

1. On considère l'équation suivante pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$:

$$\frac{z - 2}{-1 + 3\sqrt{3}\mathbf{i}} = \frac{3 + \sqrt{3}\mathbf{i}}{4z}. \quad (E)$$

a. Donner une équation de degré 2 en z équivalente à l'équation donnée.

✓ Multiplication croisée donne $z(z - 2) = (-1 + 3\sqrt{3}\mathbf{i})(3 + \sqrt{3}\mathbf{i}) = -12 + 8\sqrt{3}\mathbf{i}$, donc pour équation de degré 2 on trouve $4z^2 - 8z + 12 - 8\sqrt{3}\mathbf{i} = 0$, ou après division par 4 : $z^2 - 2z + 3 - 2\sqrt{3}\mathbf{i} = 0$. On voit que $z = 0$ n'est pas solution des cette équation, donc la multiplication croisée n'a pas introduit de fausses solutions ; l'équation est équivalent à celle du départ.

b. Donner le discriminant de cette équation, et l'écrire sous forme trigonométrique.

✓ Le discriminant de la dernière équation est $(-2)^2 - 4 \times (3 - 2\sqrt{3}\mathbf{i}) = -8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i} = 16(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i})$, dont la forme trigonométrique est $16e^{\frac{2\pi}{3}}$. Pour la forme avant division par 4 le discriminant est 16 fois plus grand : $256e^{\frac{2\pi}{3}}$.

c. Trouver toutes les solutions de l'équation (E) (écrire ces solutions sous forme algébrique).

✓ Un nombre complexe dont le carré est égal au discriminant est $d = 4e^{\frac{\pi}{3}} = 2 + 2\sqrt{3}\mathbf{i}$. Alors les solutions de l'équation sont $z = \frac{2+d}{2}$ et $z = \frac{2-d}{2}$, soit $z = 2 + \sqrt{3}\mathbf{i}$ et $z = -\sqrt{3}\mathbf{i}$.

2. Calculer les intégrales suivantes.

a.
$$\int_0^{20} xe^{x/2} dx$$

✓ $\int_0^{20} xe^{x/2} dx = [2xe^{x/2}]_{x=0}^{x=20} - \int_0^{20} 2e^{x/2} dx = 40e^{10} - [4e^{x/2}]_{x=0}^{x=20} = 40e^{10} - 4e^{10} + 4e^0 = 36e^{10} + 4$.

b.
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2x)}{2 + \cos(x)} dx$$

(On pourra appliquer une formule trigonométrique, et ensuite un changement de variable.)

✓ $\int_0^{\pi} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2 + \cos(x)} dx = -2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{2 + \cos(x)} d\cos(x) = -2 \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \frac{u}{2+u} du = +2 \int_{-1}^1 (1 - \frac{2}{2+u}) du = 2[u]_{u=-1}^{u=1} - 4[\ln(u+2)]_{u=-1}^{u=1} = 4 - 4\ln(3)$.

3. Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5x}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

a. Décomposer l'expression pour $f(x)$ en éléments simples (sur \mathbf{R}).

✓ Division euclidienne de $3x^3 + 2x^2 + 5x$ par $(x^2 + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1$ donne quotient 3 et reste $5x^2 + 2x + 3$, d'où on sépare la partie entière $\frac{3x^3 + 2x^2 + 5x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = 3 + \frac{5x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)(x - 1)}$. Pour décomposer le second terme en éléments simples, on observe que le facteur $x^2 + 1$ est irréductible sur \mathbf{R} , d'où la forme a priori est $\frac{5x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{x - 1} = \frac{(ax + b)(x - 1) + c(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)}$. Pour résoudre l'égalité entre polynômes $(ax + b)(x - 1) + c(x^2 + 1) = 5x^2 + 2x + 3$ on peut prendre la valeur en $x = 1$ pour trouver directement $c = \frac{10}{2} = 5$. On pourra trouver les valeurs restantes a, b de diverses façons, simplement en utilisant les équations qui découlent de l'égalité de polynômes, ou (ce qui est presque la même chose) en écrivant $ax + b = \frac{(5x^2 + 2x + 3) - c(x^2 + 1)}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$ donc $a = 0$ et $b = 2$, ou finalement en prenant la valeur en $x = \mathbf{i}$: $(a\mathbf{i} + b)(-1 + \mathbf{i}) = 5\mathbf{i}^2 + 2\mathbf{i} + 3 = -2 + 2\mathbf{i}$ donnant la même solution (pour une astuce, cette dernière méthode a le désavantage d'être plus difficile qu'une approche directe, et de donner beaucoup d'occasions pour des erreurs de calcul, et cela malgré le fait que $x = \mathbf{i}$ est l'une des valeurs complexes les plus simples pour une évaluation). En tout cas la décomposition en éléments simples demandée est

$$\frac{3x^3 + 2x^2 + 5x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = 3 + \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{5}{x - 1}.$$

b. Utiliser cette décomposition pour trouver une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

✓ $\int^x (3 + \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{5}{x - 1}) dx = 3x + 2\arctan(x) + 5\ln(x - 1) + C$, donc une primitive de f est par exemple $3x + 2\arctan(x) + 5\ln(x - 1)$.

4. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$f''(t) + 2f'(t) - 15f(t) = 30t - 19, \quad (L)$$

ou avec les abréviations habituelles $y'' + 2y' - 15y = 30t - 19$.

- a. Donner l'équation linéaire homogène associée à cette équation, et trouver toutes ses solutions.
- √ L'équation linéaire homogène est $y'' + 2y' - 15y = 0$. Les solutions de l'équation quadratique associée $x^2 + 2x - 15 = 0$ sont $x = 3$ et $x = -5$; il s'ensuit que les solutions de l'équation linéaire homogène sont les fonctions $f(t) = ce^{3t} + de^{-5t}$ pour c, d des constantes réelles.
- b. Trouver une solution particulière de l'équation non homogène (L) (il en existe une qui est une fonction polynomiale).
- √ En substituant une fonction polynomiale de t pour y , la valeur de $y'' + 2y' - 15y$ sera une fonction polynomiale du même degré, donc il conviendra d'essayer $y = at + b$. On aura alors $y'' + 2y' - 15y = 2a - 15(at + b) = -15at + 2a - 15b$; en identifiant les coefficients, on trouve qu'il faut que $-15a = 30$ et $2a - 15b = -19$, ce qui sera le cas si $a = -2$ et $b = 1$, donc la solution particulière cherchée est donnée par $f(t) = -2t + 1$.
- c. Donner la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui vérifie l'équation différentielle (L) ainsi que les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
- √ D'après les points précédents, la solution est de la forme $f(t) = -2t + 1 + ce^{3t} + de^{-5t}$ avec $c, d \in \mathbf{R}$. Les équations $f(0) = f'(0) = 0$ donnent $1 + c + d = 0$ et $-2 + 3c - 5d = 0$, qui ont pour solution $c = -\frac{3}{8}$, $d = -\frac{5}{8}$, donc la fonction demandée est définie par $f(t) = -2t + 1 - \frac{3}{8}e^{3t} - \frac{5}{8}e^{-5t}$.