École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD5

Exercice 1. Soit X un espace métrique complet séparable et soit $f\colon X \to X$ une application continue.

1. Montrer que si X possède un point isolé et f est topologiquement transitive alors X est fini.
2. Montrer que si X est sans point isolé et que $x \in X$ est d'orbite dense alors $\omega(x)$ est dense.
3. Montrer par un exemple que la propriété précédente est fausse s'il y a des points isolés.
4. Montrer que f est transitive si et seulement s'il existe un point x tel que $\omega(x)$ soit dense.
5. On suppose que f est un homéomorphisme et que X est sans point isolé. Montrer que s'il existe un point d'orbite totale dense alors il existe un point d'orbite positive dense.

Exercice 2. Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels modulo $\mathbb{Z}$, soit α un irrationnel et soit $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ l'application donnée par

$$f(x, y) = (x + \alpha, x + y).$$

1. Montrer que f est topologiquement transitive.
2. En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{T}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{T}$ on ait $\omega(x_0, y) = \mathbb{T}^2$.
3. Soit $K \subset \mathbb{T}^2$ un compact invariant non vide. Montrer que la première projection de K est égale à $\mathbb{T}$.
4. Montrer que f est minimale.

Exercice 3. Soit α un nombre irrationnel, soit $r\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ une application continue et soit $\varphi\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ donnée par

$$\varphi(x, y) = (x + \alpha, y + r(x))$$

1. Montrer que s'il existe un entier $l \geq 1$ et une application continue $g\colon T \to T$ telle que $g(x+\alpha) = g(x) + lr(x)$ pour tout x alors φ n'est pas minimale. Commencer par le cas $l = 1$.
2. On se donne maintenant un compact invariant minimal $Y \subset \mathbb{T}^2$. On suppose de plus que $Y \neq \emptyset$. Montrer que la première projection de Y est égale à $\mathbb{T}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{T}$. On note V_θ l'application de $\mathbb{T}^2$ dans lui-même donnée par $V_\theta(x,y) = (x, y+\theta)$. Montrer que $V_\theta(Y)$ est soit égal à Y soit disjoint de Y.
4. Soit G l'ensemble des θ tels que $V_\theta(Y) = Y$. Montrer que $G = \mathbb{Z}/l \mod 1$ pour un certain entier $l \geq 1$.
5. En utilisant tout ce qui précède, montrer que φ est minimale si et seulement s'il n'existe pas d'entier l et d'application continue $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ vérifiant $g(x+\alpha) = g(x) + lr(x)$ pour tout x.