

1. Calculer sous forme trigonométrique, puis exprimer sous forme algébrique : $(-\sqrt{3} - i)^7$.

✓ On a $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ et $\arg(\sqrt{3} - i) = \arg(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\frac{5\pi}{6}$. Alors $(-\sqrt{3} - i)^7 = 2^7 e^{7 \times -\frac{5\pi}{6}i} = 128 e^{-\frac{35\pi}{6}i} = 128 e^{\frac{\pi}{6}i}$ car $-\frac{35\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$. Or $e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, donc l'expression algébrique du résultat est $(-\sqrt{3} - i)^7 = 64\sqrt{3} + 64i$.

2. Calculer sous forme trigonométrique :

$$\frac{(\sqrt{3} - i)^5 (-1 + i)^{11}}{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{91}}$$

✓ En utilisant les modules $|\sqrt{3} - i| = 2$, $|-1 + i| = \sqrt{2}$, et $|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$, on trouve pour le module du résultat $\frac{2^5 \times (\sqrt{2})^{11}}{1^{91}} = 2^{10} \sqrt{2} = 1024\sqrt{2}$. Les arguments sont $\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{12}$, $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{12}$, et $\arg(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{12}$, d'où on trouve pour l'argument du résultat (modulo 2π) : $5 \times -\frac{2\pi}{12} + 11 \times \frac{9\pi}{12} - 91 \times \frac{8\pi}{12}$, ce qui donne, après addition/soustraction de multiples de $\frac{24\pi}{12}$, l'argument $\frac{+14\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} - \frac{8\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$. Le résultat sous forme trigonométrique est donc

$$1024\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Même si ce n'était pas demandé, on peut remarquer que la forme algébrique est $-1024 + 1024i$. D'ailleurs, on aura pu simplifier l'expression avant le calcul, en remarquant que $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ vérifie $z^3 = 1$ (z est le nombre complexe souvent désigné par j^2 , qui comme 1 et j est racine troisième de 1), donc l'exposant 91 dans le dénominateur peut être remplacé par son reste 1 après division par 3, simplifiant le calcul.

3. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a.
$$\frac{z - 1 - i}{z + 2i} = \frac{z - 3}{z + 1 - i}$$

✓ L'équation implique $(z - 1 - i)(z + 1 - i) = (z + 2i)(z - 3)$ ce qui est équivalent à $z^2 - 2iz - 2 = z^2 + (-3 + 2i)z - 6i$, ou encore à $(-2i - (-3 + 2i))z = 2 - 6i$. Cette équation linéaire a pour unique solution $z = \frac{2 - 6i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 6i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{30 - 10i}{25} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}i$. On vérifie que pour cette valeur de z les dénominateurs dans les expressions initiales ne s'annulent pas, donc en faisant la multiplication croisée au départ on n'a pas multiplié par 0, et cette solution de l'équation linéaire est aussi une solution de l'équation de départ (ce qu'on peut bien sûr aussi vérifier par un calcul direct).

b.
$$\frac{z - 2i}{z - \sqrt{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2z}$$

✓ L'équation s'écrit d'abord (pour $z \neq 0$, qui est nécessaire pour que le second membre ait un sens) $\frac{z - 2i}{z - \sqrt{3}i} = \frac{z + \sqrt{3}i}{2z}$. Cela implique $(z - 2i)(2z) = (z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i)$ ce qui est équivalent à $2z^2 - 4iz = z^2 + 3$, ou encore à $z^2 - 4iz - 3 = 0$. En écrivant cette équation quadratique sous la forme $(z - 2i)^2 = 3 + (2i)^2 = -1$, on voit qu'elle sera satisfaite si $z - 2i = i$ ou $z - 2i = -i$, autrement dit pour $z = 3i$ et pour $z = i$. On vérifie que pour ces valeurs de z les dénominateurs dans les expressions initiales ne s'annulent pas, donc en faisant la multiplication croisée au départ on n'a pas multiplié par 0, et ces solutions de l'équation quadratique sont aussi des solutions de l'équation de départ (ce qu'on peut bien sûr aussi vérifier par un calcul direct).