Travaux dirigés 1L01 SVG, Feuille 2 1^er^ octobre 2007

1. Soient f et g les fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ données par $f(x) = x^2 + 5x + 3$ et $g(x) = x^3 + 2x - 7$ pour $x \in \mathbf{R}$.

a. Décrire $g \circ f$.

b. Décrire $f \circ g$.

c. Décrire $(g \circ g)'$.

2. Écrire les fonctions suivantes $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ comme composées de deux autres fonctions (dont on n'exige pas qu'elle soient définies sur $\mathbf{R}$ tout entier).

a. $x \mapsto 3 + \sin(x)^2$ *b.* $y \mapsto \cos(4 - y^2)$ *c.* $x \mapsto \dfrac{1 + \cos x}{3 - 2\cos x}$ *d.* $x \mapsto \dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{1 + 2\mathrm{e}^x}$

e. $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{3x}$ *f.* $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{x/2}$ *g.* $x \mapsto 1 - \sin x + \cos(x)^2$ *h.* $x \mapsto \dfrac{1 + \cos x}{3 - \cos(2x)}$

3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction donnée par $x \mapsto x^2 - 2x + 3$.

a. Montrer que f n'est pas injectif.

b. Montrer que f n'est pas surjectif.

c. Spécifier un intervalle I telle que la restriction $I \to \mathbf{R}$ de f soit injective.

d. Pour cet intervalle I, trouver un intervalle J telle que $x \mapsto f(x)$ définisse une bijection $\tilde{f} : I \to J$.

e. Décrire la fonction réciproque $J \to I$ de la fonction du point précédent.

4. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications telles que la composée $g \circ f : X \to Z$ soit bijective. Montrer que f est injectif et que g est surjectif.

5. On rappelle que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est appelé impair si l'égalité $f(-x) = -f(x)$ est vérifiée pour tout x de $\mathbf{R}$, et que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et est appelé pair si l'égalité $f(-x) = +f(x)$ est vérifiée pour tout x de $\mathbf{R}$ (le signe '+' dans la second égalité peut être omis, mais sert à marquer le contraste avec la première).

a. Soient f, g deux fonctions impaires $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Quelle est la nature de la composée $g \circ f$ (paire ou impaire, ou éventuellement "on ne peut affirmer ni l'un ni l'autre") ?

b. Soient f et g deux fonctions paires $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Quelle est la nature de la composée $g \circ f$?

c. Soient $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avec f impair et g pair. Quelle est la nature de la composée $g \circ f$, et de la composée $f \circ g$?

d. Supposons maintenant que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ne soit ni paire ni impaire (comme la plupart des fonctions). Est-il néanmoins possible d'affirmer, soit de la composée $g \circ f$, soit de la composée $f \circ g$, qu'elle est paire ou impaire, en exigeant une hypothèse convenable sur g ?

6. Calculer

a. $\arcsin(-\frac{1}{2})$, *b.* $\arccos(-\frac{1}{2})$, *c.* $\arctan(-\sqrt{3})$.

7. Repérer graphiquement et estimer les nombres

a. $\arcsin(\frac{1}{4})$, *b.* $\arccos(\frac{1}{4})$.

8. Résoudre les équations

a. $4\sin(x) = 1$, *b.* $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{1}{2}$.

9. Calculer

a. $\arcsin(\sin \frac{7\pi}{6})$, *b.* $\arccos(\cos \frac{7\pi}{6})$, *c.* $\arctan(\tan \frac{7\pi}{6})$.

10. Calculer $\arcsin(\sin x)$ dans les cas suivants :

a. pour $\frac{11\pi}{2} \leq x \leq \frac{13\pi}{2}$, *b.* pour $\frac{13\pi}{2} \leq x \leq \frac{15\pi}{2}$.

11. Pour x dans $[-1,1]$, simplifier les expressions :

a. $\cos(\arcsin x)$, *b.* $\sin(\arccos x)$, *c.* $\arccos x + \arcsin x$.

12. Si un nombre complexe s'écrit sous formes algébrique et trigonométrique comme $a + b\mathbf{i} = re^{\mathbf{i}\theta}$ avec $a \neq 0$, on voit géometriquement que $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

a. En déduire pour $x \in \mathbf{R}$ que $\arctan(x) = \arg(1+\mathbf{i}x)$, et si $x > 0$ aussi que $\arctan(\frac{1}{x}) = \arg(x+\mathbf{i})$, où la valeur de 'arg' est prise dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

b. Calculer $\frac{(2+\mathbf{i})^2}{1+\mathbf{i}}$. Puis en prenant l'argument, en déduire : $2\arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(1) = \arctan(\frac{1}{7})$, quelle égalité équivaut à $\frac{\pi}{4} = 2\arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(\frac{1}{7})$ (pourquoi ?).

c. Avec un calcul similaire, justifier la formule $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (due à John Machin, 1706, qui s'en servit pour calculer les 100 premières décimales du nombre π).

13. Soit f la fonction $x \mapsto \arctan\frac{1+x\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x}$, définie sur la partie D de $\mathbf{R}$ où l'expression donnée a un sens.

a. Déterminer le domaine D de définition de f, et déterminer l'ensemble D' des $x \in D$ où $f'(x)$ est défini.

b. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D'$.

c. Déduire du point précédent une expression simplifiée pour $f(x)$.

14. Soit g la fonction $x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, définie sur la partie D de $\mathbf{R}$ où l'expression donnée a un sens.

a. Déterminer le domaine D de définition de g, et déterminer l'ensemble D' des $x \in D$ où $g'(x)$ est défini.

b. Calculer $g'(x)$ pour $x \in D'$.

c. Déduire du point précédent une expression simplifiée pour $g(x)$.