

- Mettre sous forme algébrique  $a + bi$ , avec  $a, b \in \mathbf{R}$ , les nombres complexes suivants :
  - $\frac{5+2i}{1-2i}$
  - $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^2$
  - $(1 + 2i)^3$
- Mettre sous forme trigonométrique  $re^{i\theta}$ , avec  $r, \theta \in \mathbf{R}$  et  $r > 0$ , les nombres complexes suivants :
  - $-1$
  - $i$
  - $1 - \sqrt{3}i$
  - $-\sqrt{3} + i$
  - $-2 + \sqrt{12}i$
  - $\frac{1+i}{1-i}$
- Calculer sous forme algébrique
  - $i^{11}$ ,
  - $(1 - i)^{11}$ ,
  - $i^{2007}$ ,
  - $(\sqrt{3} + i)^{10}$ .
- Résoudre en  $z \in \mathbf{C}$  chacune des équations suivantes :
  - $\frac{z-1}{z+1} = 1 - i$
  - $\frac{z-1}{z+2} = i - 2$
  - $\frac{z-1}{z-i} = \frac{z}{z+i}$
  - $\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i}$
- Déterminer les modules et les arguments de  $\frac{(1+i)^8}{(1+\sqrt{3}i)^5}$  et de  $\frac{(1-i)^5(i-\sqrt{3})^4}{(1+i)^3}$
- Résoudre en  $z \in \mathbf{C}$  chacune des équations suivantes :
  - $z^3 = 1$ ,
  - $z^4 = -4$ ,
  - $z^6 = -27$ .
- Calculer sous forme trigonométrique une racine carrée de  $1+i$  (on écrirait  $\sqrt{1+i}$  si la loi n'interdisait pas d'écrire  $\sqrt{z}$  pour  $\sqrt{|z|}e^{\frac{\arg(z)}{2}}$  sauf si  $z \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ ), puis la même valeur sous forme algébrique ( $(a+bi)^2 = 1+i$  en  $a, b \in \mathbf{R}$ ). En déduire des expressions algébriques pour  $\cos \frac{\pi}{8}$  et pour  $\sin \frac{\pi}{8}$ .
- Résoudre en  $z \in \mathbf{C}$  chacune des équations suivantes :
  - $z^2 + z + 1 + i = 0$ ,
  - $z^2 - 2iz - 1 = 0$ .
  - $\frac{1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{2}{z^2 - 2i}$ .
- Les équations suivantes ne sont pas des équations algébriques en  $z$ , à cause de l'occurrence de  $\bar{z}$ . Néanmoins on peut résoudre chaque équation, en formant une deuxième équation par l'application de la conjugaison complexe à l'équation donnée, et en traitant dans ce système d'équations  $z$  et  $\bar{z}$  comme deux inconnues indépendantes.
  - $2z + i\bar{z} = 3 + 6i$ ,
  - $(1 + 2i)z + 3\bar{z} = 4$ .
- Indication: les problèmes suivants peuvent être résolus en introduisant un paramètre réel (pour l'inconnue partie réelle ou imaginaire de l'expression donnée), et en résolvant en  $z$  l'équation qui en résulte (il existe aussi d'autres méthodes qui sont plus astucieuses sans être plus simples).
  - Soit  $z \in \mathbf{C}$  avec  $z \neq -1$  tel que  $\frac{z-1}{z+1}$  soit réel. Montrer que  $z$  est aussi réel.
  - Soit  $z \in \mathbf{C}$  avec  $z \neq -1$  tel que  $\frac{z-1}{z+1}$  soit imaginaire. Montrer que  $|z| = 1$ .
  - Soit  $z \in \mathbf{C}$  avec  $z \neq 2i$  tel que  $\frac{5z-3i}{2z-4i}$  soit réel. Montrer que  $z$  est imaginaire.