Contrôle continu 6L19 : Géométrie 5 mars 2008

9h00–11h00

Les documents et calculatrices sont **interdits**

Dans les deux questions, $\mathcal{A}$ désigne un espace affine de direction E, qui est un espace vectoriel sur un corps commutatif K.

Pour le reste, les deux questions sont indépendantes

Barème indicatif : question 1 : 14 points ; question 2 : 6 points.

1. Dans un des TD on a établi le théorème de Ceva sous la forme suivante: si A, B, C est une triangle dans un espace affine $\mathcal{A}$, et $P \in \mathcal{A}$ un autre point tel que les droites $\mathcal{D}_{A,P}$, $\mathcal{D}_{B,P}$ et $\mathcal{D}_{C,P}$ coupent chacune le côté opposé du triangle, disons $\mathcal{D}_{A,P} \cap \mathcal{D}_{B,C} = \{a\}$, $\mathcal{D}_{B,P} \cap \mathcal{D}_{A,C} = \{b\}$ et $\mathcal{D}_{C,P} \cap \mathcal{D}_{A,B} = \{c\}$, et si $\{a, b, c\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$, alors le produit des rapports $\overrightarrow{Ba}/\overrightarrow{aC}$, $\overrightarrow{Cb}/\overrightarrow{bA}$, et $\overrightarrow{Ac}/\overrightarrow{cB}$, est 1.

On propose ici de démontrer, par un calcul en coordonnées, une version un peu plus précise du même théorème. Soit donc $\mathcal{A}$ un plan affine, et $\mathcal{S} = (A, B, C)$ trois points non alignés de $\mathcal{A}$, dont on se servira comme repère affine. Toute droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$ peut être décrite (de façon non unique) comme $\mathcal{D} = \{\, (x, y, z)_\mathcal{S} \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \,\}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in K$, pas tous égaux ; on utilisera la notation $\mathcal{D} = [\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ pour cette droite. Soit alors $\mathcal{D}_1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_\mathcal{S}$, $\mathcal{D}_2 = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_\mathcal{S}$, et $\mathcal{D}_3 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_\mathcal{S}$ trois droites affines, dont on suppose qu'aucune des $\mathcal{D}_i$ n'est parallèle à $\mathcal{D}_{A,B}$, ni à $\mathcal{D}_{B,C}$ ni à $\mathcal{D}_{A,C}$. Il existe alors des points $a, b, c \in \mathcal{A}$ tels que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_{B,C} = \{a\}$, $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_{A,C} = \{b\}$ et $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_{A,B} = \{c\}$. La version du théorème de Ceva considéré s'énonce ainsi: Si $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_2$ et $C \in \mathcal{D}_3$, alors $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{Ba}}{\overrightarrow{aC}} \times \frac{\overrightarrow{Cb}}{\overrightarrow{bA}} \times \frac{\overrightarrow{Ac}}{\overrightarrow{cB}} = 1. \tag{1}$$

a. Exprimer les conditions $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_2$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{D}_3$ en termes des paramètres $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (pour $i = 1, 2, 3$). On supposera désormais que ces conditions sont satisfaites.

b. Donner une équation qui exprime la condition que $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes ou parallèles en termes de ces paramètres.

c. Calculer les coordonnées barycentriques des points a, b, c.

d. Exprimer finalement l'équation (1) en termes des paramètres, et montrer qu'elle est équivalente à la condition trouvée dans le point b ci-dessus.

2. Soit $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ deux hyperplans de $\mathcal{A}$, et $\overrightarrow{\mathcal{D}} \subset E$ une droite vectorielle (un sous-espace vectoriel de dimension 1) qui n'est contenue ni dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{H}_1}$ de $\mathcal{H}_1$, ni dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{H}_2}$ de $\mathcal{H}_2$.

a. Montrer que pour tout point $A \in \mathcal{H}_1$ il existe un point unique $A' \in (A + \overrightarrow{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{H}_2$, et que l'application $f : A \mapsto A'$ ainsi définie est une bijection $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$.

b. Soit A, B, C, D quatre points distincts de $\mathcal{H}_1$. On pose $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, et $D' = f(D)$. Montrer que les droites $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ dans $\mathcal{H}_1$ se coupent si et seulement si les droites $\mathcal{D}_{A',B'}$ et $\mathcal{D}_{C',D'}$ dans $\mathcal{H}_2$ se coupent.

Fin.