on calcule suivant l'indication*

$$\begin{aligned}&\|f(\lambda v + \mu w) - \lambda f(v) - \mu f(w)\|^2 \\ &\quad= \|f(\lambda v + \mu w)\|^2 + \lambda^2\|f(v)\|^2 + \mu^2\|f(w)\|^2 \\ &\qquad- 2\lambda\langle f(\lambda v + \mu w), f(v)\rangle - 2\mu\langle f(\lambda v + \mu w), f(w)\rangle + 2\lambda\mu\langle f(v), f(w)\rangle \\ &\quad= \|\lambda v + \mu w\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 + \mu^2\|w\|^2 - 2\lambda\langle \lambda v + \mu w, v\rangle - 2\mu\langle \lambda v + \mu w, w\rangle + 2\lambda\mu\langle v, w\rangle = 0\end{aligned}$$

car la dernière expression est égal à $\|(\lambda v + \mu w) - \lambda v - \mu w\|^2 = \|0\|^2$. Donc on peut conclure que $f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire f est linéaire.

c. Montrer que si f est une isométrie linéaire, alors $f \in \mathbf{GL}(E)$, c'est-à-dire que l'application linéaire f est inversible (considérer l'image par f d'une base orthogonale).

$\surd$ *Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base orthogonale, donc $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ si $i \neq j$, et $\langle b_i, b_i\rangle \neq 0$ car $b_i \neq \vec{0}$. Pour les images on aura donc aussi $\langle f(b_i), f(b_j)\rangle = 0$ si $i \neq j$, et $\langle f(b_i), f(b_i)\rangle \neq 0$, ce qui prouve que les images $f(b_i)$ sont non nuls. Pour montrer que la famille $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$ est libre, considérons une relation $c_1 f(b_1) + \cdots + c_n f(b_n) = \vec{0}$; en prenant le produit scalaire avec un vecteur $f(b_i)$, tous les termes sauf $c_i f(b_i)$ sont nuls à cause de $\langle f(b_i), f(b_j)\rangle = 0$ pour $i \neq j$, et il reste $c_i f(b_i) = \vec{0}$, ce qui donne $c_i = 0$ car $f(b_i) \neq \vec{0}$. Ainsi chaque coefficient de la relation doit être nul, et la famille $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$ est libre. Comme en plus c'est une famille de n membres dans un espace de dimension n, c'est une base, et comme f envoie une base sur une base, il est inversible.*

d. On suppose ici seulement $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si l'on fixe $w \in E$, alors l'application $E \to \mathbf{R}$ définie par $v \mapsto \langle f(v), w\rangle$ est linéaire (elle appartient donc à $\mathcal{L}(E, \mathbf{R}) = E^*$). En utilisant une base orthonormale, en déduire qu'il existe un vecteur w' unique tel que cette application s'écrive $v \mapsto \langle v, w'\rangle$, c'est-à-dire tel que $\langle f(v), w\rangle = \langle v, w'\rangle$ pour tout $v \in E$. Montrer finalement qu'en faisant correspondre w' à w, et en faisant varier w dans E, on définit une application $E \to E$: $w \mapsto w'$ qui est linéaire. Cette application est notée $f^* \in \mathcal{L}(E)$ et appelée l'endomorphisme *adjoint* de f dans l'espace euclidien E, caractérisé par $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$ pour tout $v, w \in E$.

