École Normale Supérieure
FIMFA

Année 2017/18

Systèmes dynamiques
TD4

Exercice 1 (Bifurcation de doublement de période)**.** Soit $\varphi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ vérifiant $\varphi(\mu,0)=0$ pour tout μ et $\partial_x\varphi(0,0)=1$. .

1. Donner le diagramme de bifurcation de φ au voisinage de $(0,0)$ lorsque $\partial_{x\mu}\varphi(0,0)>0$, $\partial_{xx}\varphi(0,0)=0$ et $\partial_{xxx}\varphi(0,0)<0$.

On se donne maintenant $\psi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ vérifiant $\psi(0,0)=0$ et $\partial_x\psi(0,0)=-1$.

2. Montrer qu'il existe une fonction q de classe $\mathcal{C}^3$ définie au voisinage de 0 telle qu'on ait
$$\psi(\mu,x)=x \quad\Leftrightarrow\quad x=q(\mu)$$
pour x et μ suffisamment proches de 0.
3. On pose
$$\varphi(\mu,x)=\psi\left(\mu,\psi(\mu,x+q(\mu))\right)-q(\mu)$$
Montrer que $\varphi(\mu,0)=0$ pour tout μ et que $\partial_x\varphi(0,0)=1$.
4. Montrer que $\partial_{xx}\varphi(0,0)=0$. Pourquoi cette égalité était-elle prévisible ?
5. On suppose maintenant qu'au point $\mu=0, x=0$
$$2\partial_{x\mu}\psi+\partial_{xx}\psi\,\partial_\mu\psi<0 \quad\text{et}\quad 2\partial^3_{xxx}\psi+3(\partial^2_{xx}\psi)^2>0.$$
Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$ on a :
   - Pour $\mu<0$ la seule orbite périodique de ψ_μ est le point fixe $q(\mu)$, qui est de plus attractif ;
   - Pour $\mu>0$, le point fixe $q(\mu)$ est répulsif et il existe une orbite de période 2 attractive.

On considère l'exemple de la suite logistique, à savoir le système dynamique sur $[0,1]$ donné par $f_\mu(x)=\mu x(1-x)$, le paramètre μ appartenant à $[0,4]$.

6. Étudier les bifurcations en $\mu=1$ et en $\mu=3$.