

Dans les équations différentielles ci-dessous, on cherche des fonctions f , définies sur un intervalle de \mathbf{R} et à valeurs dans \mathbf{R} , qui soient suffisamment dérivable, et qui vérifient l'équation donnée. Dans ces équations on utilisera le symbole y pour désigner $f(t)$, y' pour désigner $f'(t)$, et y'' pour désigner $f''(t)$.

1. Résoudre dans \mathbf{R} les équations différentielles suivantes, qui sont à variables séparées :

$$a. y'y^2 = e^t \quad b. y'y = t \quad c. \frac{y'}{1+y^2} = 6t^2 \quad d. \frac{y'}{y(y-2)} = -t$$

2. Dans un processus de désintégration radioactive, la quantité $f(t)$ de la matière radioactive restant à l'instant t vérifie une équation différentielle de la forme $y' + ky = 0$, où k est une constante qui dépend de la matière radioactive (si t est mesuré en secondes, l'unité utilisée pour k sera $\frac{1}{\text{sec}}$). Le temps T de demi-vie de la matière est définie comme la valeur pour laquelle $f(T) = \frac{1}{2}f(0)$.

- a. Résoudre l'équation différentielle, et montrer que T est indépendant de la quantité $f(0)$ de matière radioactive initialement présente.
 b. Dans le tableau suivant on donne le temps de demi-vie pour quelques matières radioactives. Calculer les valeurs de k correspondantes.

Matière	Iode-123	Iridium-192	Césium-137	Carbone-14	Uranium 235
T	13 heures	74 jours	30 ans	5730 ans	704 million ans

3. L'équation logistique peut s'écrire dans la forme $y' = \lambda y(C - y)$ où $\lambda > 0$ et $C > 0$ sont des constantes réelles. Les solutions non constantes de cette équation sont de la forme $f(t) = \frac{C}{1 + m \exp(\lambda Ct)}$ avec $m \in \mathbf{R}$ une constante non nulle.

- a. Montrer que si f est une telle solution, alors pour toute constante $c \in \mathbf{R}$ la fonction $t \mapsto f(t + c)$ est également une solution. Quel est le rapport entre les constantes m pour les deux solutions ?
 b. Supposons que f soit une solution non constante telle que $f(t)$ soit défini pour tout $t \in \mathbf{R}$. Montrer que $0 < f(t) < C$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et qu'il existe une valeur t_0 telle que $f(t_0) = \frac{C}{2}$.
 c. Montrer que cette solution et valeur t_0 vérifient $f(t_0 + t) = C - f(t_0 - t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

4. Résoudre dans \mathbf{R} les équations différentielles linéaires suivantes :

$$a. y' = 3y, \quad b. y' - ty = 0, \quad c. ty' = y, \quad d. y' = 3y + 5, \quad e. y' - ty = t^2 - 1, \quad f. ty' = y + 6.$$

5. Résoudre dans \mathbf{R} les équations différentielles linéaires suivantes :

$$a. y' = 3y + t^2 + 1 \quad (\text{solution particulière de la forme } at^2 + bt + c), \\ b. y' = 3y + (t^2 + 1)e^{2t} \quad (\text{solution particulière de la forme } (at^2 + bt + c)e^{2t}).$$

6. Trouver f défini et dérivable sur \mathbf{R} , vérifiant $f(0) = 0$, ainsi que $f'(t) = (f(t) - 1)t^2$ pour tout t .

7. Déterminer les solutions à valeurs réelles des équations différentielles suivantes du second ordre :

$$a. y'' - 2y' - 3y = 0, \quad b. y'' - 2y' + 5y = 0, \quad c. y'' - 2y' + y = 0, \\ d. y'' = 4y' - 5y, \quad e. y'' = 5y' - 4y, \quad f. y'' = 6y'.$$

8. Trouver f défini et deux fois dérivable sur \mathbf{R} vérifiant $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 0$ pour tout t , ainsi que $f(0) = f'(0) = 1$.

9. Résoudre les équations différentielles suivantes (commencer par chercher des solutions particulières) :

$$a. y'' - 5y' + 6y = t + 1, \text{ avec } f(0) = f'(0) = 1 ; \\ b. y'' - 5y' + 6y = (t + 1)e^t, \text{ avec } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0 ; \\ c. y'' - 5y' + 6y = (t + 1)(2e^t + 3), \text{ avec } f(0) = f'(0) = 5 ; \\ d. y'' + 4y = \cos(t), \text{ avec } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 2.$$