École Normale Supérieure — Année 2018/19

FIMFA

Systèmes dynamiques
TD3

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $\varphi\colon X \to X$ une application continue. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que φ^N est une contraction.

1. Montrer qu'il existe une distance D sur X, qui engendre la même topologie que d, et pour laquelle φ est une contraction.
2. Si (X, d) est complet, montrer que φ admet un unique point fixe, qui est asymptotiquement stable, et dont le bassin d'attraction est X entier.

Exercice 2. Soit V un champs de vecteur complet sur une variété M et soit φ le flot associé.

1. Pour $x \in M$ on pose
$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\varphi^s(x),\ s \geq t\}}.$$
Montrer que ω est un ensemble invariant pour le flot φ.
2. Montrer que si $f\colon M \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de Lyapounov alors f est constante sur $\omega(x)$.

Exercice 3. On considère le champs $V(x, y) = (y, -x - y^3)$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Le linéarisé permet-il de statuer sur la stabilité asymptotique de 0 ?
2. En considérant la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ montrer que 0 est asymptotiquement stable.

Exercice 4 (Pendule amorti)**.** On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - \gamma y \end{cases}$$

sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, où γ est un paramètre strictement positif. On notera V_γ le champs de vecteur donné par $V_\gamma(x, y) = (y, -\sin(x) - \gamma y)$.

1. Quels sont les points fixes du système.
2. Discuter de leur stabilité en considérant la différentielle de V_γ.

3. Montrer que la fonctionnelle d'énergie $E(x,y) = -\cos x + y^2/2$ est une une fonction de Lyapounov.
4. En déduire que toute trajectoire converge vers un point fixe. Est-il vrai que toute trajectoire converge vers un point fixe stable ?

Exercice 5. Soit A une matrice $d \times d$. Montrer l'équivalence entre :

(i) Toutes les solutions de l'équation linéaire $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ sont bornées ;

(ii) La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures ;

(iii) Il existe un produit scalaire pour lequel A est antisymétrique.

Exercice 6 (Rayon spectral)**.** Soit A une matrice $d \times d$ réelle ou complexe et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ ses valeurs propres, comptées avec multiplicité. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de A :

$$\rho(A) = \max_{i \leq d} \{|\lambda_i|\}.$$

Rappelons qu'on dit qu'une norme $\|\cdot\|$ sur $M_d(\mathbb{R})$ ou $M_d(\mathbb{C})$ est dite subordonnée s'il existe une norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ respectivement, telle que

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} \{|Ax|\}.$$

1. Montrer que pour toute norme subordonnée $\|\cdot\|$ on a $\rho(A) \leq \|A\|$. Montrer par un exemple qu'il n'y a pas forcément égalité.
2. Montrer que $\rho(A) < 1 \Leftrightarrow A^n \to 0$.
3. En déduire que pour toute norme $\|\cdot\|$ (pas forcément subordonnée) on a $\rho(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}$.
4. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$.
   Indication : Étant donnée une norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on pourra considérer une nouvelle norme de la forme

   $$\|x\| = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i |A^i x|,$$

   avec α et n bien choisis.