Travaux dirigés 1L01 SVG, Feuille 3 15 octobre 2007

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ dans les cas suivants :

a. $A(X) = X^3 + 2X + 1$ et $B(X) = X^2 + X$,

b. $A(X) = 2X^7 - 4X^4 - X^3 - 7X + 12$ et $B(X) = -X^3 + X^2 + 2$,

c. $A(X) = 1 + 2X^2 - 2X^3 - X^4 - 3X^5$ et $B(X) = 1 - X + 2X^2 - 3X^3$.

2. Parfois juste la connaissance de certaines évaluations particulières d'un polynôme $A(X)$ suffit pour déterminer le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par un polynôme particulier $B(X)$; par exemple, le reste de la division de $A(X)$ par X est le terme constant de $A(X)$, qui est égal à $A(0)$. Déterminer ainsi les restes suivants :

a. Le reste de la division de $A(X)$ par $X - 5$, étant donné que $A(5) = -3$.

b. Le reste de la division de $A(X)$ par $X + 4$ en termes d'une valeur particulière $A(x)$ de votre choix.

c. Le reste de la division de $A(X)$ par $(X - 2)(X + 3)$, étant donné que $A(-3) = 7$ et $A(2) = -3$.

d. Le reste de la division de $A(X)$ par $X^2 + 4X$ en termes de $A(-4)$ et $A(0)$.

3. Déterminer (seulement) le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ dans les cas suivants. On pourra le trouver sans effectuer l'algorithme de division, en considérant les valeurs obtenues en donnant des valeurs particulières bien choisies à X dans l'égalité $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$.

a. $A(X) = X^{2n} + 1$ et $B(X) = X^2 - X - 2$,

b. $A(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ et $B(X) = (X - 1)^2$,

c. $A(X) = (\cos\alpha + X \sin\alpha)^n$ et $B(X) = X^2 + 1$.

4. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 10X + 24$, considéré comme élément de $\mathbf{C}[X]$.

a. Vérifier que $-1 + \mathbf{i}$ est racine de $P(X)$.

b. Argumenter sans calcul supplémentaire que $-1 - \mathbf{i}$ est aussi racine de $P(X)$.

c. Déterminer les racines restantes de $P(X)$ dans $\mathbf{C}$, et la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbf{C}[X]$.

d. Déterminer la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbf{R}[X]$.

5. On affirme que le polynôme $P(X) = X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 28X - 24$ possède une racine d'ordre 3.

a. Sans la déterminer, argumenter que cette racine doit être réelle.

b. Vérifier l'affirmation (on pourra calculer les dérivées de $P(X)$), et déterminer cette racine triple.

c. Donner toutes les racines de $P(X)$ avec leurs multiplicités, ainsi que la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbf{R}[X]$.

6. Soit $P(X) = X^6 - X^5 + 3X^4 - 5X + 2$. On cherche à trouver les coefficients $c_6, c_5, \ldots, c_1, c_0$ tels que $P(X)$ s'écrive

$$P(X) = c_6(X-1)^6 + c_5(X-1)^5 + c_4(X-1)^4 + c_3(X-1)^3 + c_2(X-1)^2 + c_1(X-1) + c_0.$$

Trouver ces coefficients selon chacune des méthodes suivantes et comparer les résultats (ainsi que l'effort nécessaire pour les obtenir).

a. En appliquant la formule de Taylor.

b. En posant $Y = X - 1$ et en calculant $P(X) = P(Y + 1)$ en termes de Y.

c. En écrivant d'abord $P(X) = (X-1)Q(X)+r$ à l'aide de la division euclidienne. Puis argumenter qu'on doit avoir $Q(X) = c_6(X-1)^5 + c_5(X-1)^4 + c_4(X-1)^3 + c_3(X-1)^2 + c_2(X-1) + c_1$ et $r = c_0$, et continuer de façon similaire avec $Q(X)$ pour trouver successivement $c_1, c_2, \ldots, c_6$.

7. Pour chacune des fractions suivantes, la décomposer en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$ et calculer ses primitives.

a. $\dfrac{(X-1)(X-2)}{(X-3)(X-4)}$ *b.* $\dfrac{(X-1)(X-2)}{(X-3)^2}$ *c.* $\dfrac{(X-1)(X-2)}{(X-3)^2(X-4)}$ *d.* $\dfrac{8}{(X+2)(X^2+4)}$

e. $\dfrac{3X-11}{(X-1)(X^2-2X+5)}$ *f.* $\dfrac{X^4}{X^3+1}$ *g.* $\dfrac{1}{X^3(1+X^2)}$ *h.* $\dfrac{(X^2+2X-3)(X+1)^2}{(X^2-1)(X+3)^2}$

i. $\dfrac{9X+5}{X(X+1)(X^2+2X+5)}$

8. Soit $F(X) = \dfrac{1}{3X^2+5X+2}$.

a. Écrire la décomposition en éléments simples de $F(X)$.

b. En déduire celle de $G(X) = \dfrac{1}{(3X^2+5X+2)^2}$.

c. De même pour $H(X) = \dfrac{1}{(3X^2+5X+2)^3}$.

d. Et encore pour $\Phi(X) = \dfrac{6X+5}{(3X^2+5X+2)^2}$.

9. Écrire la décomposition “a priori” en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(X+1)(X^2-2X+m)^2},$$

où m est un réel donné (on discutera selon les valeurs de m). *Il n'est pas demandé de calculer les coefficients.*

10. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $P(X) = X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$, quel polynôme considère comme élément de $\mathbf{C}[X]$.

a. Quelles sont les racines (dans $\mathbf{C}$) de $P(X)$?

b. Quelles sont les racines dans $\mathbf{C}$ de $P(X^2) = X^4 - 2\cos(\alpha)X^2 + 1$?

c. Quelle est la factorisation *dans* $\mathbf{R}[X]$ de $P(X^2)$.

d. Plus généralement, donner la factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ de $P(X^n) = X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1$, pour un entier $n > 0$.

e. Application : factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $X^4 + X^2 + 1$.

11. On rappelle la formule de De Moivre : $(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + \mathbf{i}\sin(n\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$.

a. Justifier à l'aide de cette formule l'existence pour tout $n \in \mathbf{N}$ d'un polynôme $T_n(X) \in \mathbf{R}[X]$ (qui sera même à coefficients entiers), tel que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ on ait $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$.

b. Trouver les polynômes $T_0(X)$, $T_1(X)$, et $T_2(X)$.

c. Combien vaut $\cos\big((n-1)\alpha\big) + \cos\big((n+1)\alpha\big)$, pour $n \in \mathbf{N}$?

d. En déduire l'égalité $T_{n-1}(X) + T_{n+1}(X) = 2X\,T_n(X)$.

e. En utilisant cette formule, calculer successivement $T_3(X)$, $T_4(X)$, et $T_5(X)$.

N.B.: Ces polynômes $T_n(X)$ sont appelés les polynômes de Tchebycheff.

12. Montrer que pour tout entier $n > 1$ le polynôme $P(X) = X^{2n} - 1$ se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ comme

$$P(X) = (X-1)(X+1)\prod_{i=1}^{n-1}(X^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n})X + 1)).$$