Corrigé Travaux dirigés 1L01 SVG, Feuille 5 26 novembre 2007

1. Calculer les intégrales suivantes (révisions de Terminales) :

a. $$\int_1^2 (x-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$\surd$ $\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-x) = \left[(\frac{1}{2}x^2-x)\ln(x)\right]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2(\frac{1}{2}x^2-x)\mathrm{d}\ln(x) = 0 + \int_1^2(1-\frac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x =$
$= \left[x-\frac{1}{4}x^2\right]_{x=1}^{x=2} = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$

b. $$\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

$\surd$ $-\int_0^\pi t\,\mathrm{d}\cos(t) = -\left[t\cos(t)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos(t)\,\mathrm{d}t = \pi + \left[\sin(t)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \pi.$

c. $$\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

$\surd$ $\int_1^2 x^{-4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_{x=1}^{x=2} = -\frac{1}{24}+\frac{1}{3} = \frac{7}{24}.$

d. $$\int_0^1 \mathrm{e}^t\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$$

$\surd$ $\int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t = \left[\mathrm{e}^t\sin(\pi t)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \mathrm{e}^t\pi\cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = -\pi\left[\mathrm{e}^t\cos(\pi t)\right]_{x=0}^{x=1} - \pi^2\int_0^1 \mathrm{e}^t\sin(\pi t).$
Donc la valeur v de l'intégrale vérifie $v = \pi(e+1)-\pi^2 v$, d'où $\int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t = \frac{\pi(e+1)}{1+\pi^2}.$

2. Calculer les intégrales suivantes en mettant en évidence une expression $f(u)\mathrm{d}u = f(u)u'\,\mathrm{d}x$:

a. $$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$\surd$ $\int_0^1 \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}(1+3x^2)}{1+3x^2} = \frac{1}{6}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{6}\left[\ln(u)\right]_{u=1}^{u=4} = \frac{\ln(4)}{6} = \frac{\ln(2)}{3}.$

b. $$\int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\surd$ $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3}\frac{-\mathrm{d}\cos(x)}{\cos(x)} = -\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \left[\ln(u)\right]_{u=\frac{1}{2}}^{u=1} = \ln(2).$

c. $$\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\surd$ $\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}t^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^u\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{e-1}{2}.$

d. $$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\left(1+2\cos(x)+3\sin(x)^2\right)\mathrm{d}x.$$

$\surd$ $\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos(x)+3(1-\cos(x)^2)\right)\mathrm{d}{-\cos(x)} = -\int_1^0(4+2u-3u^2)\,\mathrm{d}u = \left[4u+u^2-u^3\right]_{u=0}^{u=1} = 4-0 = 4.$

e. $$\int_1^e \frac{\sin(\pi\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\surd$ $\int_1^e \sin(\pi\ln(x))\,\mathrm{d}\ln(x) = \int_0^1 \sin(\pi u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-\cos(\pi u)}{\pi}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{2}{\pi}.$

f. $$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1+\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

$\surd$ $\int_0^{\pi/4}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\frac{2\sin(x)\,\mathrm{d}\sin(x)}{1+\sin(x)^2} = \int_0^{\sqrt{1/2}}\frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^{\sqrt{1/2}}\frac{\mathrm{d}u^2}{1+u^2} =$
$= \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}v}{1+v} = \left[\ln(1+v)\right]_{v=0}^{v=1/2} = \ln(\frac{3}{2})$, *où l'on a posé $v = u^2$ (et on aurait pu prendre $v = \sin(x)^2$ avec $\mathrm{d}v = 2\sin(x)\mathrm{d}\sin(x) = \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ au départ).*

g. $$\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x.$$

$\surd$ $\int_0^{\ln 3} 2\mathrm{d}(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}) = \int_{\sqrt{2}}^2 2\,\mathrm{d}u = \left[2u\right]_{u=\sqrt{2}}^{u=2} = 4-2\sqrt{2}.$

3. Calculer les primitives suivantes en utilisant les changements de variable indiqués (en n'oubliant pas que le résultat doit être une expression en x, et qu'il doit contenir une constante) :

a. $$\int^x \frac{x}{3x^4+1}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{avec } t = \sqrt{3}\,x^2).$$

$\checkmark$ $\frac{1}{2\sqrt{3}}\int^x \frac{\mathrm{d}(\sqrt{3}\,x^2)}{(\sqrt{3}\,x^2)^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int^{\sqrt{3}\,x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\,x^2) + C.$

b. $$\int^x \frac{\sin(x)}{4+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{avec } u = \cos(x)).$$

$\checkmark$ $\int^x \frac{-\mathrm{d}\cos(x)}{4+\cos^2(x)} = \int^{\cos(x)}\frac{-\mathrm{d}u}{4+u^2} = \int^{\frac{1}{2}\cos(x)}\frac{-\mathrm{d}(2v)}{4+(2v)^2} = \int^{\frac{1}{2}\cos(x)}\frac{-2\mathrm{d}v}{4(1+v^2)} = -\frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}\cos(x)) + C$
où l'on a posé $u = 2v$ *avec donc* $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}v$.

c. $$\int^x \frac{\sqrt{x+4}}{x+3}\,\mathrm{d}x \text{ sur }]-3,+\infty[\qquad (\text{avec } t = \sqrt{x+4}).$$

$\checkmark$ $\int^x \frac{x+4}{x+3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+4}} = \int^x \frac{(\sqrt{x+4})^2}{(\sqrt{x+4})^2-1}\,2\mathrm{d}\sqrt{x+4} = 2\int^{\sqrt{x+4}}\frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = 2\int^{\sqrt{x+4}}(1+\frac{1/2}{u-1}-\frac{1/2}{u+1})\,\mathrm{d}u =$
$= 2\sqrt{x+4} + \ln(\sqrt{x+4}-1) - \ln(\sqrt{x+4}+1) + C.$

d. $$\int^x \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \text{ sur }]0,\pi[\qquad (\text{avec } u = \cos(x)).$$

$\checkmark$ $\int^x \frac{1+\cos(x)}{-\sin(x)^2}\mathrm{d}(\cos(x)) = \int^{\cos(x)}\frac{1+u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int^{\cos(x)}\frac{1}{u-1}\,\mathrm{d}u = \ln(1-\cos(x)) + C.$

e. $$\int^x \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ sur } [-1,1] \qquad (\text{avec } x = \sin(t)).$$

$\checkmark$ $\int^{\arcsin(x)}\sqrt{1-\sin(t)^2}\,\mathrm{d}\sin(t) = \int^{\arcsin(x)}\cos(t).\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int^{\arcsin(x)}\frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t =$
$= \frac{1}{2}\int^{\arcsin(x)}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int^{\arcsin(x)}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big(\arcsin(x) + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(x))\Big) + C =$
$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) + C = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$