École Normale Supérieure
 Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD11

Exercice 1. Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et soit $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ donnée par $f(x) = x + \alpha$. On a vu que f était ergodique en utilisant la base de Fourier, on se propose de donner une autre démonstration de ce résultat.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{T}$, soit n un entier supérieur à $2/|I|$. Montrer qu'il existe $i_1, \dots, i_n$ tels que
$$f^{-i_1}(I) \cup \cdots \cup f^{-i_n}(I) = \mathbb{T}.$$
2. En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour pour tout ensemble f-invariant A et pour tout intervalle I on ait
$$|A \cap I| \geq c|A|\,|I|.$$
3. Conclure en utilisant le théorème de différentiation de Lebesgue.

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un processus gaussien, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire des X_i est une variable aléatoire gaussienne. On suppose que le processus est centré, au sens où $\mathbb{E}[X_i] = 0$ pour tout i. On note (a_{ij}) la matrice de covariance de (X_i) :
$$a_{ij} = \mathbb{E}[X_i X_j], \quad i, j \in \mathbb{N}$$
On note μ la loi du processus (X_n). C'est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$.

1. Montrer que la matrice (a_{ij}) caractérise μ.
2. À quelle condition le décalage sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ laisse-t-il μ invariante ?
3. On suppose que cette condition est vérifiée, montrer que le décalage est mélangeant si et seulement si les variables sont décorrélées à l'infini :
$$\lim_{|i-j|\to\infty} \mathbb{E}[X_i X_j] = 0.$$

Note : L'ergodicité est plus difficile à caractériser...

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{E}, \mu, \phi)$ et $(Y, \mathcal{F}, \nu, \psi)$ deux espaces mesurés munis chacun d'une application préservant la mesure.

1. Montrer par un exemple que les deux systèmes peuvent être ergodiques sans que le produit le soit.
2. Montrer que si l'un des systèmes est mélangeant et l'autre ergodique alors le produit est ergodique.