$\surd$ *Fixant $w \in E$, on a pour $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$: $\langle f(\lambda u + \mu v), w\rangle = \langle \lambda f(u) + \mu f(v), w\rangle = \lambda\langle f(u), w\rangle + \mu\langle f(v), w\rangle$ et $v \mapsto \langle f(v), w\rangle$ est linéaire. L'application $E \to E^*$: $w' \mapsto (v \mapsto \langle v, w'\rangle)$ est injective (car la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non dégénérée), et comme $\dim E^* = n = \dim E$ elle est donc aussi surjective, ce qui implique en particulier l'existence de $w' \in E$ tel que $v \mapsto \langle f(v), w\rangle$ coïncide avec $v \mapsto \langle v, w'\rangle$, c'est-à-dire que $\langle f(v), w\rangle = \langle v, w'\rangle$ pour tout $v \in E$. Concrètement, si sur une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E l'application $E \to \mathbf{R}$: $v \mapsto \langle f(v), w\rangle$ est donnée par la matrice $(a_1 \ \cdots \ a_n)$ à 1 ligne, alors les coefficients de w' sur $\mathcal{B}$ sont les mêmes que ceux de la matrice: $w' = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}}$. On peut alors définir f^* : $E \to E$ par $f^*(w) = w'$ avec w' comme ci-dessus, c'est-à-dire tel que $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$ pour tout $v, w \in E$. Alors $\langle v, f^*(\lambda u + \mu w)\rangle = \langle f(v), \lambda u + \mu w\rangle = \lambda\langle f(v), u\rangle + \mu\langle f(v), w\rangle = \lambda\langle v, f^*(u)\rangle + \mu\langle v, f^*(w)\rangle = \langle v, \lambda f^*(u) + \mu f^*(w)\rangle$, et on a donc $f^*(\lambda u + \mu w) = \lambda f^*(u) + \mu f^*(w)$, et f^* est linéaire, c'est-à-dire $f^* \in \mathcal{L}(E)$.*

e. Vérifier que, exprimées dans une base *orthonormée*, les matrices de f et de f^* sont transposées.

$\surd$ *Si A est la matrice de $f \in \operatorname{End} E$ sur un base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E, alors $f(b_j) = (A_{1,j}, \ldots, A_{n,j})_B$; si en plus $\mathcal{B}$ est orthonormée, le coefficient numéro i s'extrait de ce vecteur comme $A_{i,j} = \langle b_i, f(b_j)\rangle$. Alors la matrice B de f^* vérifie de façon similaire $B_{i,j} = \langle b_i, f^*(b_j)\rangle = \langle f(b_i), b_j\rangle = A_{j,i}$, et on voit que B est la transposée de A.*

f. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie linéaire si et seulement si $f^* \circ f = I_E$.

$\surd$ *Si $f^* \circ f = I_E$ alors $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, f^*(f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ pour $v, w \in E$. Réciproquement si f est une isométrie linéaire on a $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, f^*(f(w))\rangle$ pour tout $v, w \in E$, ce qui implique $w = f^*(f(w)$ car le produit scalaire est non dégénéré, et donc $f^* \circ f = I_E$.*

g. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans une base orthonormée. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes.

(i) f est une isométrie linéaire.
(ii) f est inversible et $f^{-1} = f^*$.
(iii) $M \cdot {}^{\mathrm{t}}M = I_n$.
(iv) ${}^{\mathrm{t}}M \cdot M = I_n$.
(v) Les colonnes de M forment un base orthonormée dans $\mathbf{R}^n$.
(vi) Les lignes de M forment un base orthonormée dans $\mathbf{R}^n$.

$\surd$ *On a vu que (i) si et seulement si $f^* \circ f = I_E$, ce qui dit que f est inversible avec inverse f^*, donc (i) est équivalent à (ii). On a aussi vu que dans ce cas la matrice de f^* est $\mathrm{t}M$, et $f^* \circ f = I_E = f \circ f^*$ s'exprime matriciellement comme ${}^{\mathrm{t}}M \cdot M = I_n = M \cdot {}^{\mathrm{t}}M = I_n$, c'est-à-dire par (iv) et (iii), conditions qui sont équivalentes (car chacune implique ${}^{\mathrm{t}}M = M^{-1}$). En évaluant les produits matriciels, (iv) donne (v) et (iii) donne (vi).*

h. On note $\mathbf{O}(E)$ l'ensemble des isométries linéaires de E, dit le groupe orthogonal de E. Montrer que $\mathbf{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$, et que $g \mapsto \det(g)$ définit un homomorphisme de groupes $\mathbf{O}(E)$ vers le groupe multiplicatif $\{+1, -1\}$, qui est surjectif si $\dim E \neq 0$. On définit $\mathbf{SO}(E) = \{\, a \in \mathbf{O}(E) \mid \det(g) = 1 \,\}$, le groupe spécial orthogonal, et on note $\mathbf{O}^-(E) = \mathbf{O}(E) \setminus \mathbf{SO}(E)$. Pour $E = \mathbf{R}^n$, muni de la structure euclidienne usuelle, on note pour $\mathbf{O}(E)$, $\mathbf{SO}(E)$, et $\mathbf{O}^-(E)$ respectivement $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, et $\mathbf{O}^-(n)$.

