Corrigé Contrôle continu 1L01, Mathématiques, SVG mercredi 14 novembre 2007
14h00–15h30

1. Soit $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \arccos(\sin(x))$ pour $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

a. Calculer $f(-\frac{\pi}{3})$.

$\surd$ *On a* $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$*, d'où* $f(-\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{6}$

b. Résourdre l'équation $f(x) = 0$

$\surd$ *Il faut que* $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ *et que* $\arccos(\sin(x)) = 0$*, ce qui veut dire que* $\sin(x) = \cos(0) = 1$ *; l'unique valeur qui vérifie les deux conditions est* $x = \frac{\pi}{2}$.

c. Résourdre l'équation $f(x) = x$

$\surd$ *Il faut que* $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ *et que* $\arccos(\sin(x)) = x$*, ce qui veut dire que* $\sin(x) = \cos(x)$ *; l'unique valeur qui vérifie les deux conditions est* $x = \frac{\pi}{4}$.

d. Calculer $f'(x)$ pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$\surd$ $f'(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-(\sin(x))^2}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{-\cos(x)} = -1$*, où on a utilisé que* $\sqrt{1-(\sin(x))^2} = \cos(x)$ *pour* $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$*, car* $\cos(x) \ge 0$ *sur cet intervalle.*

e. Utiliser le point précédent pour donner une expression simplifiée pour $f(x)$.

$\surd$ *La dérivée étant constante, on doit avoir* $f(x) = -x + c$*, et la constante* c *peut être peut être déduit d'une valeur particulière de* f*; d'après l'un des trois premiers points on a* $c = \frac{\pi}{2}$ *et on peut écrire* $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$.

f. Donner un explication pour cette expression simplifiée sans utiliser le calcul de $f'(x)$, mais juste les formules connues de la trigonométrie.

$\surd$ *Par définition de 'arccos', la valeur* $y = f(x)$ *est l'unique valeur telle que* $0 \le y \le \pi$ *ainsi que* $\cos(y) = \sin(x)$*. Or* $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$*, et pour* $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ *on a également* $0 \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi$*, donc il est clair que la valeur cherchée est* $y = \frac{\pi}{2} - x$.

2. Soit $P(X) = X^4 - 2X^3 + 9X^2 - 8X + 20$, un polynôme dans $\mathbf{R}[X]$, qui peut donc aussi être considéré comme élément de $\mathbf{C}[X]$.

a. Vérifier que (en tant qu'élément de $\mathbf{C}[X]$) le polynôme $P(X)$ admet le nombre $2\mathbf{i}$ comme racine.

$\surd$ *On a* $P(2\mathbf{i}) = (2\mathbf{i})^4 - 8 \times (2\mathbf{i})^3 + 9 \times (2\mathbf{i})^2 - 8 \times 2\mathbf{i} + 20 = 16 - 2 \times (-8\mathbf{i}) + 9 \times (-4) - 8 \times 2\mathbf{i} + 20 = 16 - 36 + 20 + (16 - 16)\mathbf{i} = 0$.

b. Argumenter sans calcul supplémentaire que $-2\mathbf{i}$ est aussi une racine complexe de $P(X)$.

$\surd$ *Les coefficients de* $P(X)$ *étant tous réels, on a* $P(-2\mathbf{i}) = P(\overline{2\mathbf{i}}) = \overline{P(2\mathbf{i})} = \overline{0} = 0$.

c. Déterminer la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbf{C}[X]$.

$\surd$ *D'après les point précédents, on connaît déjà les facteurs irréductibles* $(X - 2\mathbf{i})$ *et* $(X + 2\mathbf{i})$ *de* $P(X)$*. La division de* $P(X)$ *par* $(X - 2\mathbf{i})(X + 2\mathbf{i}) = X^2 + 4$ *donne comme quotient* $Q = X^2 - 2X + 5$*. Ce dernier polynôme quadratique a un discriminant* $2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$ *qui est négatif, avec comme racines carrées complexes* $4\mathbf{i}$ *et* $-4\mathbf{i}$*. Les racines complexes de* Q *sont alors* $\frac{+2+4\mathbf{i}}{2} = 1 + 2\mathbf{i}$ *et* $\frac{+2-4\mathbf{i}}{2} = 1 - 2\mathbf{i}$*, et la factorisation de* $P(X)$ *dans* $\mathbf{C}[X]$ *est*

$$P(X) = (X - 2\mathbf{i})(X + 2\mathbf{i})(X - 1 - 2\mathbf{i})(X - 1 + 2\mathbf{i}).$$

d. Quelles sont les racines réelles de $P(X)$?

