

Systèmes dynamiques
TD12

On s'intéresse aux théorèmes suivants :

Théorème de Szeremédi [1975]. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, supposé dense au sens où*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\# A \cap \{-n, \ldots, n\}}{2n+1} > 0.$$

Alors A contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire : pour tout entier k il existe $x \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\{x, x+r, x+2r, \ldots, x+(k-1)r\} \subset A.$$

Les cas $k = 1$ ou 2 sont triviaux mais le cas $k = 3$ est déjà difficile, il a été démontré pour la première fois par Roth en 1953.

Théorème de récurrence multiple de Furstenberg [1977]. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ un espace de probabilité muni d'une transformation inversible invariante. Alors pour tout E vérifiant $\mu(E) > 0$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ il existe un $r \in \mathbb{N}^*$ non nul tel que*

$$E \cap \phi^{-r} E \cap \cdots \cap \phi^{-(k-1)r} E \neq \emptyset.$$

En fait Furstenberg montre quelque chose de plus fort : sous les mêmes hypothèses on a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \mu(E \cap \phi^{-r} E \cap \cdots \cap \phi^{-(k-1)r} E) > 0. \tag{1}$$

Exercice 1. On s'intéresse au cas $k = 2$ du théorème de récurrence de Furstenberg.

1. Montrer qu'on peut le déduire du théorème de récurrence de Poincaré.
2. Plus précisément montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \mu(E \cap \phi^{-r} E) \geq \mu(E)^2.$$

Exercice 2. Soit $A \subset \mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mu_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \delta_{A+k}.$$

1. Montrer que (μ_n) possède des valeurs d'adhérence pour la convergence faible des mesures.
2. Soit $\mathcal{E} = \{B \subset \mathbb{Z} \colon 0 \in B\}$. Montrer que si A est dense alors $\liminf \mu_n(E) > 0$.
3. Montrer que pour tout entier k le théorème de Szemerédi au rang k se déduit du théorème de Furstenberg au rang k.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ un espace de probabilité muni d'une transformation inversible invariante. On dit que $f \in L^2(\mu)$ est presque périodique si son orbite $\{f \circ \phi^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement compacte dans L^2.

1. Montrer que si $X = \mathbb{T}$, si ϕ est une translation et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ alors tout élément de L^2 est presque périodique. On dit que le système est *compact*.
2. Montrer que f est presque périodique au sens précédent si et seulement si elle l'est au sens de la dynamique topologique : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que tout intervalle d'entiers de longueur T contienne un élément n vérifiant $\|f - f \circ \phi^n\|_2 \leq \epsilon$.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions presque périodique est un sous-espace fermé de L^2, qui est de plus invariant par ϕ.
4. Montrer que si f est bornée et presque périodique, alors pour tout entier k et tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des entiers n tels que

$$\int_X f(f \circ \phi^n) \cdots (f \circ \phi^{(k-1)n})\, d\mu \geq \int_X f^k\, d\mu - \epsilon,$$

   est un sous-ensemble dense de $\mathbb{Z}$.
5. Montrer que si $\mu(E) > 0$ et $\mathbb{1}_E$ est presque périodique alors E satisfait la condition (1) pour tout k.

Ceci montre en particulier le théorème de Furstenberg pour les systèmes compacts.

6. Montrer que si f et g sont presque périodiques et bornées alors fg et $\max(f, g)$ sont presque périodiques.
7. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Z}$ des $E \in \mathcal{A}$ tels que $\mathbb{1}_E$ soit presque périodique est une tribu et qu'une fonction est presque périodique si et seulement si elle est $\mathcal{Z}$-mesurable.