



## Topologie et espaces métriques, DS1, Corrigé.

### Exercice 1 : Le diamètre.

(i) Il est facile de voir que si  $A$  contient 0 ou 1 point, son diamètre est nul. Réciproquement, si  $\delta(A) = 0$ , alors, ou bien  $A$  est vide, ou bien il ne l'est pas et  $\forall x, y \in A$ ,

$$d(x, y) \leq \delta(A) = 0$$

D'où  $\forall x, y \in A, x = y$ .  $A$  contient en ce cas exactement un point.

Par convention,  $\infty + \infty = +\infty$ , et  $+\infty \leq +\infty$  à partir de maintenant.

(ii) Soit  $P_A = \{d(x, y), x, y \in A\}$ ,  $P_B = \{d(x, y), x, y \in B\}$ . On a  $P_A \subset P_B \subset \mathbb{R}$ , la borne supérieure du premier est donc inférieure à celle du second.

(iii)  $\delta(\bar{A}) \geq \delta(A)$  par (ii).

Réciproquement, si  $\delta(A) = +\infty$ , l'inégalité inverse est vraie. Si  $\delta(A)$  est fini, pour tous  $x, y \in \bar{A}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x', y' \in A$  tels que  $d(x, x') \leq \varepsilon$  et  $d(y, y') \leq \varepsilon$ . Par l'inégalité triangulaire, on a alors  $d(x, y) \leq 2\varepsilon + \delta(A)$ . Cette dernière inégalité étant valable pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $d(x, y) \leq \delta(A)$ . Cette dernière inégalité étant valable pour tout  $x, y \in \bar{A}$  et  $\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$ . CQFD.

(iv) Soient  $x, y \in A \cup B$ . Si  $x, y \in A$ , alors  $d(x, y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B)$ . Si  $x, y \in B$ , alors  $d(x, y) \leq \delta(B) \leq \delta(A) + \delta(B)$ . Si  $x \in A$  et  $y \in B$ , alors  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq \delta(A) + \delta(B) \leq \delta(A) + \delta(B)$  où  $z$  est un point quelconque de  $A \cap B$ .

### Exercice 2 : Valeurs d'adhérence.

- On sait que toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et de même limite, ce qui peut se montrer ainsi :

$$(x_n) \longrightarrow l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N/n > N \implies |x_n - l| < \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N/n > N \implies |x_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon \text{ car } \varphi(n) \geq n$$

$$\implies (x_{\varphi(n)}) \longrightarrow l \text{ Donc } L = \{l\} \text{ pour toute suite convergente de limite } l.$$

- (i) on a  $\lim(x_n) = +\infty$  et aussi  $\lim(x_{\varphi(n)}) = +\infty$  car  $\varphi(n) \geq n$ . Donc aucune suite extraite n'est convergente et  $L = \emptyset$ .

(ii)  $\lim(x_{2n}) = 1$ ,  $\lim(x_{2n+1}) = -1$  donc  $\{-1, 1\} \subset L$ .

Supposons  $(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow l$  avec  $l \notin \{-1, 1\}$  alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists N/n > N \implies |x_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$

ce qui donne une contradiction pour  $\varepsilon < \min\{|1-l|, |-1-l|\}$  car  $\forall n, x_{\varphi(n)} \in \{-1, 1\}$ .

Donc  $L = \{-1, 1\}$

(iii)  $\lim(x_{2n+1}) = 0$  donc  $0 \in L$

Supposons  $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow l$  avec  $l \neq 0$  alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists N/n > N \implies |x_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$  ce qui donne une contradiction si  $\varepsilon < \frac{|l|}{2}$  car  $\forall n, x_{\varphi(n)} = 0$  ou  $\varphi(n)$ .

Donc  $L = \{0\}$

3.  $(x_{2n}) \rightarrow l$  et  $(x_{2n+1}) \rightarrow l'$

Si  $l \neq l'$  alors  $\{l, l'\} \subset L$  donc  $(x_n)$  divergente à cause de la question 1. Si  $l = l'$  alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists N/n > N \implies |x_{2n} - l| < \varepsilon$  et  $\forall \varepsilon > 0, \exists N'/n > N' \implies |x_{2n+1} - l| < \varepsilon$  d'où  $\forall \varepsilon > 0, \exists N'' = 2\max\{N, N' + 1\}/n > N'' \implies |x_n - l| < \varepsilon$ , c'est à dire  $(x_n)$  converge vers  $l$ .

La condition cherchée est donc  $l = l'$ . Dans le cas contraire, supposons  $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow l''$  avec  $l'' \notin \{l, l'\}$  alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists N/n > N \implies |x_{\varphi(n)} - l''| < \varepsilon$  ce qui donne une contradiction pour  $\varepsilon < \frac{1}{2}\min\{|l'' - l|, |l'' - l'|\}$ . Donc  $L = \{l, l'\}$  dans ce cas.

4. Soit  $x$  un réel quelconque. On sait que  $\mathbb{Q} \cap ]x - 1, x + 1[$  est infini donc il existe  $n_1$  tel que  $q(n_1) \in ]x - 1, x + 1[$ .

On note  $\varphi(1) = n_1$ .

On sait que  $\mathbb{Q} \cap ]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}[$  est infini donc il existe une infinité de  $n_2$  tel que  $q(n_2) \in ]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}[$ . On peut donc en choisir un plus grand strictement que  $\varphi(1)$ , et le noter  $\varphi(2)$ . On construit ainsi une suite extraite  $(x_{\varphi(n)})$  telle que  $x_{\varphi(n)} \in ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ . Elle converge naturellement vers  $x$ . *Conclusion* :  $L = \mathbb{R}$ .

**Exercice 3 :** *Sur la compacité.* Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $f : X \rightarrow X$  une application continue.

1. La réponse est oui. Par définition de la borne inférieure,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in X$  tel que  $g(x_n) \in [l, l + \frac{1}{n}]$ . Soit  $x_{\phi(n)}$  une sous suite-extraite convergente vers  $x \in X$ . Par continuité de la fonction  $f$ ,  $f(x) = \lim_n f(x_{\phi(n)}) = l$ . CQFD
2. Soit  $r = \inf_{x \in X} g(x)$ . Par construction,  $r$  est positif ou nul. Si  $r = 0$ , alors, par (i), il existe  $x$  tel que  $g(x) = 0$ , c'est à dire  $d(f(x), x) = 0$ , c'est à dire  $f(x) = x$ . Donc  $r > 0$ .
3. - (i) Par 1, la fonction  $g$  atteint son minimum, il existe donc  $c \in X$  tel que

$$d(c, f(c)) \leq d(x, f(x)) \quad \forall x \in X. \quad (1)$$

Si  $c \neq f(c)$ , alors  $d(f(c), f(f(c))) < d(c, f(c))$  car  $f$  est strictement contractante, et  $d = f(c)$  contredit l'Eq. (1). Contradiction.

D'où  $c = f(c)$ .

- (ii) Soient  $x$  et  $y$  deux points fixes. Si  $x \neq y$ , alors  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ . Contradiction. Donc  $x = y$  et l'unicité du point fixe.