$\surd$ *D'après le point précédent* $P(X)$ *ne possède aucune racine réelle.*

e. Déterminer la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbf{R}[X]$.

$\surd$ *On a deux pairs de racines complexes conjuguées, donnant respectivement* $(X - 2\mathbf{i})(X + 2\mathbf{i}) = X^2 + 4$ *et* $(X - 1 - 2\mathbf{i})(X - 1 + 2\mathbf{i}) = X^2 - 2X + 5$ *comme facteurs réels, donc la factorisation de* $P(X)$ *dans* $\mathbf{R}[X]$ *est*

$$P(X) = (X^2 + 4)(X^2 - 2X + 5).$$

3. Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$ pour chacune des fractions rationnelles suivantes.

a. $\dfrac{3X+1}{(X-2)(X+3)}$

$\surd$ *La forme a priori de la décomposition est* $\frac{a}{(X-2)} + \frac{b}{(X+3)}$. *On cherche donc des nombres* $a, b \in \mathbf{R}$ *tels que* $a(X+3) + b(X-2) = 3X+1$ *soit une identité entre polynômes en* X. *Les substitutions* $X := 2$ *et* $X := -3$ *mènent directement à la solution* $a = \frac{7}{5}$ *et* $b = \frac{8}{5}$, *donc la décomposition cherchée est*

$$\frac{3X+1}{(X-2)(X+3)} = \frac{7/5}{(X-2)} + \frac{8/5}{(X+3)}.$$

b. $\dfrac{3X^4 - X + 1}{X^2 - 3X + 4}$

$\surd$ *Ici le dénominateur est un polynôme quadratique dont le discriminant* $(-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$ *est négatif, et qui est donc irréductible dans* $\mathbf{R}(X)$. *Ainsi la décomposition en éléments simples dans* $\mathbf{R}(X)$ *sera complète dès qu'on aura séparé la partie entiere, trouvée par division euclidienne de* $3X^4 - X + 1$ *par* $X^2 - 3X + 4$. *On trouve*

$$\frac{3X^4 - X + 1}{X^2 - 3X + 4} = 3X^2 + 9X + 15 + \frac{38X - 59}{X^2 - 3X + 4}.$$

c. $\dfrac{5X^2 - 4X + 8}{X^3 - 1}$

$\surd$ *Ici les racines complexes du dénominateur sont bien connues :* $\{1, \mathbf{j}, \mathbf{j}^2\}$ *où* $\mathbf{j} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} = \exp(\frac{2\pi}{2}\mathbf{i})$ *et* $\mathbf{j}^2$ *(qui est son conjugué complexe) ne sont pas dans* $\mathbf{R}$*; alors la décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles dans* $\mathbf{R}[X]$ *est* $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$. *La forme a priori de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle est donc* $\frac{a}{(X-1)} + \frac{bX+c}{(X^2+X+1)}$. *On cherche donc des nombres* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *tels que* $a(X^2 + X + 1) + (bX + c)(X-1) = 5X^2 - 4X + 8$ *soit une identité entre polynômes en* X. *La substitution* $X := 1$ *mène directement à* $a = 3$ *et il reste* $(bX + c)(X-1) = 5X^2 - 4X + 8 - 3(X^2 + X + 1) = 2X^2 - 7X + 5$ *qui est une identité de polynômes pour* $b = 2$ *et* $c = -5$. *La décomposition cherchée est donc*

$$\frac{5X^2 - 4X + 8}{X^3 - 1} = \frac{3}{(X-1)} + \frac{2X-5}{(X^2 + X + 1)}.$$

d. $\dfrac{2X^2 - 7X}{(X-1)^3}$

$\surd$ *Ici le dénominateur est déjà écrit comme une puissance d'un poynôme iréductible. La forme a priori de la décomposition en éléments simples est* $\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3}$. *On cherche donc des nombres* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *tels que* $a(X-1)^2 + b(X-1) + c = 2X^2 - 7X$ *soit une identité entre polynômes en* X. *On peut remarquer que ceci est la question de trouver le polynôme de Taylor de* $2X^2 - 7X$ *en* $X = 1$, *ou bien on peut substituer* $X := 1$ *pour trouver* $c = -5$ *et ensuite chercher* a, b *tels que* $a(X-1) + b = (2X^2 - 7X - c)/(X-1) = 2X - 5$, *ou bien appliquer d'autres méthodes encore ; en tout cas on trouve* $c = -5$, $b = -3$, $a = 2$, *donc la décomposition cherchée est*

$$\frac{2X^2 - 7X}{(X-1)^3} = \frac{2}{X-1} + \frac{-3}{(X-1)^2} + \frac{-5}{(X-1)^3}.$$

Fin.