$\surd$ *On sait que $g \mapsto \det(g)$ définit un homomorphisme de groupes $\mathbf{GL}(E) \to \mathbf{R}^*$. On peut calculer le déterminant à l'aide de matrices sur n'importe quel base, en particulier sur une base orthonormée ; la seule chose à démontrer est que restreint à $\mathbf{O}(E)$ les valeurs $\det M$ de cet homomorphisme sont contenues dans $\{+1, -1\}$ et que les deux possibilités sont réalisées quand $\dim E \neq 0$. Le premier point découle de $1 = \det I_n = \det(M \cdot {}^{\mathrm{t}}M) = \det M \det({}^{\mathrm{t}}M) = \det(M)^2$. Le second point vient en observant que toute matrice diagonale avec coefficients diagonaux dans $\{+1, -1\}$ est orthogonale, et que son déterminant est le produit de ces coefficients diagonaux.*

i. Montrer que

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}(1) &= \{(1), (-1)\} \subseteq \mathbf{GL}(1, \mathbf{R}),\\
\mathbf{SO}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{R}) \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}\\
\mathbf{O}^-(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{R}) \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}
\end{aligned}$$

$\surd$ *Pour une matrice 1×1 $M = (a)$ l'équation $M \cdot {}^{\mathrm{t}}M = I_1$ donne $a^2 = 1$, d'où la description de $\mathbf{O}(1)$. Pour une matrice de $\mathbf{O}(2)$ la première colonne doit être unitaire, donc de la forme $\binom{a}{b}$ avec $a^2 + b^2 = 1$; pour être orthogonal la deuxième colonne doit être de la forme de la forme $\lambda\binom{-b}{a}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$, et le déterminant sera alors λ. Or on vérifie que pour $\lambda \in \{+1, -1\}$ ces matrices sont effectivement dans $\mathbf{O}(2)$, d'où les descriptions données.*

j. Montrer que si $\dim E = 2$ alors $\mathbf{SO}(E)$ est abélien, mais $\mathbf{O}(E)$ n'est pas abélien, et que pour tout $\rho \in \mathbf{SO}(E)$ et $\sigma \in \mathbf{O}^-(E)$ on a $\sigma^2 = I$ et $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$.

$\surd$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -bc - ad \\ bc + ad & -ac + bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ba - ab \\ ab - ba & b^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2 + b^2)c & (b^2 + a^2)d \\ (-a^2 - b^2)d & (b^2 + a^2)c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}$$

k. Application. Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. On choisit une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}$ (qui n'a pas de rapport avec la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$). Soit $\pi : \mathbf{R}^3 \to \mathcal{P}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$. On pose $\pi(e_i) = (x_i, y_i)_{\mathcal{B}}$ pour $i = 1, 2, 3$. Montrer que ces coordonnées vérifient les relations $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, et $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. En conséquence, si l'on dessine trois vecteurs dans le plan, il faut que leurs coordonnées vérifient ces conditions pour qu'on puisse affirmer qu'il s'agit d'une projection *orthogonale* de $\mathcal{E}$ (dans la pratique les illustrations de $\mathbf{R}^3$ satisfont rarement à ces conditions).

$\surd$ *On peut étendre $\mathcal{B}$ à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E, en rajoutant un vecteur unitaire b_3 de $\mathcal{P}^\perp$ à la fin. Alors avec $z_i = \langle e_i, b_3 \rangle$ on a $e_i = (x_i, y_i, z_i)_{\mathcal{B}'}$ pour $i = 1, 2, 3$ (car la projection π est donnée par $\pi : (x, y, z)_{\mathcal{B}'} \mapsto (x, y)_{\mathcal{B}}$), et*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(3).$$

Les relations demandées sont simplement celles de g(vi) pour les deux premières lignes de cette matrice. On observera que le fait que (e_1, e_2, e_3) est orthonormale correspond plus directement aux conditions g(v), mais celles-ci ne donnent pas des conditions sur les images $\pi(e_i)$.